

**Д. Б. ЖАКЕБАЕВ, Д. С. АГАДАЕВА\*, О. Л. КАРУНА**

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби,*

*Алматы, Казахстан*

*e-mail: agadaeva.dilyara@gmail.com*

## **МЕТОД LB ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХКОМПОНЕНТНОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ**

*В данной статье рассматривается численное решение задачи неустойчивости Рэлея-Тэйлора, возникающей под действием силы тяжести для трехкомпонентного потока жидкости при учете сил поверхностного натяжения. Исследуемый процесс рассматривается в ограниченной области, имеющей форму прямоугольника. Плотность компонентов жидкости такова, что:  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ . Математическая модель, построенная для описания указанного процесса для трехкомпонентной жидкости, основывается на уравнении Навье-Стокса для несжимаемой жидкости и уравнении Кана-Хиллиарда. Численная модель строится на базе LBM (LBM – Lattice Boltzmann method) с использованием модели D2Q9. Это новый подход к моделированию задач описания движения трехкомпонентной жидкости, позволяющий установить распределение скорости и фазовых компонентов. Полученные результаты определяют адекватность построенной модели для трехкомпонентной жидкости.*

**Ключевые слова:** *трехкомпонентная жидкость, фазовый переход, метод фазового поля, метод решеточного уравнения Больцмана, уравнение Кана-Хиллиарда, неустойчивость Рэлея-Тэйлора.*

**Введение.** Исследование движения многокомпонентных тепловых потоков необходимо, прежде всего, потому что они часто встречаются в природе, а также имеют место в промышленных и производственных процессах, что требует детального изучения ряда инженерных задач. В качестве примера применения численного моделирования многокомпонентных потоков жидкости можно отметить добычу нефти и газа, химическую переработку сырья, к ним также относятся потоки пароводяной смеси в котлах и конденсаторах. Существуют различные методы прямого численного моделирования движения многокомпонентных потоков, однако из-за сложности моделирования отдельных подпроцессов описание движения многофазных потоков считается сложной задачей. Для моделирования многофазных и многокомпонентных потоков жидкости могут быть использованы различные способы, при этом можно выделить основные два подхода к моделированию: метод отслеживания интерфейса и метод захвата интерфейса. Методы отслеживания интерфейса включают метод объема жидкости [1], отслеживание фронта [2] и погруженной границы [3]. К методу захвата интерфейса относится метод установки уровня [4] и метод фазового поля [5]. Основная идея методов отслеживания интерфейса состоит в отслеживании объема жидкости с помощью лагранжевых частиц, в то время как в методах захвата интерфейса интерфейс неявно захватывается контуром скалярной функции (к примеру, массовая концентрация в методе фазового поля). В последние годы для моделирования сложных многофазных систем широко используемым методом стал метод решеточного уравнения Больцмана (LBM). В частности, было разработано несколько моделей

---

\* E-mail корреспондирующего автора: [agadaeva.dilyara@gmail.com](mailto:agadaeva.dilyara@gmail.com)

LBE для многофазных и многокомпонентных течений: модель Шан-Чена [6], модель Хе [7], цветовая модель Розмэна Келлера [8], модели на основе свободной энергии [9], модели фазового поля [10] и модель Аллена-Кана [15].

В данной статье представлена разработка математической модели движения несжимаемого трехкомпонентного потока жидкости с использованием метода фазового поля на основе решения полного уравнения Навье-Стокса и конвективного уравнения Кана-Хиллиарда. Численная модель строится на основе LBM с использованием модели D2Q9. Точность и эффективность существующего метода апробированы на основе решения тестовой задачи неустойчивости Рэлей-Тэйлора. Полученные результаты определяют правильность построенной модели для трехкомпонентной жидкости.

**Постановка задачи.** Исследуемый процесс рассматривается в ограниченной области, имеющей форму прямоугольника размерами  $[0, L] \times [0, 4L]$ , где под действием силы поверхностного натяжения и силы тяжести описывается неустойчивость Рэлей-Тэйлора для трехкомпонентного потока жидкости. В прямоугольной области, как это показано на рисунке 1, находится три компонента жидкости с плотностью  $\rho_1, \rho_2$  и  $\rho_3$ , соотношение которых:  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ .

