УДК 514.123.3
https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.166

Р. К. КЕРИМБАЕВ, Л. С. СПАНКУЛОВА*

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
Алматы, Казахстан*

СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭРРОУ-ПРАТТА С КАСАТЕЛЬНОЙ К ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

В статье изучена задача определения некоторых свойств функций полезности с использованием геометрической интерпретаций значения коэффициента Эрроу - Пратта. В частности, раскрыты геометрические свойства коэффициента Эрроу-Пратта, которая определяет расстояние от начало координат до прямой параллельной к касательной прямой в точке, где вычисляется этот коэффициент. Предполагается, что значение функций полезности положительно, а область определения – действительная прямая. Следовательно, возрастание и убывание значения коэффициента определяет выпуклость или вогнутость функции полезности. С возрастанием значения коэффициента Эрроу-Пратта касательная прямая удаляется от начала координат. Этот процесс описывает выпуклость функций полезности. Наш подход заключается в том, что с помощью касательной прямой и прямой параллельной к касательной со свободным членом, связанный с дисперсией переменных и коэффициентом Эрроу-Пратта мы определяем поведение функции полезности: монотонность, выпуклость. Приведены двадцать четыре различных вариантов расположения этих прямых относительно начала координат, которые разделены на четыре группы, в зависимости от знаков первой и второй производной функций полезности в точке, где проходит касательная прямая.

***Ключевые слова**: коэффициент Эрроу-Пратта, функция полезности, гессиан, якобиан, аналитическая геометрия.*

Введение. Цель этого исследования заключается в том, чтобы установить связь коэффициентов Эрроу-Пратта с касательной к функции полезности. В экономике функции полезности можно исследовать двояко: во-первых, эмпирически – как способ описать наблюдаемое поведение в ряде контекстов, например, финансовых решениях; во-вторых, теоретически – как исследование свойств этих функций, пригодных для описания ряда экономических задач. В рамках этого второго подхода, их авторы всегда и без исключения мотивируют свои постановки задач реальными случаями – например, предпочтения на множестве портфелей из нескольких активов с разным уровнем риска, или мера отношения к рискам, накладывающийся друг на друга. По этим темам существует обширная литература [1].

Методология и результаты исследования. Теория отношения к риску впервые появляется в работе [2], где излагаются два типа отношения людей к риску: предпочтение риска и неприятие риска.

В [3] и [4] предложено использовать в качестве меры неприятия риска отношение второй производной функции полезности $u(x)$ к первой, взятое с отрицательным знаком: $-u''(x)/u'(x)$, где $u = u(x)$ – функция, отражающая зависимость общей полезности от количеств потребляемых благ. Вогнутая функция полезности характеризует неприятие риска, пропорциональное степени вогнутости функции. Эта мера является

* E-mail корреспондирующего автора: spankulova@mail.ru

инвариантной относительно линейных преобразований, и имеет постоянное значение для линейных и экспоненциальных функций полезности.

В [5] подробно исследовал функцию полезности, зависящую от одной переменной. Существует также функция полезности, которая зависит от множества переменных, например, функция Кобба-Дугласа.

Проведенный в [6] анализ показал, что функции полезности формулируются следующим образом:

1. $u(x) = Ax^{\propto}, \quad 0 < \propto < 1, \; r_э(x) = \dfrac{1-\propto}{x}$;

2. $u(x) = 1 - e^{-\propto x}, \quad \propto > 0, \; r_э(x) = \propto$;

3. $u(x) = \log_{\propto}(x1), \quad \propto > 0, \quad \propto \neq 1;$, $r_э(x) = \dfrac{1}{x+1}$;

4. $u(x) = ax - bx^2, \quad a, b > 0, \quad x \in \left[0, \dfrac{a}{2b}\right];$, $r_э(x) = \dfrac{2b}{a-2bx}$, ,

где $r_э(x)$ – коэффициент Эрроу-Пратта и рассчитывается по формуле $r_э(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$.

