

УДК 681.787

**И. Э. СУЛЕЙМЕНОВ, С. Т. БАЙПАКБАЕВА**

*Алматынський университет энергетіки і зв'язи*

### **К ОБОСНОВАНИЮ МОДЕЛИ ЖИГЛИНСКОГО-КУЧИНСКОГО РЕАЛЬНОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА ФАБРИ-ПЕРО МЕТОДАМИ ОБОБЩЁННОЙ ФУРЬЕ-ОПТИКИ**

*Методами обобщенной Фурье-оптики дано корректное обоснование параксиальной модели реального интерферометра Фабри-Перо, ранее предложенной А. Г. Жиглинским и В. В. Кучинским. В рамках данной модели реальный интерферометр Фабри-Перо рассматривается как совокупность дифференциально-малых интерферометров, каждый из которых обладает своей оптической толщиной. Такой подход позволяет увеличить точность получаемых данных за счёт учёта аппаратной функции спектрального прибора. Методами обобщённой Фурье-оптики получено общее выражение, позволяющее описать результат интерференции плоской монохроматической волны в системе, образованной двумя наклонно расположенными зеркалами. Предельным случаем данной формулы при малых углах является формула, вытекающая из модели Жиглинского-Кучинского.*

**Ключевые слова:** *интерферометр Фабри-Перо, многолучевая интерференция, оптическая толщина, зеркала, Фурье-оптика, аппаратная функция, задача дифракции.*

*Мақалада жалпыланған Фурье оптика әдістерін қолданып, бұрынғы А. Г. Жиглинский мен В. В. Кучинскийдің ұсынған нақты Фабри-Перо интерферометрінің параксикалық моделіне дұрыс негіздеме берілген. Осы модельдің шеңберінде нақты Фабри-Перо интерферометрі дифференциалды-шағын интерферометрлер жиынтығы ретінде қарастырып, олардың әрқайсысының өз оптикалық қалыңдығы бары көрсетілген. Бұл тәсіл спектрлік құралдың аппараттық функциясын ескере отырып, алынған деректердің дұрыстығын арттыруға мүмкіндік береді. Жалпыланған Фурье оптика әдістерін қолдана отырып, екі жалпақ айнадан құрылған жүйеде монохроматикалық жазықтықтың интерференциясының нәтижесін сипаттауға мүмкіндік беретін жалпы көрініс алынады. Осы формуланың кіші бұрыштардағы шектеулі жағдайы - Жиглин-Кучинский үлгісінен алынған формула.*

**Кілттік сөздер:** *Фабри-Перо интерферометрі, көпсәулелі интерференция, оптикалық қалыңдық, айналар, Фурье-оптика, аппараттық функция, дифракция мәселесі.*

*In the article is given using the methods of generalized Fourier optics, a correct case for the paraxial model of a real Fabri-Pérot interferometer, previously proposed by A. G. Zhiglinsky and V. V. Kuchinsky. In the framework of this model, the real Fabri-Pérot interferometer is considered as a set of differential-small interferometers, that each of which has its own optical thickness.*

*This approach allows increasing the accuracy of the data obtained by taking into account the hardware function of the spectral instrument. Using the methods of generalized Fourier optics, a general expression*

is obtained, which makes it possible to describe the result of the interference of a plane monochromatic wave in a system formed by two inclined mirrors. The limiting case of this formula at small angles is a formula derived from the Zhiglinsky-Kuchinsky model.

**Key words:** Fabri-Pérot interferometer, multipath interference, optical thickness, mirrors, Fourier optics, hardware function, diffraction problem.

Интерферометр Фабри-Перо до сих пор остаётся одним из основных инструментов спектроскопии высокой разрешающей силы. Он находит и находит широкое применение, в частности, в астрофизике, в исследованиях процессов, происходящих непосредственно в атомных ядрах, и т. д. [1].

Для решения задач из области спектроскопии высокой разрешающей силы часто требуется решить обратную задачу, то есть в явном виде учесть передаточную (аппаратную) функцию данного измерительного прибора, для того чтобы получить более точную информацию о характере исследуемых процессов. С этой целью в монографии [1] А. Г. Жиглинским и В. В. Кучинским была предложена модель реального интерферометра Фабри-Перо, которая позволяет обеспечить учёт неизбежных дефектов как при изготовлении зеркал, так и дефектов юстировки.