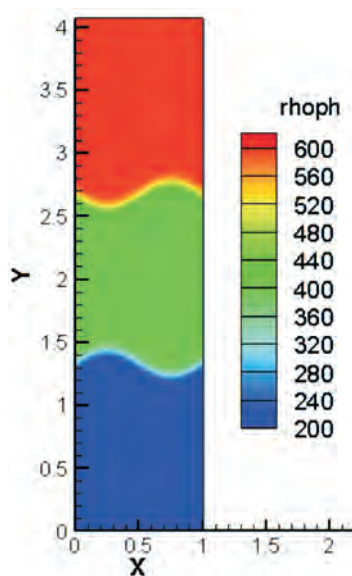


Рисунок 1 – Схема расчетной области

Математическая модель такого процесса также включает уравнение неразрывности, уравнение импульса для смеси и конвективного уравнения Кана-Хиллиарда:

$$\nabla u = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho u u) = -\nabla p + \nabla[\eta(\nabla u + \nabla u^T)] + F_s + F_b, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(c_i)}{\partial t} + \nabla(c_i u) = \nabla(M_i \nabla \mu_i), \quad i = 1, 2, 3$$

где  $u$  – компоненты скорости,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность, где  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  – плотности жидкости,  $\eta$  – динамическая вязкость,  $c_i$  – фазовое поле для компонентов жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения,  $M_i$  – коэффициент подвижности,  $\mu_i$  – химический потенциал,  $F = F_s + F_b = \sum_{i=1}^3 \mu_i \nabla c_i + \rho g$  – суммарная сила поверхностного натяжения и силы тяжести.

В моделях фазового поля для описания трехкомпонентного потока жидкости используется три параметра порядка  $c_1, c_2$  и  $c_3$ , которые связаны следующим образом [11]:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1, \quad (2)$$

и удовлетворяют конвективным уравнениям Кана-Хиллиарда в многокомпонентной теории фазового поля [10, 13]:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla \cdot c_i u = \nabla \cdot (M_i \nabla \mu_i) \quad (3)$$

Для системы многокомпонентной среды функционал свободной энергии Ландау  $F$  может быть определен на основе параметра порядка следующим образом:

$$F = (\vec{c}, \nabla \vec{c}) = \int_V \left[ \Psi(\vec{c}) + \sum_{i,j} \frac{\lambda_{ij}}{2} \nabla c_i c_j \right] dV,$$

где  $\Psi(A) = \sum_{i,j} \beta [g(c_i) - g(c_j) - g(c_i + c_j)]$  – объемная плотность свободной энергии,  $c = (c_1, c_2, c_3)$  – фазовая переменная компонентов жидкости,  $g(c) = c^2(1-c)^2$  и  $\beta_{ij} = \frac{3}{D} \sigma_{ij}$  – константы.

Для трехкомпонентной жидкости объемная свободная энергия  $F(c_1, c_2, c_3)$  определена как [21]:

$$F(c_1, c_2, c_3) = \frac{\lambda_1}{2} c_1^2 (1 - c_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} c_2^2 (1 - c_2)^2 + \frac{\lambda_3}{2} c_3^2 (1 - c_3)^2 + \lambda c_1^2 c_2^2 c_3^2,$$

где  $\lambda$  – неотрицательный параметр,  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  коэффициент поверхностного натяжения и  $D$  – толщина поверхности раздела.  $\lambda_i$  определяется следующим образом:

$$\lambda_1 = \sigma_{12} + \sigma_{13} - \sigma_{23},$$

$$\lambda_2 = \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{13},$$

$$\lambda_3 = \sigma_{13} + \sigma_{23} - \sigma_{12},$$

где  $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}$ , представляют собой поверхностное натяжение между двумя жидкостями трехфазной системы [16, 17, 18].