Функция полезности от одной переменной. Для исследования функций полезности $u(x)$ введем переменную y и рассмотрим уравнение $y = u(x)$. Проведем касательную прямую к этому уравнению в точке (x_0, y_0). Обозначим переменные в уравнении касательной прямой большими латинскими буквами. Получим общее уравнение касательной прямой $Y - y_0 = u'(x_0)(X - x_0)$ или $u'(x_0)X - Y = u'(x_0)x_0 - y_0$(1). Если математическое ожидание переменной x равно нулю, т.е. $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0$, то математическое ожидание функции x^2 равно дисперсии, т.е. $\delta^2 = E((x - E(x)^2) = E(x^2)$. Отсюда, разложив $u(x_0 - x)$ в ряд Тейлора с точностью до x_0^2 , и приравнивая его к $-E(u(x_0 + x)) = E\left(u(x_0) + u'(x_0)x + \dfrac{1}{2}u''(x_0)x^2\right) \simeq u(x_0) + \dfrac{1}{2}u'(x_0)\delta^2$, получим выражение $-xu'(x_0) = \dfrac{1}{2}\delta^2 u''(x_0)$. Тогда получим коэффициент $x = -\dfrac{u''(x_0)\delta^2}{2u'(x_0)}$ Эрроу-Пратта.

Если это же равенство расматривать как уравнение относительно x, то правая часть является расстоянием от начала координат до прямой определенной этим уравнением.

Теперь в уравнении $xu'(x_0) = \dfrac{1}{2}\delta^2 u''(x_0)$ переменную x переобозначим *в* X, а выражение $Xu'(x_0) + \dfrac{1}{2}\delta^2 u''(x_0) = Y$ обозначим Y, получим уравнение прямой в точке x_0 $Xu'(x_0) - Y = -\dfrac{1}{2}\delta^2 u''(x_0)$ (2). Прямая (2) параллельна касательной прямой (1). Теперь вычислим расстояние от прямой $u'(x_0)X - Y + \dfrac{1}{2}\delta^2 u''(x_0) = 0$ до начала координат: $S = \dfrac{\delta^2 \left|u''(x_0)\right|}{2\sqrt{1 + u'(x_0)^2}}$. Далее находим связь между величиной S и коэффициентом $r_э(x_0)$

Эрроу-Пратта: $S=\left|-\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)}\right|\cdot\frac{\delta^2}{2\sqrt{1+\frac{1}{u'(x_0)^2}}}$. Если величина S не зависит от значения x_0, то касательная к кривой $y = u(x)$ во всех точках лежит на одинаковом расстоянии от начала координат. Это может быть прямая и окружность, центр которой находится в начале координат. Поскольку окружность не является функцией, тогда функция полезности $u(x)$ может быть только дугой окружности. Таким образом, если $S(x_0) = const,$ то $u(x) = a + bx$, $a, b > 0$ или $u(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, $0\le x\le r=S$. В первом случае $r_э(x) = 0$. Во втором случае $r_э(x)=-\frac{r^2}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}}$. Т.е. $r_э(x)=-\frac{S^2}{\sqrt{(S^2-S^2)^3}}$, $0\le x\le S$. А если $r_э(x) =$ $= const$, то $u(x)=1-e^{-\propto x}$, $\propto\ge 0$ и $r_э(x) = \propto$. При этом если $r_э(x) = 0$, то функция $u(x)$ линейна. Следовательно, величина $\frac{\delta^2}{2\sqrt{1+\frac{1}{u'(x_0)^2}}}$ также важна. Предположим, что функция $S(x_0)=-\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)}\frac{\delta^2}{2\sqrt{1+\frac{1}{u'(x_0)^2}}}$ монотонна относительно x_0.