Данная модель была де-факто построена исходя из эвристических соображений, а именно: в ней предполагалось, что реальный интерферометр Фабри-Перо может быть заменён на совокупность дифференциально малых интерферометров, каждый из которых обладает своей собственной толщиной [1] (рис. 1).

Уместно подчеркнуть, что разрешающая способность интерферометра Фабри-Перо определяется именно расстоянием между плоскопараллельными зеркалами, обладающими высоким значением коэффициента отражения. Соответственно, все дефекты, которые возникают при юстировке или изготовлении зеркал, действительно можно рассматривать через вариации расстояния между зеркалами. Однако ни в цитируемой монографии, ни далее модель, предложенная А. Г. Жиглинским и В. В. Кучинским, не получила корректного обоснования, несмотря на то, что она представляется достаточно естественной для параксиального приближения.

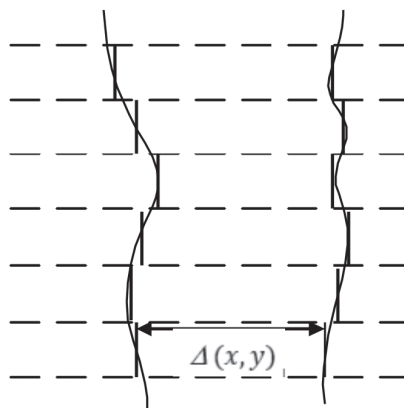


Рисунок 1 – Модель Жиглинского-Кучинского реального интерферометра Фабри-Перо

Следует также подчеркнуть, что в цитируемой монографии [1] одна из глав целиком и полностью посвящена анализу реального интерферометра Фабри-Перо, в котором имеет место только дефект юстировки, то есть предполагается, что зеркала расположены друг от друга под малым углом. Внимание уделяемому вопросу представляется вполне естественным, поскольку добиться идеальной юстировки не удаётся никогда, что особенно существенно, когда речь идёт о задачах спектроскопии высокой разрешающей силы.

Очевидно, что задача об описании реального интерферометра Фабри-Перо с дефектами юстировки такого рода во многом аналогична задаче о дифракции излучения на тонких клиньях, которые рассматриваются, в том числе, и в многочисленных классических руководствах по электродинамике сплошных сред, например, известном учебнике Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [2].

Однако необходимость отдельного решения задачи об описании интерферометра Фабри-Перо все же существует. Она связана с тем, что если рассматривается конкретный физический объект, скажем, неоднородная оптическая среда, имеющая клиновидную форму, то тогда, в соответствии с тем, как это делается в [2], на её границах можно поставить граничные условия в той форме, в которой они обычно используются в задачах математической физики. Существенно, что эти граничные условия ничего не говорят непосредственно о значениях коэффициентов отражения и пропускания. Иначе говоря, этим способом нельзя описать произвольное зеркало, можно описать только процесс отражения, характерный именно для такой границы раздела сред. Ввести произвольное значение коэффициентов отражения и пропускания, что требуется для описания реального интерферометра Фабри-Перо, в такой постановке задачи затруднительно. Именно поэтому для её решения целесообразно использовать аппарат Фурье-оптики. Учитывая, что речь здесь идёт о задачах, в которых, вообще говоря, необязательно выполняется условие изопланарности, имеет смысл применять аппарат обобщённой Фурье-оптики. Ниже показывается, что использование аппарата обобщённой Фурье-оптики действительно позволяет дать последовательное обоснование модели А. Г. Жиглинского и В. В. Кучинского.

Решение данной задачи представляет также методический интерес с точки зрения демонстрации возможностей обобщённой Фурье-оптики [3, 4] и матричного метода описания многолучевой интерференции, предложенного в [5].

Для общности изложения будем рассматривать клиновидную систему, образованную двумя зеркалами (рис. 2). Реальный интерферометр Фабри-Перо, очевидно, отвечает случаю, когда рассматривается фрагмент такой системы.