После определения полной свободной энергии подставим в выражение химического потенциала [21]:

$$\mu_i = \frac{4\lambda_T}{D} \sum_{j \neq i} \left[ \frac{1}{\lambda_T} \left( \frac{\partial F}{\partial c_i} - \frac{\partial F}{\partial c_j} \right) \right] - \frac{3}{4} D \lambda_i \nabla^2 c_i, \quad (4)$$

где  $\frac{3}{\lambda_T} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i}$ .

Согласно теоретическому анализу Бойера [19, 20],  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  если положительные и удовлетворяют условию  $\lambda_i > 0,5 \lambda_T$ , то модель для  $\lambda = 0$  может алгебраически и динамически согласовываться с двухфазным случаем. В противном случае для обеспечения динамической согласованности модели используется полная свободная энергия с положительным  $\lambda$ . В таком случае уравнение (7) можно упростить следующим образом:

$$\mu_i = \frac{12}{D} [\lambda_i c_i (1 - c_i) (1 - 2c_i) - 2\lambda_T c_1 c_2 (1 - c_1 - c_2)] - \frac{3}{4} D \lambda_i \nabla^2 c_i.$$

Выше полученное  $\mu_i$  подставим в уравнение (3), в результате чего система (1) будет полной.

Система уравнений (1) имеет следующие начальные условия:

$$\begin{cases} c_1(x, y, 0) = 0,5 + 0,5 \tanh \left[ \frac{2 \left( y - \frac{8L}{3} + 0,1 \sin(2\pi x) \right)}{\sqrt{2k_{12}}} \right], \\ c_2(x, y, 0) = 0,5 + 0,5 \tanh \left[ \frac{2 \left( y - \frac{4L}{3} - 0,1 \sin(2\pi x) \right)}{\sqrt{2k_{23}}} \right] - c_1(x, y, 0), \\ c_3(x, y, 0) = 1 - c_1(x, y, 0) - c_2(x, y, 0). \end{cases}$$

где  $k_{12} = 3\sigma_{12}D/8$  и  $k_{23} = 3\sigma_{23}D/8$ .

Граничные условия:

На нижней стенке при ( $y = 0$ ):

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{\partial c_2}{\partial y} = \frac{\partial c_3}{\partial y} = 0.$$

На боковых стенках при ( $x = L$ ):

для  $u, v, c_1, c_2, c_3$  – периодические граничные условия.

На верхней стенке при ( $y = 4L$ ):

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{\partial c_2}{\partial y} = \frac{\partial c_3}{\partial y} = 0.$$

**Численный метод.** Численное решение данной модели строится на D2Q9 модели решеточного метода Больцмана. Решеточное уравнение Больцмана в аппроксимации Батнагара-Гросса-Крука (BGK) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x} + \bar{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\bar{x}, t) &= - \frac{f_i(\bar{x}, t) - f_i^{eq}(\bar{x}, t)}{\tau_f} + \Delta t F_i \\ g_i^m(\bar{x} + \bar{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i^m(\bar{x}, t) &= (1 - q) \frac{1}{\tau_c} [g_i^m(\bar{x}, t) - g_i^{m,eq}(\bar{x}, t)] \end{aligned}$$

где  $m = 1, 2, 3$  – компоненты жидкости,  $f_i, g_i^m$  – функции распределения скорости и фазового поля,  $e_i$  – дискретная решеточная скорость,  $\tau_f = \frac{1}{2} + c_1 \left( \tau_1 - \frac{1}{2} \right) + c_2 \left( \tau_2 - \frac{1}{2} \right) + (1 - c_1 - c_2) \left( \tau_3 - \frac{1}{2} \right)$ ,  $\tau_c = 1$  – время релаксации,  $F_i$  – компонент внешней силы,  $\Delta t$  – решеточный шаг по времени,  $f_i^{eq}, g_i^{m,eq}$  – равновесная функция распределения скорости и фазового поля.

