УДК 517.9 МС
https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.82

Е. Н. БАЯНДИЕВ*

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан. e-mail: erikn87@mail.ru

ОБ ОПЕРАТОРЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(R)$

В работе изучен вопрос о существовании резольвенты, а также после замыкания в пространстве $L_2(R)$ исследуется гладкость функций из области определения оператора неограниченного типа в неограниченной области с сильно растущими в бесконечности коэффициентами.

***Ключевые слова**: оператор Штурма-Лиувилля, замыкание оператора, обратный оператор, резольвента.*

1. Введение. Формулировка результата. В работе в пространстве $L_2(R)$ изучается оператор Штурма-Лиувилля с отрицательным параметрам

$$\left(l_t+\lambda I\right)u=-u''\left(y\right)+\left(-t^2+itb\left(y\right)+q\left(y\right)+\lambda\right) \text{ и } (y) \tag{1.1}$$

первоначально определенный на множестве $C_0^\infty\left(R\right)$, где $-\infty<t<\infty$, $\lambda\geq 0$, $R=\left(-\infty,\infty\right)$ $C_0^\infty\left(R\right)$, - множество сколь угодно раз дифференцируемых функций.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $b\left(y\right)$, $q\left(y\right)$ удовлетворяют условию:

$i)$ $\left|b\left(y\right)\right|\geq\delta_0>0,\ q\left(y\right)\geq\delta>0$ непрерывные функции в R.

Оператор $l_t+\lambda I$ допускает замыкание в пространстве $L_2(R)$, который обозначим также через $L_2\left(R^2\right)$.

Оператор l_t, нетрудно убедиться, естественным образом возникает при изучении сингулярных дифференциальных операторов гиперболического типа в пространстве $L_2\left(R^2\right)$.

Как известно при $t = 0$ существование и компактность резольвенты изучены в работах Молчанова А.М. [1], Титчмарша Э.Ч. [2], Като Т. [3], Костюченко А.Г. [4], Мазьи В.Г. [5], Отелбаева М. [6-7], Гасымова М.Г. [8], Бойматова К.Х. [9-10] и др.

* Адрес для переписки. E-mail: erikn87@mail.ru

Далее, при $|t| \to \infty$ получим, что $-t^2 \to -\infty$.

Следовательно, для оператора (1.1) возникает совершенно иная ситуация по сравнению с оператором l_0.

Как известно, методы отработанные для оператора l_0 оказываются малоприспособленными для оператора l_t при $t \neq 0$.

Отсюда следует, что для оператора Штурма-Лиувилля с отрицательным параметром, естественно исследовать вопрос о существовании резольвенты при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Теорема 1.1. Пусть выполнено условие *i*). Тогда при $\lambda \geq 0$ существует непрерывный обратный оператор $(l_t + \lambda I)^{-1}$, определенный в $L_2(R)$.

2. Подготовительные леммы и оценки.

Рассмотрим оператор

$$(l_t + \lambda I)u = -u''(y) + \left(-t^2 + itb(y) + q(y) + \lambda\right)u$$

первоначально определенный на множестве $C_0^\infty(R)$.

Нетрудно проверить, что оператор $l_t + \lambda I$ допускает замыкание в пространстве $L_2(R)$, которое обозначим также через $l_t + \lambda I$.

Лемма 2.1. Пусть выполнено условие *i*). Тогда при $\lambda \geq 0$ для всех $u \in D(l_t)$ справедлива оценка:

$$A(\delta) \cdot \left\| (l_t + \lambda I)u \right\|_2 \geq (\delta + \lambda)^{1/2} \|u\|_2 , \tag{2.1}$$

где $\|\cdot\|_2$ – норма в пространстве $L_2(R)$, $A(\delta) > 0$.

Доказательство. Лемма 2.1 доказывается преобразованием функционалов $< (l_t + \lambda I)u, u >$, $< (l_t + \lambda I)u, -itu >$ и с помщью выкладок, которые использованы при доказательстве леммы 2.1 работы [13].