Матричное преобразование излучения, выполняемое плоским зеркалом, можно записать в виде:

$$A_1^-(\cos(\theta_2)) = r_1 A_1^+(\cos(\theta_1)) + t A_2^-(\cos(\theta_2)), \quad (1)$$

$$A_2^+(\cos(\theta_1)) = r_2 A_2^-(\cos(\theta_2)) + t A_1^+(\cos(\theta_1)), \quad (2)$$

где  $A_1^-(\alpha)$  – спектр излучения, развивающегося слева от элемента 1 (правое зеркало клиновидной системы на рис. 2); для данного элемента этот спектр соответствует излучению, отражённому от внутренней поверхности зеркала 1, и изучению, про-

шедшему через 1 справа налево;  $A_1^+(\alpha)$  – спектр излучения, также развивающегося слева от элемента 1, но распространяющегося в обратном направлении; для данного элемента этот спектр соответствует падающему излучению;  $A_2^+(\alpha)$  – спектр излучения, развивающегося справа от элемента 1, он сформулирован волнами, прошедшими через зеркало 1 слева направо, и волнами, отражёнными от зеркала 1 при падении излучения справа;  $A_2^-(\alpha)$  – спектр излучения, попадающего на элемент 1 справа;  $r_{1,2}$  и  $t$  – амплитудные коэффициенты отражения и пропускания.

Соотношения (1) и (2) имеют тот же смысл, что и использованные в [5], но они учитывают изменение направления распространения спектральной компоненты относительно координатной оси при наклонном расположении зеркала.

При записи соотношений (1) и (2) учтено, что в рассматриваемом случае допустимо считать, что спектр пространственных частот зависит только от одной переменной  $\alpha$  и, следовательно, распределение поля в плоскости  $Oxy$  даётся интегралом вида:

$$u(x) = \int_{\alpha} A(\alpha) \exp(ik\alpha x) d\alpha \tag{3}$$

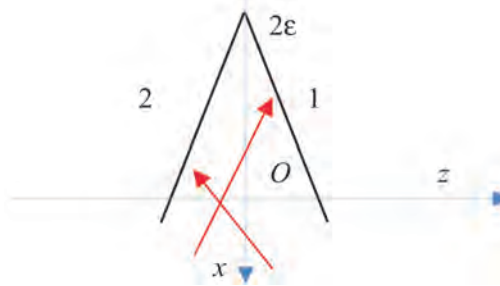


Рисунок 2 – Клиновидная система, образованная двумя зеркалами

Для конкретизации записей (1) и (2) выберем систему координат  $Oxyz$ , как показано на рис. 3 (считается, что ось  $Oy$  перпендикулярна к плоскости чертежа). Начало координат расположим в плоскости зеркала, предполагая, что при преобразовании поворота к системе координат  $Ox'y'z'$  плоскость зеркала будет совпадать с плоскостью  $Ox'y'$ .

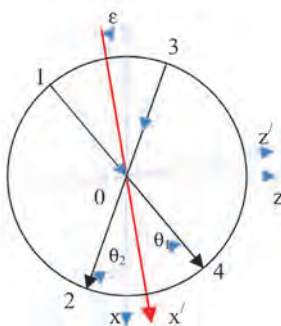


Рисунок 3 – Выбор систем координат и направлений отсчета углов

Подчёркиваем, что рассматривается случай цилиндрической симметрии, т. е. предполагается, что все распределения полей, фигурирующие в задаче, не зависят от переменной  $u$ . (Такое рассмотрение можно вести без ограничения общности, что достигается адекватным выбором системы координат.)

В соответствии с общепринятыми правилами примем за положительное направление отсчёта углов направление против часовой стрелки. Тогда из очевидных соображений можно написать следующее равенство:

$$(\theta_1 - \varepsilon) = -(\theta_2 - \varepsilon). \quad (4)$$

Откуда вытекают следующие соотношения:

$$\theta_2 = -\theta_1 + 2\varepsilon, \quad (5)$$

$$\theta_1 = -\theta_2 + 2\varepsilon. \quad (6)$$

При всей простоте записей (5) и (6) именно они описывают процесс отражения излучения от плоского зеркала в рамках обобщённой Фурье-оптики. Напомним, что в обобщённой Фурье-оптике рассматривается полный спектр волновых возмущений, а распределение поля трактуется как суперпозиция плоских монохроматических волн, распространяющихся во всевозможных направлениях, что и выражает формула (3). При условии, что положение начала отсчёта в пространстве остаётся неизменным, отражение от плоского зеркала описывается только через изменение направления распространения плоской волны. Следовательно, для последовательного описания процесса отражения от плоского зеркала достаточно указать только характер преобразования векторов  $\vec{\xi}$  в записи [4, 5]:

$$u(\vec{r}) = \int_{\Sigma} A(\vec{\xi}) \exp(ik\vec{\xi}\vec{r}) d\Sigma. \quad (7)$$

Такое преобразование при рассмотрении случая цилиндрической симметрии сводится к использованию формул (2) и (3). А именно для данного случая при сделанном выборе отсчёта углов имеет место:

$$\vec{\xi} = (\alpha, 0, \gamma) = (\cos\theta, 0, \sin\theta), \quad (8)$$

что и приводит к формуле (3).

