

**Е. Т. БОЖАНОВ, С. Н. БУГАНОВА\*,  
А. Ж. ТОЛГАНБАЕВ**

*Казахский национальный исследовательский технический университет  
им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан  
Международная образовательная корпорация, Алматы, Казахстан*

## **ВЫПУЧИВАНИЕ И КОЛЕБАНИЕ ПРИСТЕНОЧНОГО СЛОЯ ЦЕПНОЙ ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВХОДЕ В АППАРАТ ДЛЯ ТУРБУЛИЗАЦИИ ПОТОКА В ТЕПЛООБМЕННИКЕ**

*Разработана математическая модель интенсификации теплообмена при входе в аппарат для турбулизации. Предложены рациональные формулы выпучивания и колебания пристеночного слоя цепной двухмассовой системы. Получены распределения возмущений, вызванных промежуточной внутренней неустойчивостью прецентрального слоя после снятия условий под сосредоточенной перерезывающей нагрузкой в зонах затвердения, кристаллизации и охлаждения.*

**Ключевые слова:** *трубчатая конструкция, прецентральный слой, центральный аномальный слой, возмущения, устойчивость, нефтенасыщенность.*

**Введение.** Рассмотрим механическую систему из двух основ:

- трубчатая конструкция с переменными параметрами под действием активной и реактивной критической силы;
- прецентральный слой под действием силы вышестоящих слоев, лежащих на основании разных типов при неоднородных граничных условиях.

### **1. Распределение возмущений, вызванных промежуточной неустойчивостью пристеночного слоя цепной двухмассовой системы**

$$\varepsilon(x) \frac{d^4 w}{dx^4} + A_2 \varepsilon''(x) \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{k_1 + \eta_1}{k_2}, \quad (1.1)$$

где  $A_2 = 2(a^2 - v^2 c^2) + 4(a + c + 1)^2 + 4(a - 1)(c - 1) - 1$ ,

$$[2(v^2 c^2 - a^2) - (2a - 1)(2c - 1)](2a + 2c - 1) = 0'$$

$$(a^2 - v^2 c^2)(a^2 + 4ac + 4c^2 - v^2 c^2) - b^4 c^4 x^{4c} = 0, 6 - 4a - 4c = 0 \quad (1.2)$$

Фундаментальное решение

$$W_0(x) = x^\alpha [C_1 J_\nu(u) + C_2 Y_\nu(u) + C_3 J_\nu(iu) + C_4 Y_\nu(iu)], \quad u = bx^c \quad (1.3)$$

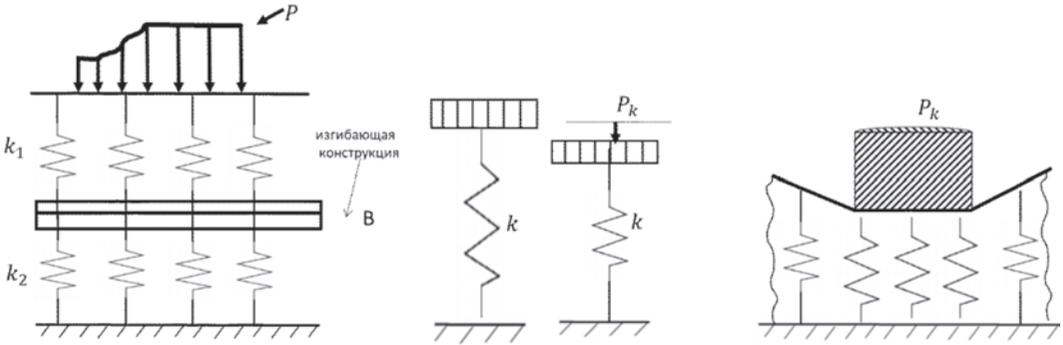
здесь  $\varepsilon(x)$  – изменение жесткости поперечного сечения наименьшего радиуса инер-

---

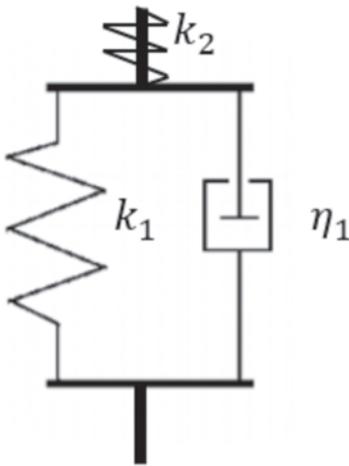
\* E-mail корреспондирующего автора: svetlanabuganova7@gmail.com

ции;  $k = \{k_1; k_2\}$  – изменение параметров жесткости продольной критической силы;  $\eta(x) = \eta_1 = const$  – коэффициент кинематической вязкости.