В зависимости от знака свободного члена уравнения $u'(x_0)X-Y+\frac{1}{2}\delta^2 u''"(x_0)=0$ функция полезности $u(x)$ будет выпуклая или вогнутая. Если $u''(x_0) > 0$, то функция $u(x)$ вогнутая, если $u''(x)_0 < 0$, то функция $u(x)$ выпуклая. Нам нужно, чтобы $u''(x)_0$ был отрицательным. Но здесь будет несколько случаев, поскольку величина $u'(x)_0$ также присутствует.

В зависимости от значения коэффициентов в уравнении прямых (1), (2) и коэффициента Эрроу - Пратта получаются следующие скалярные величины:

$$\rho(x_0)=\frac{|u'(x_0)x_0-y_0|}{\sqrt{1+u'(x_0)^2}},\ S(x_0)=\frac{\delta^2|u''(x_0)|}{2\sqrt{1+u'(x_0)^2}},\ r_э(x)=-\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)},$$

где $\rho(x_0)$ и $S(x_0)$ – расстояния от начала координат до прямой (1) и (2) соответственно.

1. $u'(x)_0 > 0$, $u''(x)_0 > 0$. Как видно из этих условий, функция полезности $y = u(x)$ в точке x_0 возрастающая и вогнутая, а коэффициент $r_э(x_0) < 0$.

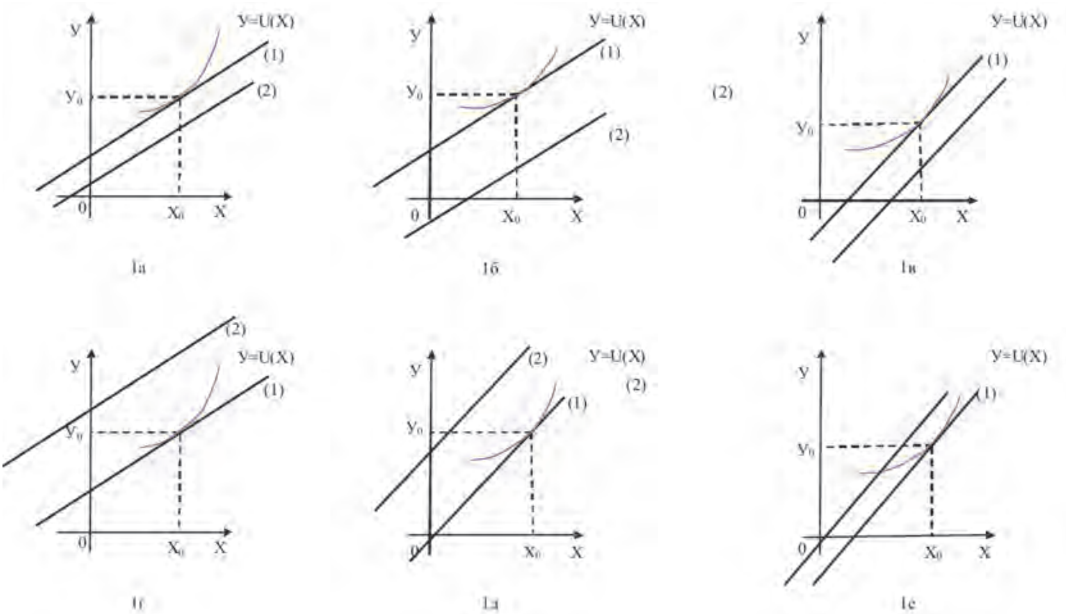

Рисунок 1-6 – Расположение касательной прямой (1), прямой с коэффициентом Эрроу-Пратта (2) относительно начала координат (случай, когда функция полезности – возрастающая и вогнутая)

На рисунках 1-6 показаны все возможные случаи расположения касательной прямой (1), прямой, связанной с коэффициентом Эрроу-Пратта (2) относительно начала координат. Суть графиков в следующем: как показано на рисунках 1а и 1г с возрастанием значения аргумента расстояния от начала координат до прямых (1) и (2) уменьшается, так как функция полезности – возрастающая и вогнутая. На рисунке 1б расстояние от начала координат до прямой (1) уменьшается, а расстояние от начала координат до прямой (2) увеличивается, что связано с возрастанием значения аргумента. А в рисунке 1д, наоборот, расстояние от начала координат до прямой (1) увеличивается, а расстояние от начала координат до прямой (2) уменьшается. В рисунках 1в и 1е, расстояние от начала координат до прямых (1) и (2) одновременно увеличивается.

