УДК 519.711
https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.84

*Л. Х. ЖУНУСОВА**

Казахский национальный педагогический университет им.Абая, г. Алматы, Казахстан
e-mail:khafizovna_66@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРОМ

Ряд проблем биологии, экологии и химии может быть сведен к рассмотрению n-мерных нелинейных, в частности билинейных систем дифференциальных уравнений, содержащий параметр. Для таких систем представляет интерес нахождение решения от влияния параметра. Сложные вычислительные процессы, возникающие при моделировании вышеуказанных систем, дают возможность оставаться исследованиям по данной тематике всегда актуальными. В данной работе рассмотрена билинейная система дифференциальных уравнений. Приведен численный расчет решения данной системы.

***Ключевые слова*: *билинейная система, дифференциальные уравнения, ферментативная реакция, динамика системы, параметр системы, аппроксимация*.**

Моделирование – единственный из ключевых способов познания – считается конфигурацией отображения реальности и заключается в выяснения тех или иных свойств реальных объектов, предметов и явлений с помощью других объектов, процессов, явлений либо в виде изображений, совокупности уравнений, алгоритмов, а также программ. Математическая модель - это приближенное представление какого-либо класса явлений реального мира, выраженное с помощью системы математических формул и соотношений, приближенно в абстрактной форме описывающих исследуемую процедуру.

В современном мире информация принимается как основной источник развития исследуемого процесса. Из этого следует, что построенная модель должна содержать определенную информацию об исследуемом процессе.

Модель предметной области определяется целью исследования, некоторым образом ссужающей взгляд на предметную область. Цель исследования является основным инструментом, позволяющим точно очертить границы предметной области, определить целесообразность рассмотрения той или иной характеристики предметной области для описания ее состояния. Кроме того, формулировка цели исследования определяет, какие методы анализа применять в дальнейшем для ее достижения. Таким образом, средства анализа информации определяются, с одной стороны, возможностями модели предметной области, а с другой стороны – полнотой данных.

В общем случае при моделировании многих биологических явлений в основном приходится полагать близкие к истине величины, ферментативно-кинетические механизмы для той или иной части исследуемого процесса.

Одна из наиболее простых и в то же время основных ферментативных реакций, часто встречающихся в практической реальности, – это реакция, в который субстрат необратимо превращается в продукт одним ферментом.

Для нелинейной системы, описываемой дифференциальным уравнением, исследована задача модельного управления синтезом фермента.

---

* Адрес для переписки. E-mail: khafizovna_66@mail.ru

Активные организмы предполагают собою крайне непростые концепции, более зна-чимыми химическими составляющими которых являются, по-видимому, белки –органические вещества с большой молекулярной массой, величины порядка 10^5 довольно обычны.

В частности, белки являются главными элементами крови, кожи, мышечных волокон и т.д.; также могут представлять собой белки некоторые гормоны и антитела.

В красных кровяных клетках перенос почти всего кислорода осуществляется белком гемоглобина. Почти все без исключения химические реакции в организмах протекают с участием белков в качестве катализаторов, т.е. веществ, которые либо ускоряют реакцию, либо необходимы для ее протекания, но не входят в завершающий продукт реакции [1],[2]. Белки-катализаторы называются ферментами. Ферменты в роли катализаторов чрезвычайно эффективны - они работают в очень низких концентрациях и при обычных температурах и давлениях. Ферменты реагируют весьма избирательно с определенными соединениями, называемыми субстратами, иначе говоря, ферменты обладают высокой специфичностью. Микрочастица, которая связывается с ферментом, именуется лигандом; этот термин применяется наряду с термином «субстрат». Фермент - это органическое соединение, обычно белок, которое усиливает или является причиной каталитического действия изменения субстрата, к которому оно специфично. Ферменты могут принимать участие в реакции как активаторы или как ингибиторы. Ферментативная кинетика – это, по существу, исследование скоростей ферментативных реакций и условий, влияющих на них. Данная проблема довольно широко исследована в трудах Лайдлера (1958) и Диксона и Уэбба (1964), Уонта (1975). Начальные исследования ферментативной кинетики с применением строгих математических формул и закономерностей приведены также у Робиноу (1975). Широкое признание получила теория Михаэлиса-Ментена. Они (1973) основывали свой анализ на предположении, что свободный фермент и субстрат сначала образуют в ходе обратимой реакции ферментно-субстратный комплекс, который в свою очередь необратимо распадается, образуя вновь свободный фермент и субстрат [2]. Данную реакцию в виде схемы можно записать так:

