УДК 517.954
https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.164

Б. Н. БИЯРОВ*, З. А. ЗАКАРИЕВА

НАО «Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева»
г.Нур-Султан, Казахстан

О БАЗИСНОСТИ ПО РИССУ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ КОРРЕКТНОГО СУЖЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Данная работа посвящена изучению подобности корректного сужения к некоторому самосопряженному оператору в случае симметрического минимального оператора. В результате полученная теорема была использована к оператору Штурм-Лиувилля и оператору Лапласа. Доказано, что спектр несамосопряженного сингулярно возмущенного оператора действительный, и соответствующая система собственных векторов образует базис Рисса.

***Ключевые слова**: максимальный (минимальный) оператор, корректное сужение, корректное расширение, действительный спектр, несамосопряженный оператор.*

1. Введение. Рассмотрим линейный оператор L в гильбертовом пространстве H. Линейное уравнение

$$Lu = f \tag{1.1}$$

называется корректно разрешимым в $R(L)$, если $\|u\| \leq C\|Lu\|$ для всех $u \in D(L)$ (где $C > 0$ и не зависит от u) и называется везде разрешимым, если $R(L) = H$. Если (1.1) одновременно корректно и везде разрешим, то оператор L называется корректным оператором. Корректно разрешимый оператор L_0 называется минимальным оператором, если $\overline{R(L_0)} \neq H$. Замкнутый оператор $\widehat{L}$ называется максимальным, если $R\left(\widehat{L}\right) = H$ и $Ker\widehat{L} \neq \{0\}$. Оператор A называется сужением оператора B, и оператор B называется расширением оператора A, если $D(A) \subset D(B)$ и $Au = Bu$ для всех $u \in D(A)$.

Заметим, что если корректное сужение L максимального оператора $\widehat{L}$ известен, то обратные операторы всех корректных сужений оператора $\widehat{L}$ имеют вид [1]:

$$L_k^{-1} f = L^{-1} f + Kf, \tag{1.2}$$

где K произвольный ограниченный линейный оператор из H в $Ker\,\widehat{L}$.

Пусть L_0 – минимальный оператор и M_0 – другой минимальный оператор и они связаны равенством $(L_0 u, v) = (u, M_0 v)$ для всех $u \in D(L_0)$ и $v \in D(M_0)$. Тогда $\widehat{L} = M_0^*$ и $\widehat{M} = L_0^*$ есть максимальные операторы такие, что $L_0 \subset \widehat{L}$ и $M_0 \subset \widehat{M}$. Корректное сужение L максимального оператора $\widehat{L}$ такое, что L одновременно является корректным расширением минимального оператора L_0 называется ограниченным корректным расширением. Существование хотя бы одного ограниченного корректного расширения L было доказано Вишиком в [2].

* E-mail корреспондирующего автора: zaruet.zakarieva@mail.ru

Обратные операторы к всевозможным корректным сужениям L_K максимального оператора $\widehat{L}$ имеют вид (1.2), поэтому $D(L_K)$ плотно в H тогда и только тогда, если $Ker(1+K^*L^*)=\{0\}$. Всевозможные корректные расширения M_K оператора M_0 имеют обратные операторы в виде:

$$M_K^{-1}=(L_K^*)^{-1}f=(L^*)^{-1}f+K^*f,$$

где K произвольный ограниченный линейный оператор в H с $R(K)\subset Ker\widehat{L}$ такой, что:

$$Ker(1+K^*L^*)=\{0\}.$$

Лемма 1.1 (Hamburger [3, с. 269]). Пусть A – линейное ограниченное преобразование в H и N – линейное многообразие. Если мы положим $A(N) = M$, то

$$A^*(M^\perp)=N^\perp\cap R(A^*).$$

Предложение 1.1 ([4, с.1863]). Корректное сужение L_K максимального оператора $\widehat{L}$ является корректным расширением минимального оператора L_0 тогда и только тогда, если $R(K)\subset Ker\widehat{L}$ и $R(M_0)\subset KerK^*$.