Возьмем набор $\{\varphi_j\}$ - неотрицательных функций из $C_0^\infty(R)$ таких, что

$$\sum_j \varphi_j^2 \equiv 1,\ \sup p\,\varphi_j \subset \Delta_j,\ \bigcup_{\{j\}} \Delta_j = R ,$$

где $\Delta_j = (j-1,\ j+1),\ j \in Z$.

Продолжим $b(y)$, $q(y)$ из Δ_j на все R так, чтобы их продолжения $b_j(y)$ и $q_j(y)$ были ограниченными и периодическими функциями одного и того же периода.

Обозначим через $l_{t,j,\alpha} + \lambda I$ замыкание оператора

$$(l_{t,j,\alpha} + \lambda I)u = -u''(y) + \left(-t^2 + it\left(b_j(y) + \alpha\right) + q_j(y) + \lambda\right) \cdot u \tag{2.2}$$

определенного на $C_0^\infty(R)$, где знак вещественного числа α совпадает со знаком функции $b(y)$, т.е. $\alpha \cdot b(y) > 0$ при $y \in R$.

Лемма 2.2. Пусть выполнено условие *i*). Тогда при $\lambda \geq 0$ для всех $u \in D\left(l_{t,j,\alpha}\right)$ справедлива оценка в пространстве $L_2(R)$:

$$A(\delta)\cdot\left\|\left(l_{t,j,\alpha}+\lambda I\right)u\right\|_2 \geq (\delta+\lambda)^{1/2}\|u\|_2 ,$$

где $A(\delta)>0$.

Доказательство. Лемма 2.2 доказывается точно так же, как лемма 2.1.

Лемма 2.3. Пусть выполнено условие *i*). Тогда справедлива оценка

$$\left\|\left(l_{t,j,\alpha}+\lambda I\right)u\right\|_2^2 \geq |t|^2\left(\delta_0+|\alpha|\right)\|u\|_2^2 . \tag{2.3}$$

Доказательство. Лемма 2.3 доказывается точно так же, как лемма 1 работы [11], [13].

Лемма 2.4. Оператор $l_{t,j,\alpha}+\lambda I$ при $\lambda \geq 0$ имеет непрерывный обратный оператор $\left(l_{t,j,\alpha}+\lambda I\right)^{-1}$, определенный на всем $L_2(R)$.

Доказательство. Из леммы 2.2 следует, чтобы доказать лемму 2.4, надо показать, что область значений $R\left(l_{t,j,\alpha}+\lambda I\right)$ оператора $l_{t,j,\alpha}+\lambda I$ совпадает с $L_2(R)$. А также из оценки (2.3) следует, что $\left\|\left(l_{t,j,\alpha}+\lambda I\right)^{-1}\right\|_2 \to 0$ при $t\to\infty$.

Далее, повторяя выкладки и рассуждения, которые использованы в работах [12], [13] получаем доказательство леммы 2.4.

Лемма 2.5. Пусть выполнено условие *i*) и $\lambda \geq 0$. Тогда справедливы следующие неравенства:

а) $\left\|\left(l_{t,j,\alpha}+\lambda I\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} \leq \dfrac{c}{(\delta+\lambda)^{1/2}},\ c=c(\delta)>0$;

б) $\left\|\dfrac{d}{dy}\left(l_{t,j,\alpha}+\lambda I\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} \leq \dfrac{c}{(\delta+\lambda)^{1/4}},\ c>0$.

Доказательство. Пользуясь выкладками и рассуждениями, которые использованы при доказательстве леммы 2.3 работы [13] и леммы 1 работы [11], получаем доказательство леммы 2.5.

Лемма 2.6. Пусть выполнено условие *i*) и $\lambda \geq 0$. Тогда для всех $u \in D\left(l_{t,\alpha}+\lambda I\right)$ имеют места неравенства:

$$\left\|\left(l_{0,\alpha}+\lambda I\right)u\right\|_2 \geq (\delta+\lambda)\cdot\|u\|_2 , \tag{2.4}$$

$$\left\|\left(l_{t,\alpha}+\lambda I\right)u\right\|_2 \geq |t|\left(\delta_0+|\alpha|\right)\cdot\|u\|_2 ,\ t\neq 0 \cdot \tag{2.5}$$