$$S + E \Longleftrightarrow SE \Longrightarrow P + E \qquad (1)$$

где S - субстрат; E - фермент; SE - ферментно-субстратный комплекс; P - продукт; K - константа скорости реакции, и их размерность определяется формой реакции. Математическая модель этой реакции имеет вид :

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 se + k_{-1} c \ ,$$

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 se + (k_{-1} + k_2) c \ ,$$

$$\frac{ds}{dt} = k_1 se - (k_{-1} + k_2) c \ ,$$

$$\frac{dp}{dt} = k_2 c \ .$$

Естественные первоначальные требования модели отвечают тому, что в начальный момент концентрации субстрата S и фермента E заданы и не равны нулю, а концентрация комплекса C и продукта P равны нулю, т.е.

$$s(0) = s_0 > 0, e(0) = e_0 > 0, c(0) = p(0) = 0.$$

Сделаем определенные манипуляции, так называемые преобразования для получения соотношения для S и C в виде уравнении, и их будет два уравнения:

$$\frac{ds}{dt} = -k_{-1} l_0 se + (k_1 s + k_{-1}) c \ , \tag{2}$$

$$\frac{dc}{dt} = k_1 l_0 se - (k_1 s + k_{-1} + k_2) c \ . \tag{3}$$

Практически все без исключения реалистические математические модели биологических явлений приводят к математическим уравнениям, которые никак не позволяют очевидных решений в явном виде.

Согласно этому фактору, для того чтобы получить и математически и биологически правильные приближения, должна быть выяснена относительная величина различных составляющих в уравнениях. Такой исход возможно получить с уверенностью только в том случае, если все величины приведены к безразмерному виду.

Введение безразмерных величин осуществляется таким образом:

$$\tau = k_1 e_0 t, \lambda = k_2 / k_1 s_0, x(\tau) = \frac{s(t)}{s_0}, y(\tau) = \frac{c(t)}{l_0}, k = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1 s_0}, \varepsilon = \frac{l_0}{s_0} \ ,$$

Введенные обозначения подставляем в дифференциальные уравнения (2)-(3) и при этом если учесть начальные условия, то получим безразмерную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{d\tau} = -x + (x + k + \lambda) y \ , \tag{4}$$

$$\in \frac{y}{\tau} = x - (x + k) y \ , \tag{5}$$

$$x(0) = 1, \ y(0) = 1$$

Во многих случаях биологических процессов соотношение начальных концентраций фермента и субстрата очень мало

$$\varepsilon = e_0 / s_0$$

и система (4)-(5) представляет задачу с сингулярным возмущением. Наиболее абсолютное, а также доступное введение в теорию сингулярных возмущений применительно к обыкновенным уравнениям приведены в книге О'Малея (1974), весьма оригинальный подход можно найти у Марри (1974), У Лима и Сиджела (1974) также имеются некоторые соображения на эту проблему. Использование уравнения в частных производных в описании биологических явлений можно найти в работах Коула (1968), Ван-Дайка (1975), Найфе (1973). Рассмотренная нами система уравнений (4)-(5) принадлежит к общему классу сингулярно возмущенных систем, которым посвящены работы Тихонова А.Н. (1952), Васильевой А.Б. а также данная система рассмотрена в работах [3],[4],[5] с точки зрения оптимального управления поведением системы.