Линейные операторы A и B называются подобными, если существует линейный ограниченно обратимый оператор P такой, что $B = P^{-1}AP$.

Следующая теорема является главным результатом настоящей работы.

Теорема 1.1 Пусть L_0 – симметрический минимальный оператор в гильбертовом пространстве H, L-самосопряженное корректное расширение оператора L_0 и L_K – корректное сужение максимального оператора $\widehat{L}(\widehat{L}=L_0^*)$. Если

$$R(K^*)\subset D(L),\quad I+KL\geq 0,$$

и $I + KL$ обратим, где L и K операторы, представленные в (1.2). Тогда L_K– оператор, подобный к самосопряженному оператору.

Следствие 1.1 Пусть выполнены все условия Теоремы 1.1 и оператор K удовлетворяет условиям Теоремы 1.1. Тогда спектр оператора L_K является вещественным, т.е. $\sigma(L_K)\subset R$.

Следствие 1.2 Пусть выполнены все условия Теоремы 1.1, оператор K удовлетворяет условиям Теоремы 1.1 и L^{-1} – компактный оператор. Тогда система собственных векторов оператора L_K образует базис Рисса в H.

Следствие 1.3 Результат Теоремы 1.1 остается справедливым, если условия «$I + KL \geq 0$ и $I + KL$ – обратим» заменить условием «$KL \geq 0$».

Следствие 1.4 Результаты Теоремы 1.1, Следствий 1.1-1.3 остаются справедливыми, если оператор L_K заменить на L_K^* .

2. Вспомогательные утверждения. В этом разделе мы представляем некоторые результаты для корректных сужений и расширений, которые используются в разделе 3.

Если A – линейное ограниченное преобразование комплексного гильбертова пространства H в себя, то по определению числовой диапазон A есть множество

$$W(A)=\{(Ax,x): x\in H, \|x\|=1\}.$$

Если через $\sigma(A)$ обозначить спектр A, то легко доказать, что

$$\sigma_p(A)\subset W(A), \quad \sigma(A)\subset \overline{W(A)},$$

для точечного спектра $\sigma_p(A)$ и спектра $\sigma(A)$, где черта означает замыкание. Числовой диапазон неограниченного оператора A в гильбертовом пространстве H определяется как

$$W(A)=\{(Ax,x): x\in D(A), \ \|x\|=1\},$$

и, как в случае ограниченного оператора, множество $W(A)$ – выпуклое и удовлетворяет условию $\sigma_p(A)\subset W(A)$,. В целом, заключение $\sigma(A)\subset W(A)$ заведомо не выполняется для неограниченных операторов A.

Предложение 2.1 (Предложение 1.1 в [5, с. 1132]). Если плотно определенный замкнутый линейный оператор, то включение $\sigma(A)\subset \overline{W(A)}$, ($\overline{W(A)}$ – замыкание множества $W(A)$) имеет место тогда и только тогда, если $\sigma_{r,1}(A)\subset \overline{W(A)}$, где

$$\sigma_{r,1}(A)=\{\lambda\in\sigma_r(A): R(A-\lambda) \text{ – замкнутый}\}$$

Предложение 2.2 (Предложение 1.2 в [5, с.1132]). Если плотно определенный замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H и удовлетворяет условию $\sigma_{r,1}(A^*)=\varnothing$ то $\sigma(A)\subset \overline{W(A)}$,, где

$$\sigma_{p,1}(A^*)=\{\lambda\in\sigma_p(A^*): R(A^*-\lambda)=H\}.$$

Теорема 2.1 (Теорема 2 в [6, с.181]). Следующие условия эквивалентны для оператора T:

(1) T – подобный оператор к самосопряженному оператору.

(2) $T = PA$, где положительный и обратимый оператор, а A – самосопряженный оператор.