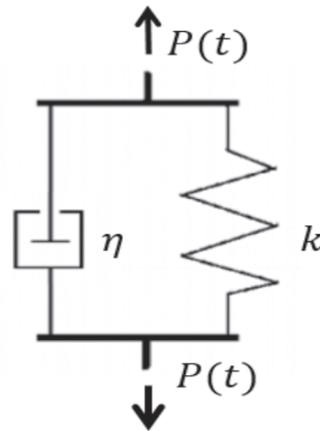
Для моделей характерны (рис. 1): а)  $P_{\text{реак.сила}} = kW$ ;



а) Модель реакции типа Вилера



б) Модель Пастернака



в) Модель СЛТ

Рисунок 1 – Модели реакций разных типов

б)  $\frac{dp}{dt} + \frac{k_1 + k_2}{\eta_1} P = k_2 \frac{dW}{dt} + \frac{k_1 k_2}{\eta_1} W$ , демпфер участвует в промежуточных процес-

сах технологии  $k \gg \eta$  ;

в)  $P = kW + \eta \frac{dW}{dt}$ , демпфер участвует в промежуточных процессах технологии

$k \gg \eta$  ;

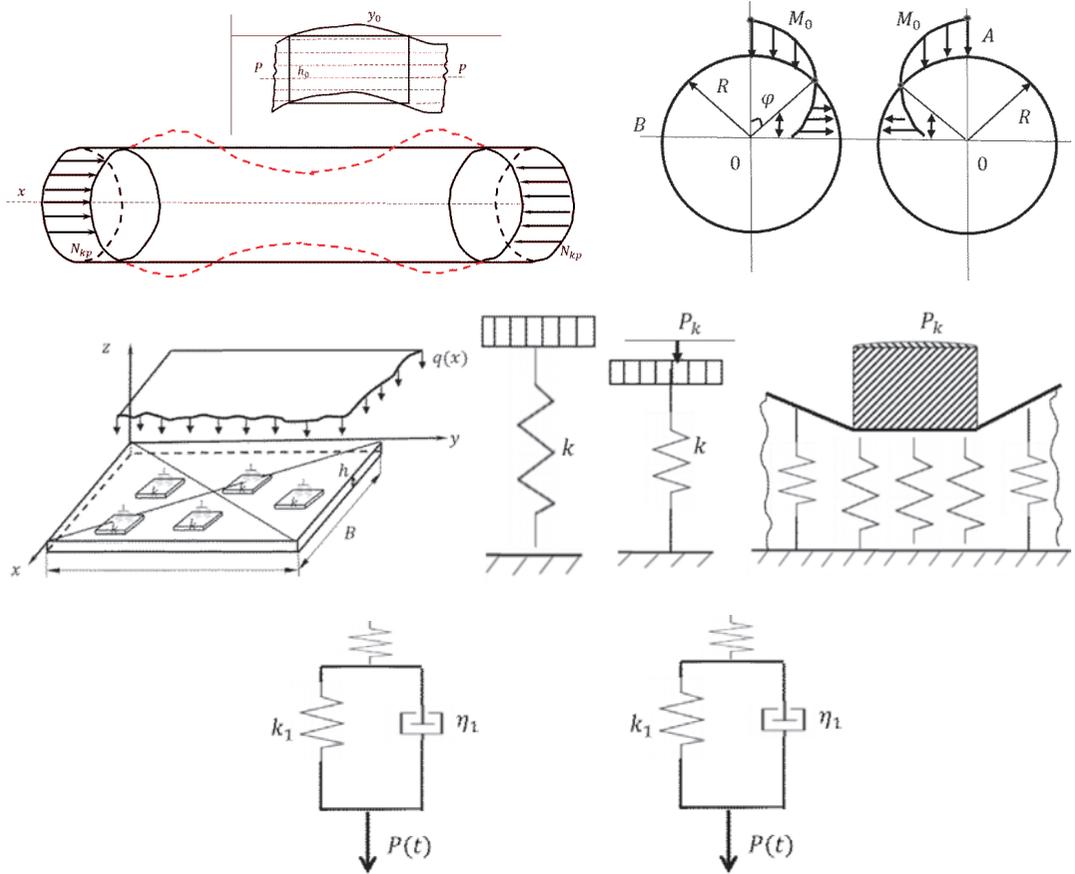


Рисунок 2 – Модели функционирования продольной критической нагрузки и модель реакции типа Винклера