Решение дифференциальных уравнений (4)-(5) могут быть достаточно подсчитаны. Их характер может быть выяснен из соображений: S монотонно убывает от s_0 до нуля, что касается C, то C возрастает до максимума, а затем вновь убывает до нуля. Полученную модель (4)-(5) для концентрации компонентов решаем с использованием метода Рунга-Кутта. Графическое изображение получено с использованием программного интерфейса MATLAB. Это система содержит операторы построения графиков в декартовой и полярной системах координат, трехмерных поверхностей. Также система поддерживает решение дифференциальных и разностных уравнений. В статье [5] задачи (4)-(5) исследовались на оптимальную стабилизацию управления системы на конечном отрезке. В этом случае был применен метод, который описан в [6]. В данной работе был предложен алгоритм нахождения решения задачи и установлены условия существования оптимального управления системы. В настоящей работе предлагается задача с параметром $\in$. Особенность этих задач таковы, что приходится все время производить несложные, но последовательные рассуждения. На рисунке 1 показан вид решения, когда параметр $\in = 1$.

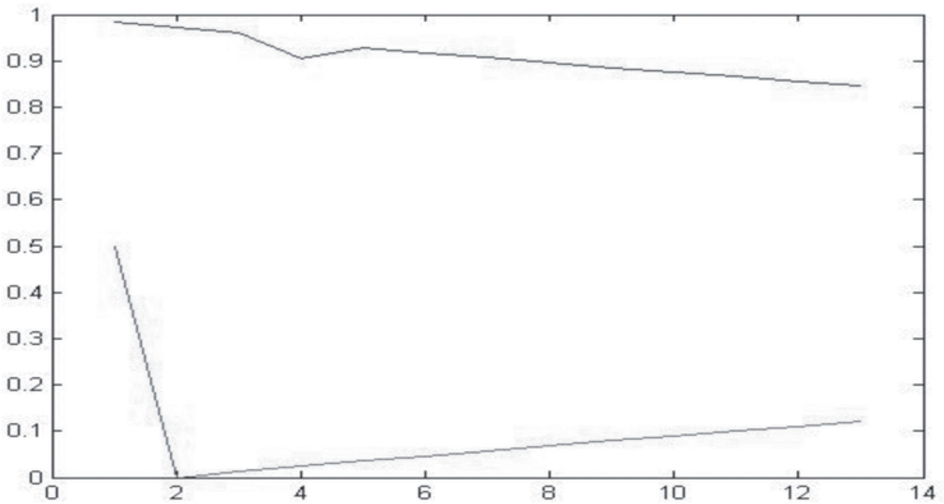

Рисунок 1 – Случай $\in = 1$.

Следующий рисунок 2 демонстрирует изменения поведения решения системы, когда значение параметра увеличено на единицу.

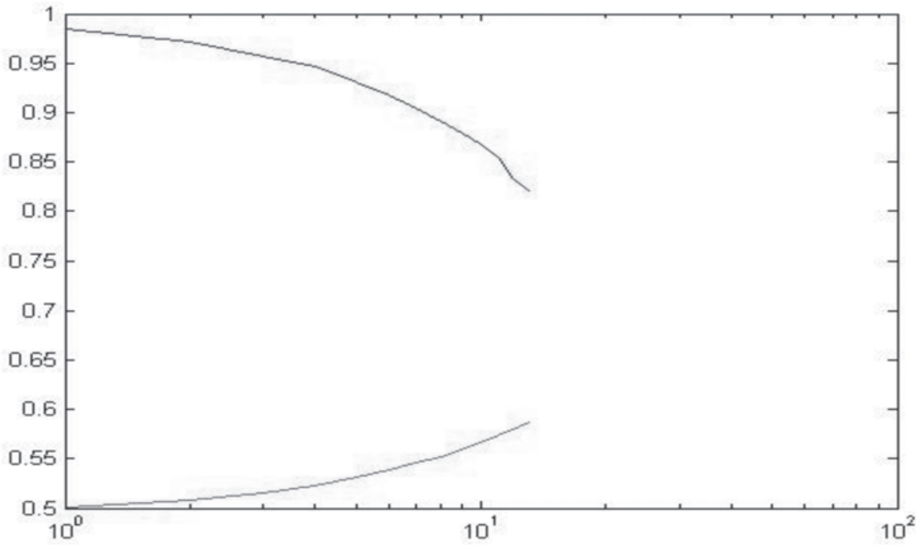

Рисунок 2 – Случай ∈ = 2.