Доказательство. Неравенства (2.4) и (2.5) доказываются с помощью функционалов $<\left(l_{0,\alpha}+\lambda I\right)u,u>$, $<\left(l_{t,\alpha}+\lambda I\right)u,u>$, $u\in C_0^\infty(R)$ ·

Положим

$$K_{\lambda,\alpha} f = \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(l_{t,j,\alpha} + \lambda I \right)^{-1} \varphi_j f \ , \tag{2.6}$$

где $f \in L_2(R)$, $\{\varphi_j\}$ - набор функций из $C_0^\infty(R)$ таких, что $\sum_j \varphi_j^2 \equiv 1,\ \sup p\,\varphi_j \subset \Delta_j,\ \bigcup_{\{j\}} \Delta_j = R$, $\Delta_j = (j-1,\ j+1),\ j \in Z$, $l_{t,j,\alpha} + \lambda I$ - оператор из леммы 2.2.

Нетрудно убедиться, что

$$\left(l_{t,\alpha} + \lambda I \right) K_{\lambda,\alpha} f = f - B_{\lambda,\alpha} f \ , \tag{2.7}$$

где

$$B_{\lambda,\alpha} f = \sum_{\{j\}} \varphi_j'' \left(l_{t,j,\alpha} + \lambda I \right)^{-1} f + 2 \sum_{\{j\}} \varphi_j' \frac{d}{dy} \left(l_{t,j,\alpha} + \lambda I \right)^{-1} \varphi_j f \ .$$

Лемма 2.7. Пусть выполнено условие *i*). Тогда найдется число $\lambda_0 > 0$ такое, что $\left\| B_{\lambda,\alpha} \right\|_{2\to 2} < 1$ при всех $\lambda \ge \lambda_0$.

Доказательство. Пусть $f \in C_0^\infty(R)$. Далее, учитывая, что на промежутке $\Delta_j \ (j \in Z)$ отличны от нуля только функции $\varphi_{j-1}, \varphi_j, \varphi_{j+1}$ имеем:

$$\left\| B_{\lambda,\alpha} f \right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j'' \left(l_{t,j,\alpha} + \lambda I \right)^{-1} \varphi_j f + 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j' \frac{d}{dy} \left(l_{t,j,\alpha} + \lambda I \right)^{-1} \varphi_j f \right)^2 dy \le$$

$$\le \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta_j} \left| \sum_{k=j-1}^{j+1} \left(\varphi_k'' \left(l_{t,k,\alpha} + \lambda I \right)^{-1} \varphi_k f + 2 \varphi_k' \frac{d}{dy} \left(l_{t,k,\alpha} + \lambda I \right)^{-1} \varphi_k f \right) \right|^2 dy \ .$$

Отсюда, пользуясь очевидным неравенством $(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$ и оценками а), б) леммы 2.5 получаем, что

$$\left\| B_{\lambda,\alpha} f \right\|_2^2 \le c_0 \cdot \left[\frac{c}{(\delta+\lambda)} + \frac{c}{(\delta+\lambda)^{1/2}} \right] \cdot \| f \|_2^2 \ ,$$

где $c_0 = \max\left\{ \left|\varphi_j'\right|, \left|\varphi_j''\right| \right\}$, а постоянное $c-$ из леммы 2.4.

Отсюда следует, нетрудно найти такое число $\lambda_0 > 0$, что при $\lambda \ge \lambda_0$ $\left\| B_{\lambda,\alpha} \right\|_{2\to 2} < 1$. Лемма 2.7 доказана.

Лемма 2.8. Пусть выполнено условие *i*). Тогда оператор $l_{t,\alpha} + \lambda I$ при $\lambda \ge \lambda_0 > 0$ ограниченно обратим, причем для обратного оператора $\left(l_{t,\alpha} + \lambda I \right)^{-1}$ выполняется равенство

$$\left(l_{t,\alpha}+\lambda I\right)^{-1}=K_{\lambda,\alpha}\left(E-B_{\lambda,\alpha}f\right)^{-1} \tag{2.8}$$

Доказательство. Доказательство леммы следует из представления (2.7) с учетом лемм 2.6 и 2.7.