Для моделей рисунка 2 очевидно

$$N_{кр} = -N_1 \frac{d^2W}{dx^2}, P_{\text{реак.сила}} = kW$$

$$\frac{dp}{dt} + \frac{k_1 + k_2}{\eta_1} P = k_2 \frac{dW}{dt} + \frac{k_1 k_2}{\eta_1} W, \text{ демпфер участвует в промежуточных процессах}$$

технологии  $k \gg \eta$  ;

$$\frac{dp}{dt} + \frac{k_2}{\eta_1} P = (k_1 + k_2) \frac{dW}{dt} + \frac{k_1 k_2}{\eta_1} W, \text{ демпфер участвует в промежуточных процес-}$$

сах технологии  $k \gg \eta$  .

Масса смеси в продольном направлении в зависимости от значений  $\epsilon(x)$  цепной двухмассовой системы определим:

$$m_1 = \int_0^x \frac{\rho_0}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(h-a)^2}{2\sigma^2}} dh, \quad \sigma = 0,4; \quad a = 0,2; \quad \epsilon(x) = \frac{1}{x} \quad (1.4)$$

$$m_2 = \int_0^x \frac{\rho_0}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(h-a)^2}{2\sigma^2}} dh, \quad \sigma = 0,3; \quad a = 0,35; \quad \varepsilon(x) = \frac{1}{1-x}$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} W(x)|_{x=0} &= k_1; \quad \frac{dW}{dx}|_{x=0} = \eta_1, \\ \frac{dW^2}{dx^2}|_{x=1} &= \frac{k_1 + k_2}{\eta_1}; \quad \frac{dW^3}{dx^3}|_{x=1} = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

здесь  $h$  толщина эквивалентного слоя,  $a = m_x$  – математическое ожидание;  $\sigma = \sqrt{D(x)}$  – среднеквадратическое отклонение;  $D(x)$  – дисперсия;  $\rho$  – плотность.

Масса, жесткость, вязкость, теплопроводность определяются:

$$\begin{aligned} m(x) &= \int_L P(s) ds, \quad k(x) = \int_L k_j W(x) dm, \\ B(x) &= \int_L \eta_j \frac{dW}{dx} dm, = \int_L \frac{1}{x} \frac{dW}{dx} T_j W(x) dW, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где  $T_{кр}$  – теплоемкость.

**2. Распределение возмущений, вызванных промежуточный внутренней неустойчивостью пристеночного слоя после снятия условий под сосредоточенной нагрузкой в зоне кристаллизации.**

Математическая модель [3], [4].

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{k_1 + k_2}{\eta_1} W(x) = (1-x)(C_1 x + C_2) \tag{2.1}$$

границные условия

$$\begin{aligned} W(x)|_{x=0} &= k_1; \quad \frac{dW}{dx}|_{x=0} = \eta_1, \quad \varepsilon(x) = \frac{1}{x}, \\ \frac{dW^2}{dx^2}|_{x=1} &= \frac{k_1 + k_2}{\eta_1}; \quad \frac{dW^3}{dx^3}|_{x=1} = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.2):

$$W(x) = C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2} \left( x^2 - x + \frac{2}{\alpha^2} \right) C_1 + \frac{1}{\alpha^2} (x-1) C_2, \quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{k_1 + k_2}{\eta_1}} \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в граничные условия (2.2), определим произвольные постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  и подставим их в решение:

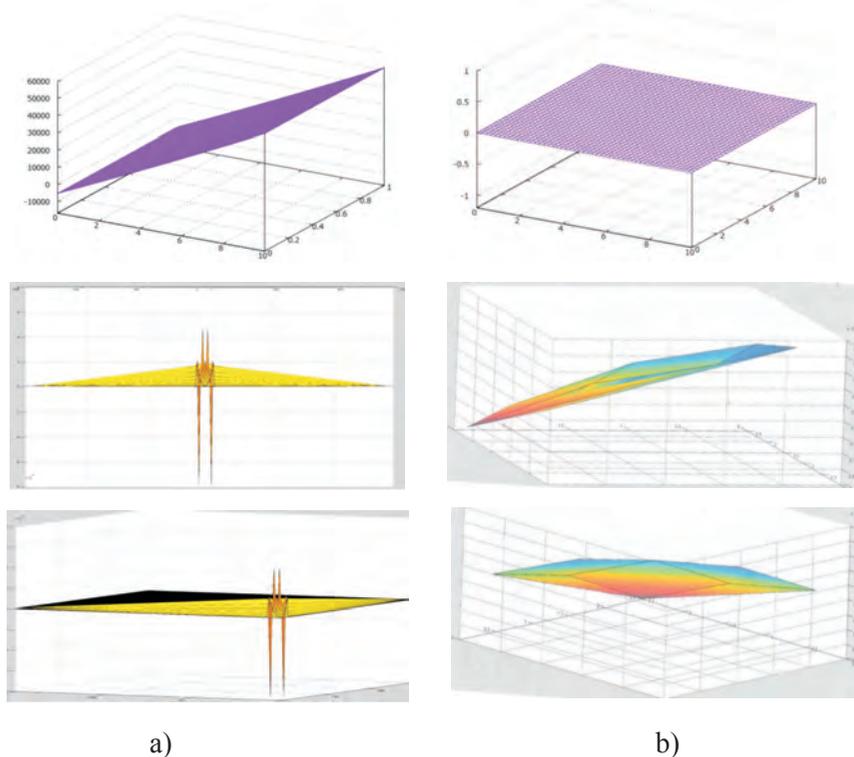
$$W(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} [(2 - \alpha^2)\alpha^2 - 2\alpha^2(k_1 + \eta_1)] ch\alpha(1-x) + [\alpha^2(ch\alpha - \alpha sh\alpha) - \alpha^2(k_1 + \eta_1)] \right\} \tag{2.4}$$

$$+ \eta_1) \left[ x^2 - x + \frac{2}{\alpha^2} \right] \left. \right\} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta} \frac{1}{\alpha} \{ [2(\alpha^2 k_1 + 2\eta_1) - \alpha(\alpha^2 + 2\eta_1)] ch\alpha - 2(\alpha^2 + 2\eta_1) sh\alpha \} (1-x)$$

здесь  $\Delta = (1 + \alpha) sh\alpha - e^\alpha$ ,  $\alpha = \sqrt[3]{\frac{k_1 + k_2}{\eta_1}}$

- a)  $k_1 = 75,6; k_2 = 75,6; \eta_1 = 0,94; \eta_2 = 0$
  - b)  $k_1 = 95; k_2 = 386; \eta_1 = 0,765; \eta_2 = 0$
- (2.5)

На рисунке 3 приведены изгибные деформации формы поперечного сечения и центрального слоя цепной двухмассовой системы зоны кристаллизации.



**Рисунок 3** – Изгибная деформация формы поперечного сечения зоны кристаллизации при неоднородных граничных условиях и:  
 а) при  $k_1 = 75,6, \eta_1 = 0,94$  б)  $k_1 = 25, k_2 = 386, \eta_1 = 0,765$

**3. Распределение возмущений, вызванных промежуточный внутренней неустойчивостью пристеночного слоя после снятия условий сосредоточенного момента в зоне охлаждения.**

Математическая модель [4], [5].

$$\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{k_1 + k_2}{\eta_1} W(x) = (C_1 x + C_2) x \tag{3.1}$$

граничные условия (формула изобретения)

$$W(x)|_{x=0} = k_1; \quad \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} = \eta_1, \quad \varepsilon(x) = \frac{1}{x},$$

$$\left. \frac{dW^2}{dx^2} \right|_{x=1} = k_2; \quad \left. \frac{dW^3}{dx^3} \right|_{x=1} = 0 \tag{3.2}$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.1):

$$W(x) = C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2} \left( x^2 - \frac{1}{\alpha^2} \right) C_1 + \frac{1}{\alpha^2} x C_2, \quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{k_1 + k_2}{\eta_1}} \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в граничные условия (3.2), определим произвольные постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  и подставим их в решение:

$$W(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} [(\alpha^2 - 3)k_1 - (\eta_1 - k_2)] sh\alpha(1-x) + 2(\eta_1 - k_2) sh\alpha x + 2\alpha k_1 e^{-\alpha x} \right\} +$$

$$\frac{1}{\Delta} \left\{ [(\alpha + 1)e^\alpha k_1 - (\eta_1 - k_2)] ch\alpha + (\eta_1 - k_2)e^\alpha \right\} + (\alpha^2 x^2 - 1) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\Delta} \left\{ [\alpha(\alpha^2 + 3)k_1 + \alpha k_2 - (\alpha^2 - 3)\eta_1] ch\alpha + 2\alpha k_2 + (\alpha^2 - 3)e^\alpha \eta_1 \right\} \tag{3.4}$$

здесь  $\Delta = (2\alpha^2 - \alpha - 6)sh\alpha + \alpha(\alpha^4 + 4), \quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{k_1 + k_2}{\eta_1}},$

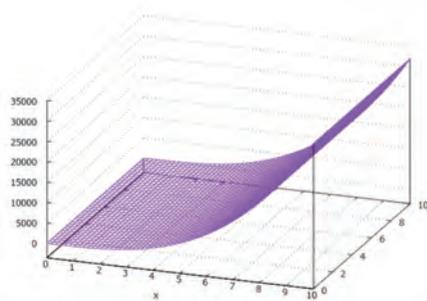
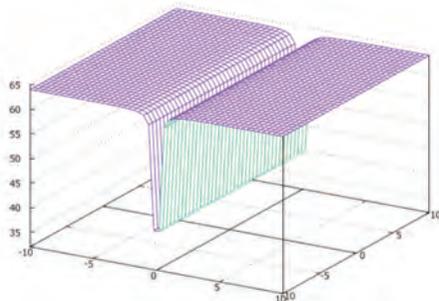
- a)  $k_1 = 25; k_2 = 386; \eta_1 = 0,765;$
- b)  $k_1 = 25; k_2 = 786; \eta_1 = 0,765.$

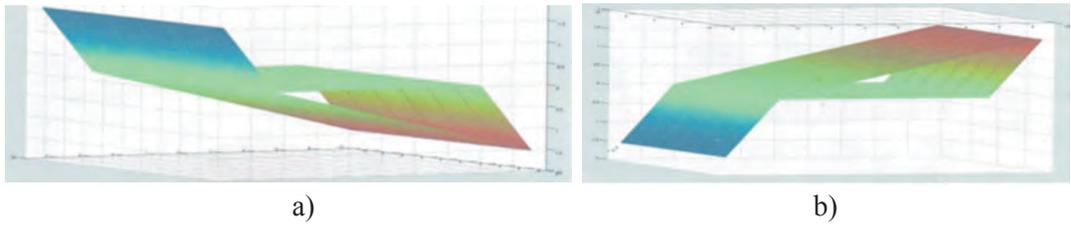
На рисунке 4 приведены изгибные деформации формы поперечного сечения пред-центрального слоя цепной двухмассовой системы зоны плавления.

**4. Собственное колебание.**

В частности, если продольная критическая сила  $N_1(x) = 0$ , то

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \varepsilon(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] = 0 \tag{4.1}$$





**Рисунок 4** – Изгибные деформация формы поперечного сечения предцентрального слоя цепной двухмассовой системы зоны плавления при неоднородных граничных условиях:

а) при  $k_1 = 75,6, \eta_1 = 0,94$  б)  $k_1 = 25, k_2 = 386, \eta_1 = 0,765$

граничные условия

$$W(x)|_{x=0} = k_1; \frac{dW}{dt} \Big|_{x=0} = \eta, \tag{4.2}$$

$$W(x)|_{x=1} = k_2; \frac{dW}{dt} \Big|_{x=1} = \eta_1, k_1 = k_2$$

Если  $\epsilon(x) = \frac{1}{x}$ , то  $W(x) = (50x^3 - 15x^2 + x)\eta_1 + k_1$  (4.3)

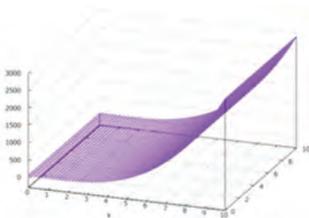
Если  $\epsilon(x) = \frac{1}{1-x}$ , то  $W(x) = \frac{1}{9}(50x^3 - 105x^2 + 54x)\eta_1 + k_1$  (4.4)