Равновесные функции определяются следующим образом [13]:

$$f_i^{eq} = \begin{cases} \rho - \sum_{i \neq 0} f_i^{eq}, & i = 0 \\ \omega_{ip} \left( 1 + \sum_{m=1}^3 \frac{c_m \mu_m}{\rho c_s^2} + \frac{e_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} + \frac{u_\alpha u_\beta (e_{i\alpha} e_{i\beta} - c_s^2 \sigma_{\alpha\beta})}{2c_s^2} \right), & i \neq 0 \end{cases}$$

$$g_i^{m,eq} = \begin{cases} c_m - \sum_{i \neq 0} q_i^{m,eq}, & i = 0 \\ \omega_i \left( \frac{\Gamma_m \mu_m}{c_s^2} + \frac{c_m e_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} + \frac{c_m u_\alpha u_\beta (e_{i\alpha} e_{i\beta} - c_s^2 \sigma_{\alpha\beta})}{2c_s^2} \right), & i \neq 0 \end{cases}$$

где  $c_s^2 = \frac{1}{3}$  – скорость света.

Для модели D2Q9 дискретные скорости вычисляются следующим образом:

$$e_{ix} = (0, 1, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 1)c$$

$$e_{iy} = (0, 0, 1, 1, 1, 0, -1, -1, -1)c$$

Значения весовых параметров по всем направлениям определяются как:

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{4}{9}, & i = 0, \\ \frac{1}{9}, & i = 1 - 4, \\ \frac{1}{36}, & i = 5 - 8 \end{cases}$$

В данной работе для аппроксимации внешней силы в LBM используется схема, предложенная Гуо и др. [14]:

$$F_i(x, t) = \omega_i \left( 1 - \frac{\Delta t}{2\tau_f} \right) \left( \frac{\bar{e}_i - \bar{u}}{c_s^2} + \frac{\bar{e}_i (\bar{e}_i \bar{u})}{c_s^4} \right) \bar{F}$$

где  $\bar{F} = \bar{F}_s + \bar{F}_b$ .

Уравнение эволюции делится на два шага как столкновение и распространение:

$$f_i^8(\bar{x}, t) = f_i(\bar{x}, t) + \Delta t \left( -\frac{f_i(\bar{x}, t) - f_i^{eq}(\bar{x}, t)}{\tau_f} + F_i \right)$$

$$g_i^{m,8}(\bar{x}, t) = g_i^m(\bar{x}, t) + \Delta t \left( -\frac{g_i^m(\bar{x}, t) - g_i^{m,eq}(\bar{x}, t)}{\tau_c} \right)$$

$$f_i(\bar{x} + \bar{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^8(\bar{x}, t)$$

$$g_i^m(\bar{x} + \bar{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = g_i^{m,8}(\bar{x}, t)$$

После второго шага обновляются макроскопические параметры (плотность, скорость и фазовое поле) по следующим формулам:

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i, \rho u = \sum_{i=0}^8 f_i \bar{e}_i + \frac{\Delta t}{2} \bar{F}, c_m = \sum_{i=0}^8 \square_i$$

Производные макроскопических переменных вычисляются с использованием следующих изотропных разностей второго порядка:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{1}{3(\Delta x)^2} \left[ \sum_{i=2}^9 c(x + e_i \Delta x) - 8c(x) \right].$$

Для замыкания системы уравнений были использованы следующие граничные условия. Условие нулевой скорости для всех стенок:

$$f_i(\bar{x}_w, t + \Delta t) = f_{-i}(\bar{x}_w, t + \Delta t), \bar{e}_i \cdot \bar{n} > 0$$

где фаза постоянна и граничные условия для функций распределения выбираются следующим образом:

$$g_i^m(\bar{x}_w, t + \Delta t) = g_{-i}^m(\bar{x}_w, t + \Delta t) + 2\omega_i c_w, \bar{e}_i \cdot \bar{n} > 0$$

где  $c_w$  – пристеночная фаза.