На рисунке 3 показано поведение системы, когда значение параметра уменьшено.

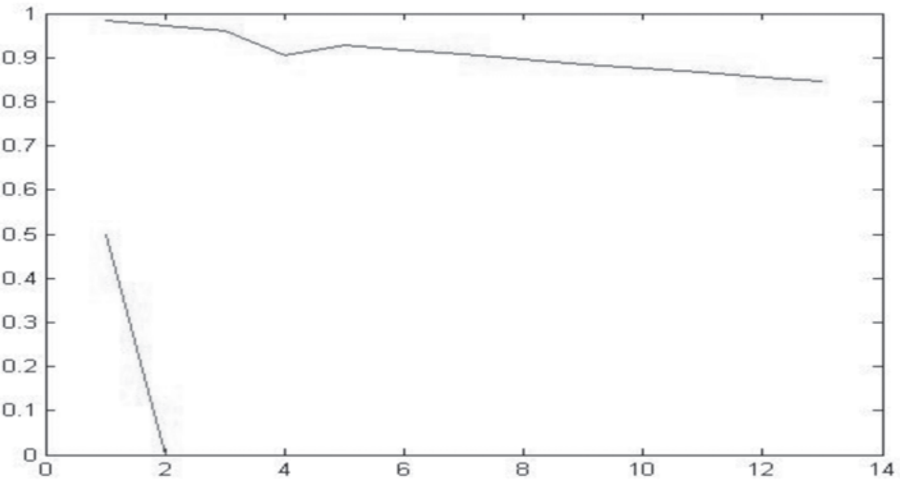

Рисунок 3 – Случай ∈ = 0,3.

Анализируя поведение графических представлений, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Пусть дана нам система (4)-(5) с начальными условиями, и она будет иметь сходящее решение при значении параметра .

Таким образом, мы рассмотрели билинейную систему с параметром, показывающим изменение ферментно-субстрактного комплекса. Эта математическая модель дает возможность проводить численные эксперименты в широком диапазоне изменения переменных. Полученные с помощью модели графики наглядно показывают изменение реакции ферментно-субстрактного комплекса. На сегодня численные методы являются мощным математическим средством решения многих научно-технических проблем. Это связано как с невозможностью в большинстве случаев получить точное аналитическое решение, так и со стремительным развитием компьютерных технологий. В данное время существуют различные численные стандартные программы и объектно-ориентированные пакеты прикладных программ. Но все же научно-инженерным исследователям важно понимать сущность основных численных методов и алгоритмов, так как интерпретация результатов расчетов требует специальных знаний особенностей применяемых методов.

В течение времени, прошедшего с момента появления дифференциальных уравнений в математике и физике, разработке аналитических методов уделялось много внимания. Они сыграли важную роль в изучении дифференциальных уравнений, позволили рассмотреть множество прикладных задач. В специальных литературных источниках можно найти класс различных типов уравнений, которые интегрируются в явном виде, они все имеют свой способ решения. Однако в большинстве случаев не удается получить явную формулу для решения. В этих условиях особенно важное значение приобретают численные методы. Численные методы являются универсальными и к тому же дают ответ в виде числовой таблицы, т.е. в форме, удобной для практического применения.

ЛИТЕРАТУРА

1 Д. Марии. Нелинейные дифференциальные уравнения. Модельная sv биологии. М.: Мир,1983 [D. Mary. Nonlinear differential equations Model sv biology. M .: Mir 1983]

2 Марчук Г. Математические модели в иммонологии. М.: Наука.1991.[Marchuk G. Mathematical models in immonology. Moscow: Nauka. 1991]

3 Костомаров Д.П.,Корухова Л.С. Манжелей С.Г. Программирование и численные методы.- М.: Издательство МГУ,2011-224с.[Kostomarov D.P., Korukhova L.S. Manzheley S.G. Programming and numerical methods.-M .: Publishing house of Moscow State University, 2011-224s.]