(3) $S^{-1}TS = T^*$ и $0\in\overline{W(S)}$.

Теорема 2.2 (Теорема 1 в [7, с.215]). Пусть A и B – линейные операторы, действующие в комплексном гильбертовом пространстве H. Если $0\notin \overline{W(A)}$, то

$$\sigma(A^{-1}B)\subset \overline{W(B)}/\overline{W(A)}.$$

Следствие 2.1 (Следствие в [7, с.218]). Если $A > 0$, $B > 0$ и $C = C^*$, то $\sigma(AB)$ является положительным, а $\sigma(AC)$-действительным.

Теорема 2.3 (Теорема A в [8, с.508]). Числовая область значений $W(T)$ оператора T является выпуклым и $W(aT + b) = aW(T) + b$ для всех комплексных чисел a и b. Более того, если - произвольная ненулевая проекция, то $W(PT|PH)\subseteq W(T)$.

3. Доказательство Теоремы 1.1. Сначала преобразуем (1.2) следующим образом

$$L_K^{-1} = L^{-1} + K = (1 + KL)L^{-1} \tag{3.1}$$

Тогда L_K определяется как сужение максимального оператора $\hat{L}$ в области определения

$$D(L_K) = \{u \in D(\hat{L}) : (I - K\hat{L})u \in D(L)\}.$$

Теперь перейдем к доказательству Теоремы 1.1. В [9, с.27] было доказано, что KL ограничен в $D(L)$ (т.е. $\overline{KL} \in B(H)$) тогда и только тогда, если

$$R(K^*) \subset D(L^*).$$

Из того, что $\overline{DL} = H$ следует, что $\overline{KL}$ ограничен в H. В дальнейшем вместо $\overline{KL}$ мы будем писать KL. Тогда в силу Теоремы 2.1 с учетом условий Теоремы 1.1 получаем, что $I + KL \geq 0$ и I +– обратим. Отсюда следует доказательство Теоремы 1.1.

Доказательство Следствия 1.1 вытекает из Следствия 2.1. Следствие 1.2 легко получить, так как оператор

$$C = (I + KL)^{1/2} L^{-1} (I + KL)^{1/2}$$

самосопряженный и

$$L_K^{-1} = (I + KL)^{1/2} C (I + KL)^{-1/2} = (I + KL)L^{-1}. \tag{3.2}$$

Докажем Следствие 1.3. По Теореме 2.3, мы получаем, что $0 \notin W(I + KL)$. Тогда $I + KL \geq 0$ и $I + KL$ обратим.

Доказательство Следствия 1.4 вытекает с (3.2), так как C – самосопряженный оператор, а в случае Следствие 1.3 C – компактный самосопряженный оператор.

4. Несамосопряженные возмущения для некоторых дифференциальных операторов. Пример 1. Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля в интервале (0,1)

$$\hat{L}y = -y'' + q(x)y = f, \tag{4.1}$$

где $q(x)$ – вещественная функция в $L^2(0,1)$. Обозначим через L_0 минимальный оператор и через $\hat{L}$ максимальный оператор, порожденные дифференциальным выражением (4.1) в пространстве $L_2(0,1)$. Понятно, что

$$D(L_0) = W_2^2(0,1)$$

и

$$D(\hat{L}) = \{y \in L^2(0,1) : y, y' \in AC[0,1], y'' - q(x)y \in L^2(0,1)\}.$$

Тогда $Ker\hat{L} = \{a_{11}c(x) + a_{12}s(x)\}$ где a_{11}, a_{12} – произвольные постоянные и функции $c(x)$ и $s(x)$ определяются следующим образом

$$c(x) = 1 + \int_0^x \mathrm{K}(x,t;0)dt, \quad s(x) = x + \int_0^x \mathrm{K}(x,t;\infty)tdt,$$