Условие Неймана для фазы на всех остальных стенках:

$$g_i^m(\bar{x}_w, t + \Delta t) = g_{-i}^m(\bar{x}_w, t + \Delta t), \bar{e}_i \cdot \bar{n} > 0$$

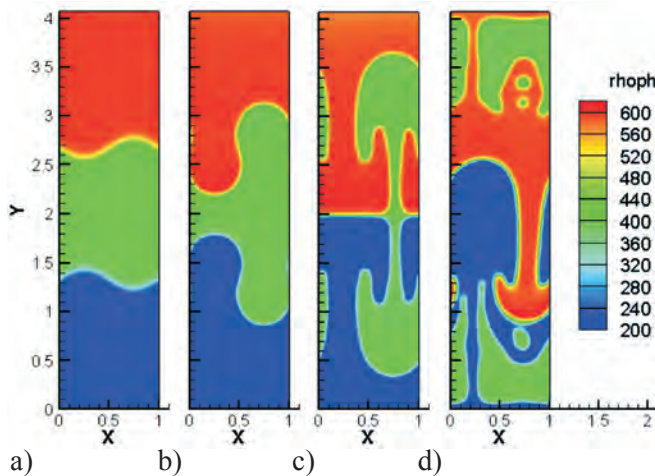
**Результаты моделирования.** Рассматривается тестовая задача неустойчивости Рэлей-Гэйлора для трехкомпонентного потока жидкости в прямоугольной расчетной области, имеющей размеры:  $N_x \times N_y$ ,  $N_x = 40$ ,  $N_y = 160$  которая разделена на три равные подобласти, а плотность компонентов жидкости увеличивается от нижней к верхней подобласти. Физический размер длины равен  $L = 0,01$  Шаг по пространству и по времени определяются как  $\Delta x = \frac{L}{N_x}$ ,  $\Delta t = 0,00025$ .

Физические величины: плотность –  $\rho_1 = 600$ ,  $\rho_2 = 400$ ,  $\rho_3 = 200$  и вязкость –  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0,01$ , поверхностное натяжение –  $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0,01$ , время релаксации –  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0,8$ , толщина поверхности –  $D = 2$ , ускорение свободного падения –  $g = 9,8$ , число Рейнольдса –  $Re = 125,22$ , число капиллярности –  $Ca = 0,000782624$ .

Результаты моделирования показывают (рисунок 2,3), что неустойчивость Рэлей-Гэйлора наблюдается одновременно во всех подобластях. На ранней стадии ( $t < 2$ ) менее плотная жидкость (плотностью  $\rho_3 = 200$ ) начинает подниматься рассматривае-

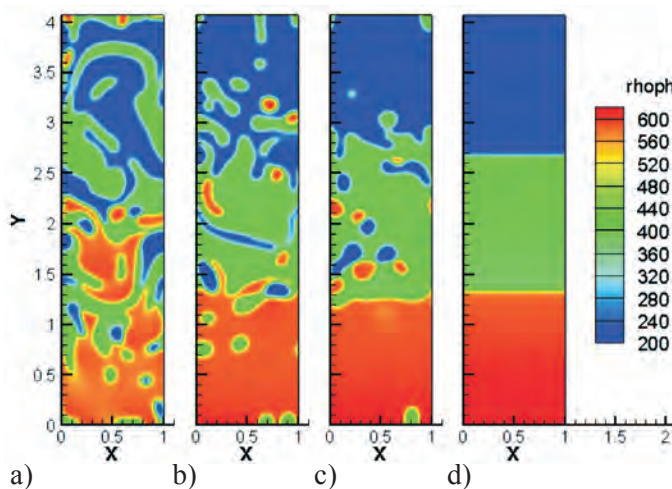
мого пространства, в то время как более плотная жидкость (плотностью  $\rho_1 = 600$ ) начинает свое движение вниз. С течением времени наблюдается увеличение в размерах всплесков компонентов жидкости, а в определенный момент образуются два боковых всплеска большого, относительно всей области, размера. Впоследствии поток менее плотного компонента жидкости устремляется вверх, создавая соответствующее возмущение соседних слоев жидкости. При  $t > 3$  неустойчивость Рэлей-Тэйлора становится более явной. В конце концов, формируются стабильные три слоя компонента жидкости – внизу более плотная; вверху – менее плотная.

Полученные результаты определяют адекватность построенной модели для трехкомпонентной жидкости.



**Рисунок 2** – Динамика изменения контуров плотности трехкомпонентного потока жидкости в зависимости от времени для задачи неустойчивости Рэлей-Тейлора:

a)  $t = 0$ ; b)  $t = 0,25$ ; c)  $t = 0,5$ ; d)  $t = 1$ .