4 Жунусова Л.Х. Модельная система управления синтезом фермента // Дифференциальные уравнения и их приложения: материалы международной конференции, 24-26 сентября 2003. – Алматы,2003.- С.62.[Zhunusova L.Kh. Model control system for enzyme synthesis // Differential equations and their applications: materials of the international conference, September 24-26, 2003. - Almaty, 2003. - P.62.]

5 Zhunussova L.Kh. Problems of model control optimization describing homogeneous fluctuations //Хабарлары ҚРҰҒА = Известия НАН РК. - 2008. - №1.-С.44-45.[Zhunussova L.Kh. Problems of model control optimization describing homogeneous fluctuations //News of the National Academy of Science Kazakhstan- 2008. - №1.-pp.44-45]

6 Байгелов К.Ж.,Бияров Т.Н.,Жумагулов Б.Т. Оптимизация биологической системы при наличии ограничений на управления.Алматы: Препринт ИА РК 1993,№4.С.23.[Baygelov K.Zh., Biyarov T.N., Zhumagulov B.T. Optimization of a biological system in the presence of a constraint on control. Almaty: Preprint IA RK 1993, No. 4.P.23]

7 Байгелов К.Ж., Бияров Т.Н., Жумагулов Б.Т. Динамика управляемых систем с запаздыванием. Алматы: Препринт ИА РК 1993,№4.С.23.[Baygelov K.Zh., Biyarov T.N., Zhumagulov B.T. Dynamics of Controlled Systems with Delay. Almaty: Preprint IA RK 1993, No. 4.P.23.]

8 Буслов В.В., Яковлев С.В. Численные методы, в 2 -х ч. - СПб, 2001.520с. [Buslov B, B., Yakovlev C.B., Numerical methods, in 2 hours - St. Petersburg, 2001.520s]

9 George W. Collins, II. Fundamental Numerical Methods and Data Analysis – 2003 [George W. Collins, II. Fundamental Numerical Methods and Data Analysis - 2003]

10 Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 400 с.[Formalev VF, Reviznikov DL Numerical methods. - M .: FIZMATLIT, 2004 .-- 400 s.]

11 Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие - М: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006, 523 с. [Petrov I.B., Lobanov A.I. Lectures on Computational Mathematics: Textbook - M: BINOM. Knowledge laboratory, 2006, 523 s.]

12 Джон Г.Мэтьюз, Куртис Д.Финк. Численные методы. Использование MatLab, 3-издание.: Перевод с английского, М.: Вильямс, 2001. – 720 с.[John G. Matthews, Curtis D. Fink. Numerical methods. Using MatLab, 3rd edition .: Translated from English, M .: Williams, 2001 .—720s]

13 Поршнев, С.В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB: Учебное пособие / С.В. Поршнев. - СПб.: Лань, 2011. - 736 с.[Porshnev, S.V. Computer modeling of physical processes in the MATLAB package: Textbook / S.V. Pisthnev. - SPb .: Lan, 2011 .-- 736 s.]

14 Тимофеев, В.Б. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB: Учебное пособие / В.Б. Тимофеев. - СПб.: Лань КПТ, 2015. - 736 с.[Timofeev, V.B. Computer modeling of physical processes in the MATLAB package: Textbook / V.B. Timofeev. - SPb .: Lan KPT, 2015 .-- 736 s.]

15 Федоров, С.Е. Компьютерное моделирование и исследование систем автоматического управления: учебно-методическое пособие для вузов / С.Е. Федоров. - М.: Русайнс, 2018. - 256 с.[Fedorov, S.E. Computer modeling and research of automatic control systems: teaching aid for universities / S.E. Fedorov. - M .: Rusays, 2018 .-- 256 s.]

16 Цисарь, И.Ф. MATLAB Simulink. Компьютерное моделирование экономики / И.Ф. Цисарь. - М.: Солон-пресс, 2014. - 256 с.[Tsisar, I.F. MATLAB Simulink. Computer modeling of the economy / I.F. Caesar. - M .: Solon-press, 2014 .-- 256 s.]