где $\mathrm{K}(x,t;0)=\mathrm{K}(x,t)+\mathrm{K}(x,-t)$, $\mathrm{K}(x,t;\infty)=\mathrm{K}(x,t)-\mathrm{K}(x,-t)$, а $\mathrm{K}(x,t)$, является решением следующей задачи Гурса

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\mathrm{K}(x,t)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2\mathrm{K}(x,t)}{\partial t^2}=q(x)\mathrm{K}(x,t),\\ \mathrm{K}(x,-x)=0,\quad \mathrm{K}(x,x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x q(t)dt,\end{cases}$$

в области определения

$$\Omega=\{(x.t):0<x<1,-x<t<x\}.$$

Отметим, что $c(0)=s'(0)=1,\quad c'(0)=s(0)=0$ и Вронскиан

$$W(c,s)=c(x)s'(x)-c'(x)s(x)=1.$$

В качестве фиксированного ограниченного расширения L возьмем оператор, соответствующий задаче Дирихле для уравнения (4.1) в интервале (0,1).

$$D(L)=\{y\in W_2^2(0,1):y(0)=0,y'(0)=0\}.$$

Тогда вид обратного оператора любому корректному сужению L_K максимального оператора $\widehat{L}$ будет выглядеть следующим образом

$$y\equiv L_K^{-1}f=\int_0^x[c(x)s(t)-s(x)c(t)]f(t)dt-\frac{s(x)}{s(1)}\int_0^1[c(1)s(t)-s(1)c(t)]f(t)dt$$

$$+c(x)\int_0^1 f(t)\overline{\sigma_1(t)}dt+s(x)\int_0^1 f(t)\overline{\sigma_2(t)}dt,$$

где $\sigma_1(x),\sigma_2(x)\in L_2(0,1)$ для каждого $f\in L_2(0,1)$ однозначно определяют оператор K из (1.2) в следующей форме

$$Kf=c(x)\int_0^1 f(t)\overline{\sigma_1(t)}dt+s(x)\int_0^1 f(t)\overline{\sigma_2(t)}dt,$$

который является ограниченным оператором в $L_2(0,1)$ действующим из $L_2(0,1)$ в $Ker\widehat{L}$.
Оператор L_K является сужением оператора $\widehat{L}$ в области определения

$$D(L_K)=\{y\in W_2^2(0,1):y(0)=\int_0^1[-y''"(t)+q(t)y(t)]\overline{\sigma_1(t)}dt\};$$

$$y(1)=c(1)y(0)+s(1)\int_0^1[-y''(t)+q(t)y(t)]\overline{\sigma_2(t)}dt\}.$$

Из условия

$$R(K^*)\subset D(L^*)=D(L)$$

следует

$$KLy=c(x)\int_0^1 y(t)[-\overline{\sigma_1}''(t)+q(t)\overline{\sigma_1}(t)]dt+s(x)\int_0^1 y(t)[-\overline{\sigma_2}''(t)+q(t)\overline{\sigma_2}(t)]dt,$$

где

$$y \in D(L), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in W_2^2(0,1), \quad \sigma_1(0) = \sigma_1(1) = \sigma_2(0) = \sigma_2(1) = 0.$$

Если $I + KL \geq 0$ и $I + K$ – обратим, то спектр оператора L_K состоит только из положительных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, соответствующих собственным функциям $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, которые образуют базис Рисса в $L^2(0,1)$, т.к. L^{-1} – компактный самосопряженный положительный оператор.