**Рисунок 3** – Динамика изменения контуров плотности трехкомпонентного потока жидкости в зависимости от времени для задачи неустойчивости Рэлей-Тейлора:

a)  $t = 2$ ; b)  $t = 3$ ; c)  $t = 4$ ; d)  $t = 6,5$ .

**Заключение.** В данной работе разработана математическая модель движения трёхкомпонентного потока жидкости для задачи неустойчивости Рэлея-Тейлора. С целью моделирования неустойчивости Рэлея-Тейлора был разработан численный алгоритм на базе D2Q9 модели решеточного метода Больцмана. Для несжимаемого потока используется два набора функций распределения: один для отслеживания полей скорости, а другой – для фазового поля. Использование функции распределения давления позволяет существенно снизить влияние численных ошибок при расчете межмолекулярной силы.

Проведенное моделирование неустойчивости Рэлея-Тейлора раскрывает большинство особенностей для задач, встречающихся в теоретических и численных исследованиях. Предлагаемая модель и метод реализации позволяют отслеживать интерфейс трехфазных потоков более точно и стабильно. Использование LB является новым подходом к моделированию задач описания движения трёхкомпонентной жидкости, позволяющим установить распределение скорости и фазовых компонентов. Главным выводом настоящего исследования также можно считать следующее: в случае, когда три компонента жидкости расположены таких образом, что менее плотная внизу, а более плотная –верху; неустойчивость Рэлея-Тэйлора наблюдается на двух границах компонентов жидкости одновременно. Как видно из рисунков 2,3 на более ранней стадии процесса () имеет место образование пузырьков компонентов разноплотностной жидкости, а позже – полное перемещение менее плотной жидкости вверх. При этом более плотная жидкость устремляется вниз. Здесь также при прохождении переменной стадии наблюдается образование пузырьков. Наступает устойчивость процесса, когда вниз полностью переместилась более плотная компонента жидкости. Это доказывает применимость (а в некоторых случаях – преимущество) используемых в данном исследовании методов для решения задач такого типа.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант №AP08053154).

## ЛИТЕРАТУРА

1 Д. Гейффье, Дж. Ли, А. Надим, Р. Скардовелли, С. Залески. Отслеживание границ раздела флюидов с помощью методов сглаженных поверхностных напряжений для трехмерных течений / Дж.Вычисл. Физ. 152 (1999) 423-456.

2 Дж. Глимм, Дж. У. Гроув, Х. Л. Ли, К. М. Шьюэ, К. Чжан и Ю. Цзэн, Трехмерное отслеживание фронта./ СИАМ Дж. Научный расчет., 19 (1998) 703-727.

3 Х. С. Удайкумар, Х. С. Кан, У. Ший, Р. Тран-Син-Тай, Многофазная динамика в произвольных геометриях на фиксированных декартовых сетках./ Дж.Вычисл. Физ. 137 (1997) 366-405.

4 Ю. С. Чанг, Т. Я. Хоу, Б. Мэрриман, С. Ошер, Формулировка набора уровней методов захвата интерфейса Эйлера для потоков несжимаемой жидкости / J. Вычисл. Физ. 124 (1996) 449-464.

5 Р. Челла, Дж. Виналс, Смешивание двухфазной жидкости полостным потоком, Phys. Rev. E 53 (1996) 3832-3840.

6 Шан Х., Чен Х. Решетчатая модель Больцмана для моделирования потоков с несколькими фазами и компонентами / Phys. Rev. E 47 (1993) 1815-1839.



7 Хе Х., Чен С., Чжан Р. Решетчатая схема Больцмана для несжимаемого многофазного потока и ее применение при моделировании неустойчивости Рэлея-Тейлора / *Ж. Вычисл. Физ.* 152 (1999) 642-663.

8 Ротман Д. Х., Келлер Дж. М. Несмешивающиеся жидкости клеточных автоматов/ *Дж. Стат. Физ.* 52 (1988) 1119-1127.

9 Свифт М. Р., Осборн У. Р., Йоменс Дж. М., Решеточное моделирование неидеальных жидкостей по Больцману/ *Физ. ред. Летт.* 75 (1995) 830-843.