Используя связь (5) и (6) между углами падения и отражения, соотношения (1) и (2) можно переписать в виде, явно учитывающем преобразования углов:

$$A_1^-(\cos(\varphi)) = r_1 A_1^+(\cos(\varphi - 2\varepsilon)) + t A_2^-(\cos(\varphi)), \quad (9)$$

$$A_2^+(\cos(\varphi)) = r_2 A_2^-(\cos(\varphi + 2\varepsilon)) + t A_1^+(\cos(\varphi)). \quad (10)$$

Аналогичные соотношения для зеркала 2 (рис. 2) получаются заменой знака угла  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon \rightarrow -\varepsilon \quad (11)$$

$$A_3^-(\cos(\varphi)) = r_1 A_3^+(\cos(\varphi + 2\varepsilon)) + t A_1^-(\cos(\varphi)), \quad (12)$$

$$A_1^+(\cos(\varphi)) = r_2 A_1^-(\cos(\varphi - 2\varepsilon)) + t A_3^+(\cos(\varphi)). \quad (13)$$

Рассматриваемая система описывается шестью ветвями спектра, две из них (относящиеся к излучению, падающему на неё «снаружи» справа и слева, т. е.  $A_2^-$  и  $A_3^+$ ), де-факто представляют собой граничные условия. Уравнения (10) и (12) позволяют установить ветви спектра изучения, выходящего из рассматриваемого элемента по ветвям спектра, развивающегося между зеркалами. То есть собственно интерференция излучения описывается двумя оставшимися уравнениями (9) и (13).

Учитывая, что система является линейной, можно рассматривать вклады от излучения, попадающего на неё справа и слева, отдельно, т. е., например, предположить, что  $A_2^- = 0$ . Тогда описание интерференции сводится к решению следующих уравнений:

$$A_1^-(\cos(\varphi)) = r_1 A_1^+(\cos(\varphi - 2\varepsilon)), \quad (14)$$

$$A_1^+(\cos(\varphi)) = r_2 A_1^-(\cos(\varphi - 2\varepsilon)) + t A_3^+(\cos(\varphi)). \quad (15)$$

Подставляя (14) в (15), имеем:

$$A_1^+(\cos(\varphi)) = r_1 r_2 A_1^+(\cos(\varphi - 4\varepsilon)) + t A_3^+(\cos(\varphi)). \quad (16)$$

Подчеркиваем, что при использовании парных соотношений (9) – (10) и (12) – (13) следует учитывать диапазон изменения спектров пространственных частот (рис. 4). Строго говоря, эти записи верны для неперекрывающихся диапазонов (они соответствуют дугам АВ и CD на рис. 4), однако пользоваться ими можно без существенных оговорок, так как излучение, попавшее в диапазон углов, отвечающих дуге AD, уже не отражается от зеркал рассматриваемой системы.

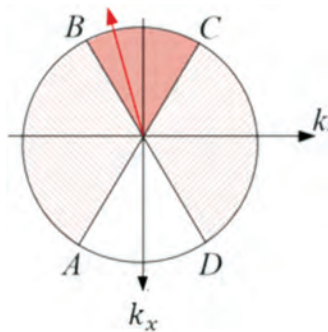


Рисунок 4 – Выделяемые диапазоны спектра пространственных частот

Уравнение (16) можно рассматривать как интегральное уравнение с образным ядром и решать его методом итераций.

Имеем:

$$A_1^+(\cos(\varphi)) = \sum_{n=0}^{\infty} t(r_1 r_2)^n A_3^+(\cos(\varphi - 4n\varepsilon)). \quad (17)$$

Полученная формула (17), как и ряд, получаемый при выводе формулы Эйри, отвечает суммированию вкладов от излучения на многократных проходах системы. Отличие состоит в том, что формула (17) получена в рамках обобщённой Фурье-оптики, т. е. в ней рассматриваются спектральные компоненты при неизменном положении начала отсчёта. Поэтому в членах ряда (17) нет явного учёта набега фазы, он фигурирует неявно через изменение направления распространения волны в пространстве.