В частности, если

$$\sigma_1(x) = \alpha(L^{-1}c)(x), \quad \sigma_2(x) = \beta(L^{-1}s)(x), \quad \alpha, \beta \geq 0,$$

то $KL \geq 0$ Следовательно, по Следствию 1.3, результаты Теоремы 1.1 верны для L_K. В этом случае L_K^{-1} имеет форму

$$y = L_K^{-1} f = L^{-1} f + c(x)\int_0^1 f(t)(L^{-1}c)(t)dt + s(x)\int_0^1 f(t)(L^{-1}s)(t)dt.$$

Тогда $(L_K^{-1})^* = (L_K^*)^{-1}$ имеет вид

$$\upsilon(x) = (L^{-1} f)(x) + \alpha(L^{-1}c)(x)\int_0^1 f(t)c(t)dt + \beta(L^{-1}s)(x)\int_0^1 f(t)s(t)dt.$$

Таким образом,

$$(L_K^*\upsilon)(x) = -\upsilon''"(x) + q(x)\upsilon(x) + a(x)\upsilon'(0) + b(x)\upsilon'(1) = f(x),$$

$$D(L_K^*) = \{\upsilon \in W_2^2(0,1) : \upsilon(0) = \upsilon(1) = 0\},$$

где

$$a(x) = \frac{\alpha\beta(c,s)s(x) - \alpha(1+\beta\|s\|^2)c(x)}{(1+a\|c\|^2)(1+\beta\|s\|^2) - \alpha\beta|(c,s)|^2},$$

$$b(x) = \frac{\alpha[c(1)(1+\beta\|s\|^2 - \beta s(1)(s,c)]c(x) - \beta[\alpha c(1)(c,s) - s(1)(1+\alpha\|c\|^2)]s(x)}{(1+a\|c\|^2)(1+\beta\|s\|^2) - \alpha\beta|(c,s)|^2},$$

$a(x), b(x) \in Ker\hat{L}$ и $(\,\cdot\,,\cdot)$ – скалярное произведение в $L^2(0,1)$. Оператор L_K^* действует как

$$L_K^* = L^* + Q,$$

где

$$(Q\upsilon)(x) = a(x) < \delta'(x), \upsilon(x) > + b(x) < \delta'(x-1), \upsilon(x) >= a(x)\upsilon'(0) + b(x)\upsilon'(1),$$

$$L^* = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

то есть, $Q \in W_2^{-2}(0,1)$.

Таким образом, мы построили пример несамосопряженного сингулярно возмущенного оператора Штурма-Лиувилля со спектром, который в точности совпадает со спектром задачи Дирихле и с системой собственных векторов, которые образуют базис Рисса в $L^2(0,1)$.

Пример 2. В гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$, где Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, рассмотрим L_0-минимальный и $\widehat{L}$ -максимальный операторы, порожденные оператором Лапласа

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right). \tag{4.2}$$

Отметим, что замыкание L_0 в пространстве $L^2(\Omega)$ оператора (4.2) Лапласа с областью определения $C_0^\infty(\Omega)$ называется минимальным оператором, соответствующим оператору Лапласа. Оператор $\widehat{L}$, сопряжённый к минимальному оператору L_0, соответствующему оператору Лапласа, называется максимальным оператором, соответствующим оператору Лапласа. Тогда

$$D(\widehat{L}) = \{u \in L^2(\Omega) : \widehat{L}u = -\Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Обозначим через L оператор, соответствующий задаче Дирихле с областью определения

$$D(L) = \{u \in W_2^2(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Мы имеем (1.2), где K – произвольный линейный оператор, ограниченный в $L^2(\Omega)$ с

$$R(K) \subset Ker\widehat{L} = \{u \in L^2(\Omega) : -\Delta u = 0\}.$$

Тогда оператор L определяется формулой

$$\widehat{L}u = -\Delta u,$$

$$D(L_K) = \{u \in D(\widehat{L}) : [(I - K\widehat{L})u]|_{\partial\Omega} = 0\},$$