10 Ким Дж. Модели фазовой жидкости для многокомпонентных потоков жидкости/ *Коммун. Вычислитель. Физ.* 12, № 3 (2012) 613-661.

11 Ким Дж. Вычисления фазовой жидкости для тройных потоков жидкости./ *Вычисл. Метамфетамин. Приложение. Механик. англ.*, 196 (2007) 4779-4788.

12 Крюгер Т., Кусумаатмая Х., Кузьмин А., Шардт О., Сильва Г., Вигген Э. М. «Решетчатый метод Больцмана» / *Springer International Publishing* 258, (2017), 61-293.

13 Го З., Чжэн С., Ши Б., Дискретные эффекты решетки на форсирующий член в решеточном методе Больцмана/ *Физика. Rev. E.* 65 (2002), 1-6.

14 С. М. Аллен, Дж. У. Кан / *Acta Metall* 24 (1976), 425.

15 С. Донг, Ограниченные стенкой многофазные потоки N несмешивающихся несжимаемых жидкостей: согласованность и граничное условие угла контакта./ *Ж. Вычисл. Физ.* 338 (2017), 21-67.

16 Х. Г. Ли, Дж. У. Чой, Дж. Ким, Практически безоговорочно градиентная устойчивая схема для N-компонентной системы Кана-Хиллиарда, *Физика А* 391(2012), 1009-1019.

17 Ф. Бойер и С. Миньо, Иерархия последовательных n-компонентных систем Канчиллиарда / *Математика. Мод. Метамфетамин. Приложение.* S. 24 (2014), 2885-2928.

18 Х. Г. Ли и Дж. Ким, Эффективный численный метод моделирования многофазных потоков с использованием модели диффузного интерфейса. *Physica A* 423, 33 (2015).

19 С. Донг, Эффективный алгоритм для несжимаемых N-фазных потоков/ *Вычисл. Физ.* 361, 1 (2018).

20 Х. Лян, Дж. Сюй, Дж. Чен, Ж. Чай, Б. Ши, Решетчатое моделирование Больцмана ограниченных стенками тройных потоков жидкости/ *Приложение. Математика. Моделирование* (2019), doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.03.009>

## REFERENCES

1 D. Gueyffier, J. Li, A. Nadim, R. Scardovelli, S. Zaleski, Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows, *J. Comput. Phys.* 152 (1999) 423-456.

2 J. Glimm, J. W. Grove, X. L. Li, K. M. Shyue, Q. Zhang and Y. Zeng, Three-dimensional front tracking, *SIAM J. Sci. Comput.*, 19 (1998) 703-727.

3 H.S. Udaykumar, H.C. Kan, W. Shyy, R. Tran-Sin-Tay, Multiphase dynamics in arbitrary geometries on fixed Cartesian grids, *J. Comput. Phys.* 137 (1997) 366-405.

4 Y.C. Chang, T.Y. Hou, B. Merriman, S. Osher, A level set formulation of Eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows, *J. Comput. Phys.* 124 (1996) 449-464.

5 R. Chella, J. Vinals, Mixing of two-phase fluid by cavity flow, *Phys. Rev. E* 53 (1996) 3832-3840.

6 Shan X., Chen H. Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components, *Phys. Rev. E* 47 (1993) 1815-1839.

7 He X., Chen S., Zhang R. A Lattice Boltzmann scheme for incompressible multiphase flow and its application in simulation of Rayleigh-Taylor instability, *J. Comput. Phys.* 152 (1999) 642-663.