Рассмотрим вопрос об обратимости исходного оператора $l_t+\lambda I$. Для этого рассмотрим следующее уравнение:

$$\left(l_t+\lambda I\right)u=-u''+\left(-t^2+itb(y)+q(y)+\lambda\right)u=f(x) \tag{2.9}$$

где, $f(x)\in L_2(R)$.

Определение. Решением уравнения (2.9) назовем функцию $u\in L_2(R)$, для которой существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C_0^{\infty}(R)$ такая, что

$$\left\|u_n-u\right\|_2\to 0,\ \left\|\left(l_t+\lambda I\right)u_n-f\right\|_2\to 0 \ \text{ при } n\to\infty \ .$$

Отсюда видно, что обратный оператор $\left(l_t+\lambda I\right)^{-1}$ совпадает с замыканием в $L_2(R)$ оператора $l_t+\lambda I$, определенного на $C_0^{\infty}(R)$.

Лемма 2.9. Пусть выполнено условие *i*). Тогда оператор $l_t+\lambda I$ при $\lambda\ge\lambda_0>0$ ограниченно обратим, причем для обратного оператора $\left(l_t+\lambda I\right)^{-1}$ выполняется равенство

$$\left(l_t+\lambda I\right)^{-1}f=\left(l_{t,\alpha}+\lambda I\right)^{-1}\left(I-A_{\lambda,\alpha}\right)^{-1}f \ , \tag{2.10}$$

где, $f\in L_2(R),\ \left\|A_{\lambda,\alpha}\right\|_{2\to 2}<1$.

Доказательство. Лемма 2.9 доказывается точно так же, как лемма 3.4 работы [13].

Лемма 2.10. Пусть выполнено условие *i*). и пусть $\lambda\ge 0$. Тогда для всех $u\in D\left(l_t\right)$ справедливы оценки:

$$\left\|\left(l_0+\lambda I\right)u\right\|_2\ge\delta\left\|u\right\|_2 \ ,$$

$$\left\|\left(l_t+\lambda I\right)u\right\|_2\ge|t|\cdot\delta_0\cdot\left\|u\right\|_2,\ t\ne 0 \ .$$

Доказательство. Лемма 2.10 доказывается точно так же, как лемма 2.6.

Следующая лемма известна [15]:

Лемма 2.11. Пусть оператор $l_t+\lambda_0 I\left(\lambda_0>0\right)$ ограниченно обратим в $L_2(R)$ и при $\lambda\in\left[0,\lambda_0\right]$ для всех $u\in D\left(l_t+\lambda I\right)$ выполнена оценка

$$\left\|\left(l_t+\lambda I\right)u\right\|_2\ge c\cdot\left\|u\right\|_2 \ ,$$

$c>0$ - постоянное число.

Тогда оператор $l_t: L_2(R) \to L_2(R)$ также ограниченно обратим.

Из лемм 2.9-2.11 легко выводится доказательство теоремы 1.1.

ЛИТЕРАТУРА

1 Молчанова А.М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка. // Труды Московского математическогообщества. – 1953. – Т.2. – С. 169-200. [Molchanova A.M. Ob usloviyakh diskretnosti spektra samosopryazhennykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka. // Trudy Moskovskogo matematicheskogoobshchestva. – 1953. – T.2. – s. 169-200.]

2 Титчмарш Э.Ч. Теория функций. М.: Наука, 1980. [Titchmarsh E.CH. Teoriya funktsiy. M.: Nauka, 1980.]

3 Като Т. Теория возмущений линейных операторов Москва, Мир, 1972. 740с. [Kato T. Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov Moskva, Mir, 1972. s.740]

4 Костюченко А.Г. Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов // Доклады АН СССCР. – 1966. – Т.168. №1. – С.21-24. [Kostyuchenko A.G. Raspredeleniye sobstvennykh znacheniy dlya singulyarnykh differentsial'nykh operatorov // Doklady AN SSSSR. – 1966. – T.168. №1. s.21-24.]