где I – тождественный оператор в $L^2(\Omega)$. Отметим, что L^{-1} – самосопряженный компактный оператор. Если K удовлетворяет условиям Теоремы 1.1, то L_K имеет только положительный действительный спектр (т.е. $\sigma(L_K) \subset \mathbb{R}_+$), а система собственных векторов L_K образуют базис Рисса в $L^2(\Omega)$. В частности, если

$$Kf = \varphi(x)\int_\Omega f(t)\psi(t)dt,$$

где $\varphi \in W_{2,loc}^2(\Omega)$ гармоническая функция и $\psi \in L^2(\Omega)$ то $K \in B(L^2(\Omega))$ и $R(K) \subset Ker\widehat{L}$. Из условия $R(K^*) \subset D(L^*)$ следует, что $\psi \in W_2^2(\Omega)$ и $\psi|_{\partial\Omega} = 0$. Из условия $KL \geq 0$ имеем $\psi(x) = \alpha(L^{-1}\varphi)(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда оператор L_K является сужением $\widehat{L}$ в области определения

$$D(L_K) = \left\{u \in D(\widehat{L}) : \left(u - \frac{(u,\varphi)}{1+\|\varphi\|^2}\right)\varphi|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

$$= \left\{ u \in D(\hat{L}) : \left(u - \frac{\varphi}{1+\|\varphi\|^2} \int_\Omega u(y)\varphi(y)dy \right)\Big|_{\partial\Omega} \right\}.$$

Обратный оператор к L_K^{-1} имеет вид

$$u = L_K^{-1} f = L^{-1} f + \varphi \int_\Omega f(y)(L^{-1}\varphi)(y)dy. \tag{4.3}$$

Находим сопряженный оператор L_K^*. Из (4.3) для всех $g \in L^2(\Omega)$ имеем

$$\upsilon = (L_K^{-1})^* g = L^{-1} g + L^{-1}\varphi \int_\Omega g(y)\varphi(y)dy,$$

Тогда

$$L_K^* = -\Delta\upsilon + \frac{\varphi}{1+\|\varphi\|^2} \int_\Omega (\Delta\upsilon)(y)\varphi(y)dy = g,$$

$$D(L_K^*) = D(L) = \{\upsilon \in W_2^2(\Omega) : \upsilon|_{\partial\Omega} = 0.\}$$

В силу Следствия 1.4 спектр оператора L_K^* состоит только из действительных положительных собственных значений, соответствующих собственным функциям, образующим базис Рисса в $L^2(\Omega)$. Заметим, что

$$(L_K^*\upsilon)(x) = -(\Delta\upsilon)(x) + \frac{\varphi(x)}{1+\|\varphi\|^2} F(u) = g(x),$$

где $F \in W_2^{-2}(\Omega)$ и

$$F(u) = \int_\Omega (\Delta\upsilon)(y)\varphi(y)dy.$$

Это понимается в смысле определения пространства $H^{-s}(\Omega)$, $s > 0$, так же, как и в Теореме 12.1 (см.[10, с.71]).

Таким образом, мы построили пример L_K^* несамосопряженного сингулярно возмущенного оператора с действительным спектром. Более того, спектр этого оператора в точности совпадает со спектром задачи Дирихле, а соответствующие собственные векторы образуют базис Рисса в $L^2(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О расширениях и сужениях операторов в банаховом пространстве // Успехи матем. наук. –1982, вып. 4. – С. 116-123.

2 Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды Московского матем. общества. – 1952. – Т.1. – С. 187-246.

3 Hamburger H.L. Five notes on a generalization of quasi-nilpotent transformations in Hilbert space // Proc. London Math. Soc. 3:1 (1951), p. 494-512.

4 Бияров Б.Н. Спектральные свойства корректных сужений и расширений оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30, №12. – С. 2027-2032.

5 Wu D.Y., Chen A. Spectral inclusion properties of the numerical range in a space with an indefinite metric // Linear Algebra Appl. 435 (2011), p. 1131-1136.
6 Radjavi H., Williams J.P. Products of self-adjoint operators // Michigan Math. J. 16 (1969), p. 177-185.
7 Williams J.P. Spectra of products and numerical ranges // J. Math. Anal. Appl. 17 (1967), p. 214-220.
8 Radjabalipour M., Radjavi H. On the geometry of numerical ranges // Pacific J. Math. 61:2 (1975), p. 507-511.
9 Biyarov B.N., Svistunov D.A., Abdrasheva G.K. Correct singular perturbations of the Laplace operator // Eurasian Math. J. – 2020. – Vol.11, No. 4. - P. 25-34.
10 Lions J.-L., Magenes E. Non – Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1972.