- 8 Rothman D.H., Keller J.M. Immiscible cellular-automaton fluids, J. Stat. Phys. 52 (1988) 1119-1127.
- 9 Swift M.R., Osborn W.R., Yeomans J.M., Lattice Boltzmann simulation of nonideal fluids, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 830-843.
- 10 Kim J. Phase fluid models for multi-component fluid flows, Commun. Comput. Phys. 12, no 3 (2012) 613-661.
- 11 Kim J. Phase fluid computations for ternary fluid flows, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 196 (2007) 4779-4788.
- 12 Kruger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggen E.M., «The Lattice Boltzmann-Method», Springer International Publishing 258, (2017), 61-293.
- 13 Guo Z., Zheng C., Shi B., Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method, Phys. Rev. E. 65 (2002), 1-6.
- 14 S. M. Allen, J. W. Cahn, Acta Metall 24 (1976), 425.
- 15 S. Dong, Wall-bounded multiphase flows of N immiscible incompressible fluids: Consistency and contact-angle boundary condition, J. Comput. Phys. 338 (2017), 21-67.
- 16 H. G. Lee, J. W. Choi, J. Kim, A practically unconditionally gradient stable scheme for the N-component Cahn-Hilliard system, Physica A 391(2012), 1009-1019.
- 17 F. Boyer and S. Minjeaud, Hierarchy of consistent n-component Cahn-Hilliard systems, Math. Mod. Meth. Appl. S. 24 (2014), 2885-2928.
- 18 H. G. Lee and J. Kim, An efficient numerical method for simulating multiphase flows using a diffuse interface model, Physica A 423, 33 (2015).
- 19 S. Dong, An efficient algorithm for incompressible N-phase flows, Comput. Phys. 361, 1 (2018).
- 20 H. Liang, J. Xu, J. Chen, Zh. Chai, B. Shi, Lattice Boltzmann modeling of wall-bounded ternary fluid flows, Appl. Math. Modelling (2019), doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.03.009>

**Д. Б. ЖАКЕБАЕВ, Д. С. АГАДАЕВА, О. Л. КАРУНА**

*Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті,  
Алматы қаласы, Қазақстан*

### **ҮШ КОМПОНЕНТТІ СҰЙЫҚ ҮШІН LB САНДЫҚ ӘДІСІ**

Бұл мақалада беттік керілу күштерін ескере отырып, сұйықтықтың үш компонентті ағыны үшін ауырлық күшінің әсерінен пайда болатын Рэлей-Тейлор тұрақсыздығы мәселесінің сандық шешімі қарастырылады. Зерттелетін процесс тіктөртбұрыш тәрізді шектеулі аймақта қарастырылады. Сұйықтық компоненттерінің тығыздығы келесідей:  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ . Үш компонентті сұйықтық үшін көрсетілген процесті сипаттауға арналған математикалық модель сығылмайтын сұйықтық үшін Навье-Стокс теңдеуіне және Кан-Хиллиард теңдеуіне негізделген. Сандық модель D2Q9 моделін қолдана отырып, LBM (LBM – Lattice Boltzmann method) негізінде жасалады. Бұл жылдамдық пен фазалық компоненттердің таралуын анықтауға мүмкіндік беретін үш компонентті сұйықтықтың қозғалысын сипаттау мәселелерін модельдеудің жаңа тәсілі. Алынған нәтижелер үш компонентті сұйық үшін құрылған модельдің дұрыстығын айқындайды.

**Түйін сөздер:** үш компонентті сұйық, фазалық өріс әдісі, фазалық таралу, Больцман торлық теңдеуі әдісі, Кан-Хиллиард теңдеуі, Рэлей-Тэйлор орнықсыздығы.

**D. B. ZHAKEBAYEV, D. S. AGADAYEVA, O. L. KARUNA**

*Al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan*

### **LBM OF TERNARY FLUID FLOW**

*In this paper, we the numerical solution of the Rayleigh-Taylor instability problem arising under the action of gravity for a ternary fluid flow taking into account the surface tension forces. The process under study is considered in a bounded area having the shape of a rectangle. The density of the liquid components is such that:  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ . The mathematical model constructed to describe this process for ternary fluid is based on the Navier-Stokes equation for an incompressible fluid and the Cahn-Hilliard equation. The numerical model is based on the LBM (LBM – Lattice Boltzmann method) using the D2Q9 model. This is a new approach to modeling the problems of describing the motion of a ternary fluid, which allows us to determine the distribution of velocity and phase components. The obtained results determine the adequacy of the constructed model for a three-component liquid.*

**Keywords:** *ternary fluid flow, phase-field method, interfaces capturing, Lattice Boltzmann method, Cahn-Hilliard equation, Rayleigh Taylor instability.*