Если  $\epsilon(x) = \frac{1}{\sin \omega x}$ ,  $\omega = \frac{\pi}{4}$ , а граничные условия

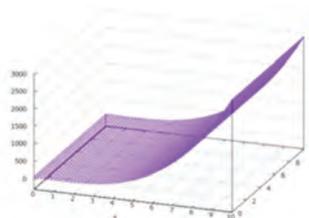
$$W(x)|_{x=0} = 0; \frac{dW}{dt} \Big|_{x=0} = 0, \Gamma' - \text{Грина}$$

$$\frac{dW^2}{dx^2} \Big|_{x=1} = 0; \frac{dW^3}{dx^3} \Big|_{x=1} = 0, \Gamma'''$$

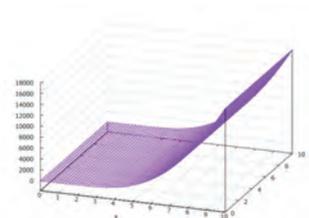
то  $W(x) = \frac{40}{\pi^4} \left[ 768 \sin \frac{\pi}{4} x + \sqrt{2} \pi^3 x^3 + 3\sqrt{2}(4 - \pi) \pi^2 x^2 - 192 \pi x \right]$  (4.5)



а)  $k_1 = 44; k_1 = 44$   
 $\eta_1 = 0,66;$



б)  $k_1 = 89; k_1 = 89;$   
 $\eta_1 = 0,87;$



в)  $k_1 = 386; k_1 = 386;$   
 $\eta_1 = 0,92;$

**Рисунок 5** – Изгибные деформация формы поперечного сечения предцентрального слоя цепной двухмассовой системы при неоднородных граничных условиях

### **Выводы:**

Предложена математическая модель решения технической задачи для последовательно двигающихся жидкостей с несущественной разницей вязкостей в механической системе.

Предцентральные слои (отличия от центрального слоя):

– средняя эффективная нефтенасыщенность на 5% больше, чем в центральном слое; – давление на 45 % выше, чем в центральном слое (МПА); – технологическая температура одинаковая ( $T^{\circ}\text{C}$ ); – давление насыщения одинаковое (МПА); – газосодержащие на 34,5 % выше, чем в центральном слое ( $\text{м}^3/\text{т}$ ); – плотность на 2,2 % меньше, чем в центральном слое ( $\text{г}/\text{см}^3$ ); – вязкость на 67 % меньше, чем в центральном слое (МПА\*с), а в зоне ВНК на 85,7% меньше, чем в центральном слое.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1 Божанов Е.Т., Енсебаева М.З., Дадаева А.Н. О математической модели выпучивания цепной двухмассовой системы, применительно к транспортировке нефтяной смеси // Вестник КазНУ. – 2018. – №2 (126). – С.550-555.

2 Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Секеев К.М. Надежность технологического потока перекачки нефти как система процесса // Вестник Казахского национального технического университета им. К.И. Сатпаева. – 2012. – № 5(93). – С. 40-48.

3 Божанов Е.Т., Буганова С.Н., Токибетов Ж.А. Надежность динамического расчета перекачки нефтяной смеси в цепной четырехмассовой системе с учетом тепловолнового воздействия. Сборник докладов Второго Международного Джолдасбековского Симпозиума «Механика Будущего», 1-5 марта 2021 года: Электронный. – Алматы, 2021. – С.27-34.

4 Божанов Е.Т., Токибетов Ж.А., Буганова С.Н. Решение первой краевой задачи для цепной четырехмассовой эллиптической системы с параметром. Сборник тезисов Традиционной международной апрельской математической научной конференции, посвященной 75-летию академика НАН РК Кальменова Т.Ш., 5-8 апреля 2021 года: Электронный. – Алматы, 2021. – С.148-149.

5 Цейтлин А. И., Егорова О. Д. Гармонические колебания многомассовых систем с частотно-независимым внутренним трением, описываемым комплексной и упруговязкой моделями // Исследования по динамике сооружений: сб. науч. тр./ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. – 1984. – С. 32-47.

6 Божанов Е.Т., Сугиров Д.У., Ержанов К.Ш. Математическая модель турбулизирующей установки в прямоугольном канале // Вестник НПЦ «Перерабатывающая и пищевая промышленность». – 2004. – № 2. – С. 40–45.