5 Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Издательство Ленинградского университета. 1985. [Maz'ya V.G. Prostranstva S.L. Soboleva. L.: Izdatel'stvo Leningradskogo universiteta. 1985.]

6 Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов. // Доклады АН СССР, 1977, Т. 234, №3. – С.540-543. [Otelbayev M. O razdelimosti ellipticheskikh operatorov. // Doklady AN SSSR, 1977, T. 234, №3. – s.540-543.]

7 Otelbaev M. Coercive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n. (Russian) (studies in the theory of differentiable functions of several varibles and its applications. IX. Trudi Mat. Inst. Steklov. 161 (1983) p. 195-217).

8 Гасымов М. Г. Спектральный анализ одного класса несопряженных дифференциальных операторов в частных производных с периодическими коэффициентами. Докл. АН СССР. 288:3 (1986). с. 528–530. [Gasymov M. G. Spektral'nyy analiz odnogo klassa nesopryazhennykh differentsial'nykh operatorov v chastnykh proizvodnykh s periodicheskimi koeffitsiyentami. Dokl. AN SSSR. 288:3 (1986). c. 528–530.]

9 Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды МИАН СССР. –Т. 170. с. 37-76. [Boymatov K.KH. Teoremy razdelimosti, vesovyye prostranstva i ikh prilozheniya // Trudy MIAN SSSR. –T. 170. s. 37-76.]

10 Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка // Доклады АН СССР.-1988.-Т.301, №5. с.1033-1036. [Boymatov K.KH. Koertsitivnyye otsenki i razdelimost' dlya elipticheskikh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka // Doklady AN SSSR.-1988.-T.301, №5. s.1033-1036.]

11 Muratbekov M.B., Bayandyiev Ye.N. Existence and maximal regularity of solutions in $L_2(R^2)$ for a hyperbolic type differential equation with quickly growing coefficients. //EURASIAN MATHEMATICAL JOURNAL. ISSN 2077-9879.Volume 11. Number 1 (2020). 95 – 100.

12 Muratbekov M., Otelbaev M. On the existence of a resolvent and separability for a class of singular hyperbolic type differential operators on an unbounded domain //EURASIAN MATHEMATICAL JOURNAL. volume 7, Number 1(2016). p.p.50-67.

13 Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. Sturm-Liouville operator with a parameter and its usaqe to spectrum research of some differential operators //complex variables and elliptic equations, 2019, vol.64, №9, p.p.1457-1476.

14 Рид М. Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. Из-во «Мир», Москва, 1978. [Rid M. Saymon B. Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki. Tom2. Garmonicheskiy analiz. Samosopryazhennost'. Iz-vo «Mir», Moskva, 1978]

15 Akhieser N.I., Glasman I.M. Theory of Linear operators in Hilbert space. Moscow: Nauka, 1966. Russian (Originally Published: New York (№4): F.Unqar Pub. CO.,1961-1963).

16 Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. Estimates of the spectrum for a class of mixed type operators //Differential Equations, 2007, vol.43, №1, p.p.143-146.

Е. Н. БАЯНДИЕВ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,
Нұр-Сұлтан, Қазақстан

$L_2(R)$ КЕҢІСТІГІНДЕ ТЕРІС ПАРАМЕТРЛІ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЬ ОПЕРАТОРЫ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста резольвентаның бар екендігі туралы мәселе қарастылған, сонымен қатар $L_2(R)$ кеңістігінде операторды тұйықтағаннан кейін, коэффициенттері шексіздікке ұмтылғанда жылдам өсетін шенелмеген облыста анықталған функциялардың тегістігі зерттелген.

Түйін сөздер: *Штурм-Лиувилль операторы, оператордың тұйықталуы, кері оператор, резольвента.*

YE. N. BAYANDIYEV

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan

ABOUT THE STORM-LIOUVILLE OPERATOR WITH NEGATIVE PARAMETER IN SPACE $L_2(R)$

In this paper, the question of the existence of a resolvent is studied, and also, after closure in space, the smoothness of functions from the domain of an operator of unbounded type in an unbounded domain with coefficients strongly increasing at infinity is investigated.

Key words: *Sturm-Liouville operator, operator closure, inverse operator, resolvent.*