17 Васильева В.А, забелина С.Б., Кузхнецова Т.И.Применение пучка прямых на плоскости при решении уравнений и систем уравнений с параметром. / Вестник ЦМО МГУ, №6, ч.3, 2006. С. 32-39 [Vasil'eva V.A., Zabelina S.B., Kuzkhnetsova T.I. Application of a pencil of straight lines on a plane when solving an equation and systems of an equation with a parameter./ Bulletin of TsMO MSU, No. 6, part 3,2006, pp. 32-39]

18 Жарков Д.В. Основные методы решения задач с параметрами и текстовых задач с параметрами. / Вестник МГОУ, 2014. №3. С.20 [Zharkov D.V. Basic methods for solving problems with parameters and text problems with parameters./ Bulletin of MGOU, 2014. No. 3.P.20]

19 Казаков Н.А.,Солдатенков Р.М. Использование интерактивных геометрических сред при обучении математике /Актуальные проблемы математики,физики и математического образования[электронный ресурс]; сборник трудов кафедры матемтического анализа и геометрии/ под ред.Г.В. Кондратьевой, Е.А.Бедриковой, Д.А.Графова-Электрон.текстовые дан. (7,50Мб).-М.:ИИУ МГОУ.2018.С.73-76 [Kazakov N.A., Soldatenkov R.M. The use of interactive geometric environments in teaching mathematics / Actual problems of mathematics, physics and mathematical education [electronic resource]; collection of papers of the Department of Mathematical Analysis and Geometry / fruit edited by G.V. Kondratyeva, E.A. Bedrikova, D.A.Grafov-Electron.tex data. (7.50Mb) .- M.: IIU MGOU. 2018. P.73-76]

20 Казаков Н.А.,Кузнецова Т.И. Из истории терминов «Модель» и «Моделирование».Часть 5. Систематизация возможностей использования интерактивных геометрических сред на уроках математики// Проблемы учебного процесса в инновационных школах:сб.науч.тр./под.ред. О.В.Кузьмина. - Иркутск: Изд-во ИГУ,2019.-Вып.23-С.86-90 [Kazakov N.A., Kuznetsova T.I.

From the history of the terms “Model” and “Modeling”. Part 5. Systematization of the possibilities of using interactive geometric environments in the lessons of mathematics // Problems of the educational process in innovative schools: collection of scientific papers / ed. OV Kuzmina.-Ikurtsk: Publishing house of ISU, 2019.-Issue 23-PP.86-90]

Л. Х. ЖУНУСОВА

Абай ат. Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ПАРАМЕТРЛІ ЖҮЙЕНІҢ ДИНАМИКАСЫН ЗЕРТТЕУ МӘСЕЛЕЛЕРІ

Биологиядағы, экологиядағы және химиядағы бірқатар мәселелерді n өлшемді сызықтық емес, атап айтқанда параметрді қамтитын дифференциалдық теңдеулердің сызықтық жүйелерін қарастыруға дейін азайтуға болады. Мұндай жүйелер үшін параметр әсерінің шешімін табу қызықты. Жоғарыда аталған жүйелерді модельдеу кезінде туындайтын күрделі есептеу процестері осы тақырып бойынша зерттеулер әрдайым өзекті болып қалуға мүмкіндік береді. Бұл жұмыста дифференциалдық теңдеулердің сызықтық жүйесі қарастырылған. Осы жүйенің шешімінің сандық есебі келтірілген.

***Түйін сөздер**: екі сызықты жүйе, дифференциалдық теңдеулер, ферментативті реакция, жүйенің динамикасы, жүйенің параметрі, жуықтау.*

L. KH. ZHUNUSSOVA

Kazakh National Pedagogical University named after Abay, Almaty, Kazakhstan

STUDY OF DYNAMICS OF BILINEAR SYSTEMS WITH PARAMETER

A number of problems in biology, ecology and chemistry can be reduced to the consideration of n-dimensional nonlinear, in particular, bilinear systems of differential equations containing a parameter. For such systems, it is of interest to find a solution to the influence of a parameter. Complex computational processes arising in the modeling of the above systems make it possible for research on this topic to remain always relevant. In this paper, a bilinear system of differential equations is considered. The numerical calculation of the solution of this system is presented.

***Key words**: bilinear system, differential equations, enzymatic reaction, system dynamics, system parameter, approximation.*