REFERENCES

1 Kokebaev B.K., Otelbaev M., SHynybekov A.N. O rasshireniyah i suzheniyah operatorov v banahovom prostranstve // Uspekhi matem. nauk. – 1982, vyp. 4. – S. 116-123.
2 Vishik M.I. Ob obshchih kraevyh zadachah dlya ellipticheskih differencial'nyh uravnenij // Trudy Moskovskogo matem. obshchestva. – 1952. – T.1. – S. 187-246.
3 Hamburger H.L. Five notes on a generalization of quasi-nilpotent transformations in Hilbert space // Proc. London Math. Soc. 3:1 (1951), p. 494-512.
4 Biyarov B.N. Spektral'nye svojstva korrektnyh suzhenij i rasshirenij operatora SHturma-Liuvillya // Differencial'nye uravneniya. – 1994. – T. 30, №12. – S. 2027-2032.
5 Wu D.Y., Chen A. Spectral inclusion properties of the numerical range in a space with an indefinite metric // Linear Algebra Appl. 435 (2011), p. 1131-1136.
6 Radjavi H., Williams J.P. Products of self-adjoint operators // Michigan Math. J. 16 (1969), p. 177-185.
7 Williams J.P. Spectra of products and numerical ranges // J. Math. Anal. Appl. 17 (1967), p. 214-220.
8 Radjabalipour M., Radjavi H. On the geometry of numerical ranges // Pacific J. Math. 61:2 (1975), p. 507-511.
9 Biyarov B.N., Svistunov D.A., Abdrasheva G.K. Correct singular perturbations of the Laplace operator // Eurasian Math. J. – 2020. – Vol.11, No. 4. – P. 25-34.
10 Lions J.-L., Magenes E. Non – Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1972.

Б. Н. БИЯРОВ, З. А. ЗАКАРИЕВА

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ.

МАКСИМАЛДЫ СЫЗЫҚТЫ ОПЕРАТОРДЫҢ КОРРЕКТІЛІ ТАРЫЛУЫНЫҢ МЕНШІКТІ ВЕКТОРЛАР ЖҮЙЕСІНІҢ РИСС БОЙЫНША БАЗИСТІЛІГІ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыс корректілі тарылудың симметриялы минималды оператор жағдайындағы кейбір өзіне - өзі түйіндес операторлардың ұқсастығына арналған. Нәтижесінде алынған теорема

Штурм - Лиувилль операторына қолданылды, өзіне - өзі түйіндес емес сингулярлы ұйытқыған оператордың спектрі нақты және оған сәйкес келетін меншікті векторларының жүйесі Рисс базисін құрайтыны көрсетілді.

***Түйін сөздер**: максималды (минималды) оператор, корректілі тарылу, корректілі кеңею, нақты спектр, өзіне түйіндес емес оператор*

B. N. BIYAROV, Z. A. ZAKARIYEVA

Eurasian national university named after L.N. Gumiylev
Kazakhstan, c.Nur-Sultan

ON THE BASICITY BY RIESZ OF THE EIGENVECTORS SYSTEM OF A CORRECT RESTRICTION OF THE MAXIMALITY LINEAR OPERATOR

The work is devoted to the study of the similarity of a correct restriction to some self-adjoint operator in the case when the minimal operator is symmetric. The resulting theorem was applied to the Sturm-Liouville operator and the Laplace operator. It is shown that the spectrum of a non self-adjoint singularly perturbed operator is real and the corresponding system of eigenvectors forms a Riesz basis.

***Keywords:** Maximal (minimal) operator, correct restriction, correct extension, real spectrum, non self-adjoint operator.*