### **REFERENCES**

1 Bozhanov E. T., Yensebaeva M. Z., Dadaeva A. N. On the mathematical model of buckling of a chain two-mass system as applied to the transportation of an oil mixture // Bulletin of KazNITU. - 2018. - №2 (126), - P. 550-555.

2 Bozhanov E. T., Ibraimkulov A.M., Sekeev K. M. The reliability of the technological flow of oil pumping as a process system // Bulletin of the K. I. Satpayev Kazakh National Technical University. – 2012. – № 5(93). – Pp. 40-48.

3 Bozhanov E. T., Buganova S. N., Tokibetov Zh. A. The reliability of dynamic calculation of an oil mixture pumping in a chain four-mass system taking into account the thermal wave effect. Collection of reports of the Second International Dzholdasbekov Symposium “Mechanics of the Future”, March 1-5, 2021: Electronic. - Almaty, 2021. - p. 27-34.

4 Bozhanov E. T., Tokibetov Zh. A., Buganova S. N. Solution of the first boundary value problem for a chain four-mass elliptic system with a parameter. Collection of abstracts of the Traditional International April Mathematical Scientific Conference dedicated to the 75th anniversary of Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan T. S. Kalmenov, April 5-8, 2021: Electronic. - Almaty, 2021. - pp. 148-149.

5 Tseitlin A. I., Egorova O. D. Harmonic oscillations of multi-mass systems with frequency-independent internal friction described by complex and elastic-viscous models //Research on the dynamics of structures: collection of scientific works. /TSNIISK named after V. Kucherenko. - 1984. - pp. 32-47.

6 Bozhanov E. T., Sugirov D. U., Yerzhanov K. Sh. Mathematical model of a turbulizing installation in a rectangular channel//Bulletin of the NPC "Processing and food industry". - 2004. - No. 2. - pp. 40-45.

***E. T. БОЖАНОВ, С. Н. БУГАНОВА, Ж. А. ТОЛГАНБАЕВ***

*Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті. Қ. И. Сатпаев,  
Алматы, Қазақстан  
Халықаралық білім беру корпорациясы, Алматы, Қазақстан*

### **ЖЫЛУ АЛМАСТЫРҒЫШТАҒЫ АҒЫНДЫ ТУРБУЛИЗАЦИЯЛАУҒА АРНАЛҒАН АППАРАТҚА КІРГЕН КЕЗДЕ ТІЗБЕКТИ ЕКІ МАССАЛЫҚ ЖҮЙЕНІҢ ҚАБЫРҒА ҚАБАТЫНЫҢ БУЛАНУЫ ЖӘНЕ ТЕРБЕЛУІ**

*Турбулизация аппаратына кірген кезде жылу беруді қарқындатудың математикалық моделі жасалды. Екі массалық тізбекті жүйенің қабырға қабатының дөңестенуі мен тербелісінің рационалды формулалары ұсынылған. Орталыққа дейінгі қабаттың аралық ішкі тұрақсыздығынан туындаған бұзылулардың үлестірімі қаттылық, кристаллизация және салқындату аймақтарында концентрацияланған ығысу жүктемесі жағдайларын жойғаннан кейін алынған.*

***Түйін сөздер:** құбырлы құрылым, орталыққа дейінгі қабат, орталық аномальды қабат, ауытқулар, тұрақтылық, мұнайдың қанығуы.*

***E. T. BOZHANOV, S. N. BUGANOVA, A. ZH. TOLGANBAEV***

*K. I. Satpayev Kazakh National Research Technical University, Almaty, Kazakhstan  
International Educational Corporation, Almaty, Kazakhstan*

### **BUCKLING AND OSCILLATION OF THE WALL LAYER OF THE CHAIN TWO-MASS SYSTEM AT THE ENTRANCE TO THE APPARATUS FOR TURBULIZING THE FLOW IN THE HEAT EXCHANGER**

*A mathematical model of heat exchange intensification at the entrance to the turbulence apparatus has been developed. Rational formulas for buckling and oscillation of the wall layer of a chain two-mass system are proposed. Distributions of perturbations caused by the internal instability of the pre-central layer after abolishing conditions under a focused shear load in the zones of solidification, crystallization and cooling are obtained.*

***Keywords:** tubular structure, precentral layer, central anomalous layer, perturbations, stability, oil saturation.*