Покажем это, перейдя от спектра пространственных частот к распределению поля в рассматриваемой плоскости. Непосредственно применяя (3), имеем:

$$u(x) = A_3^+ \sum_{n=0}^{\infty} t(r_1 r_2)^n \exp(ikx \cos(\varphi_0 - 4n\varepsilon)), \quad (18)$$

где  $A_{30}^+$  – амплитуда падающей плоской волны,  $\varphi_0$  – её угол, отсчитываемый в избранной системе координат.

В задачах об описании интерферометра Фабри-Перо, как правило, используется угол падения, связанный с рассматриваемым углом  $\varphi_0$  как:

$$\varphi_0 = \phi_0 + \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Переходя к углу  $\phi_0$ , имеем:

$$u(x) = A_3^+ \sum_{n=0}^{\infty} t(r_1 r_2)^n \exp(-ikx \sin(\phi_0 - 4n\varepsilon)). \quad (20)$$

Формула (20) отличается от формулы (18) тем, что в неё входит не косинус, а синус, что, разумеется, не меняет характера спектра, но позволяет использовать естественное для описания реального интерферометра Фабри-Перо приближение. А именно при малых углах можно воспользоваться разложением синуса в ряд Тейлора (как это обычно и делается при переходе к параксиальному приближению):

$$\sin(\phi_0 - 4n\varepsilon) \approx \phi_0 - 4n\varepsilon \quad (21)$$

и записать:

$$u(x) = A_{30}^+ \sum_{n=0}^{\infty} t(r_1 r_2)^n \exp(-ikx(\phi_0 - 4n\varepsilon)). \quad (22)$$

Из очевидных геометрических соображений (рис. 2) вытекает следующая связь между оптической толщиной интерферометра в точке и значением переменной:

$$\Delta(x) = x \sin(2\varepsilon) \approx 2x\varepsilon. \quad (23)$$

Из формулы (23) непосредственно вытекает, что соотношение (22) может быть переписано в терминах локальной оптической толщины следующим образом:

$$u(x) = A_{30}^+ \sum_{n=0}^{\infty} t(r_1 r_2)^n \exp(-ikx\phi_0) \exp(-ik2n\Delta(x)). \quad (24)$$



Формула (24) представляет собой ту же геометрическую прогрессию, которая и приводит к формуле Эйри с тем отличием, что в неё входит локальная оптическая толщина интерферометра. Можно записать формулу:

$$u(x) \approx \frac{A_{30}^+ t \exp(-ikx\phi_0)}{1 - r_1 r_2 \exp(-ik2\Delta(x))}, \quad (25)$$

которая при переходе от амплитуд к интенсивностям даёт в точности выражение, отвечающее модели Жиглинского-Кучинского.

Таким образом, обобщённая Фурье-оптика позволяет очень просто и эффективно описывать интерференцию в клиновидных структурах, образованных двумя наклонно расположенными зеркалами. Предельным случаем здесь является формула, вытекающая из модели А. Г. Жиглинского и В. В. Кучинского. Разумеется, для решения такого рода задач в настоящее время существует достаточно много методик, однако с методической точки зрения полученный результат имеет значение прежде всего потому, что он является следующим шагом, обеспечивающим возможность использования матричного описания многолучевой интерференции. Иными словами, полученный результат, в том числе создаёт базу для описания интерференции в клиновидных структурах, где имеется несколько отражающих покрытий.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Жиглинский А.Г., Кучинский В.В. Реальный интерферометр Фабри-Перо. – Ленинград: Машиностроение, 1983. – 176 с.
- 2 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред. 2-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 621 с.
- 3 Suleimenov, I. E., Tolmachev, Y. A. On the possibility of generalization of Fourier optics // *Optics and spectroscopy*. – 1994. – № 76. – P. 893-898.
- 4 Suleimenov I.E., Tolmachev Y.A. Generalized Fourier optics. I. Reflection of monochromatic radiation from mirrors of arbitrary shape // *Optics and spectroscopy*. – 1994. – № 77(1). – P. 119-124.
- 5 Suleimenov I.E., Kuranov A.L. Multibeam interference in systems with ideal translational invariance // *Optics and Spectroscopy*. – 1997. – № 82. P. 445-450.