2. $u'(x_0) > 0$, $u''(x_0) < 0$. В этом случае функция полезности $y = u(x)$ становится возрастающей и выпуклой, $r_э(x_0) > 0$.

Рассмотрим следующие шесть случаев (см. рисунок 7-12).

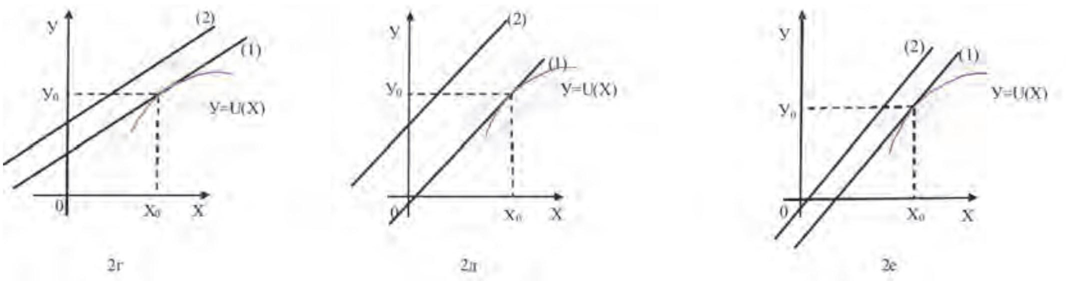

Рисунок 7-12 – Расположение касательной прямой (1), прямой, связанной с коэффициентом Эрроу-Пратта (2) относительно начала координат (случай, когда функция полезности возрастающая и выпуклая)

Суть графиков 2а и 2г на рисунках 7-12 в следующем: с возрастанием значения аргумента расстояния от начала координат до прямых (1) и (2) увеличивается, так как функция полезности – возрастающая и выпуклая. На рисунке 2б расстояние от начала координат до прямой (1) увеличивается, а расстояние от начала координат до прямой (2) уменьшается, что связано с возрастанием значения аргумента. А в рисунке 2д, наоборот, расстояние от начала координат до прямой (1) уменьшается, а расстояние от начала координат до прямой (2) увеличивается. В рисунках 2в и 2е расстояние от начала координат до прямых (1) и (2) одновременно уменьшается.

3. $u'(x_0) < 0$, $u''(x_0) > 0$. В этом случае функция полезности $y = u(x)$ является убывающей и вогнутой, а $r_э(x_0) > 0$.

Суть графиков 3а и 3г на рисунках 13-18, в следующем: с возрастанием значения аргумента расстояния от начала координат до прямых (1) и (2) уменьшается, так как функция полезности – убывающая и вогнутая. На рисунке 3б расстояние от начала координат до прямой (1) уменьшается, а расстояние от начала координат до прямой (2) увеличивается, что связано с возрастанием значения аргумента. А в рисунке 3д, наоборот, расстояние от начала координат до прямой (1) уменьшается, а расстояние от начала координат до прямой (2) увеличивается. В рисунках 3в и 3е расстояние от начала координат до прямых (1) и (2) одновременно уменьшается. 4. $u'(x_0) < 0$, $u''(x_0) > 0$. В этом случае функция полезности $y = u(x)$ становится убывающей и выпуклой, а $r_э(x_0) < 0$.

Суть графиков в следующем: как показано на рисунках 4а и 4г с возрастанием значения аргумента расстояния от начала координат до прямых (1) и (2) уменьшается, так как функция полезности – возрастающая и выпуклая. На рисунке 4б расстояние от начала координат до прямой (1) уменьшается, а расстояние от начала координат до прямой (2) увеличивается, что связано с возрастанием значения аргумента.

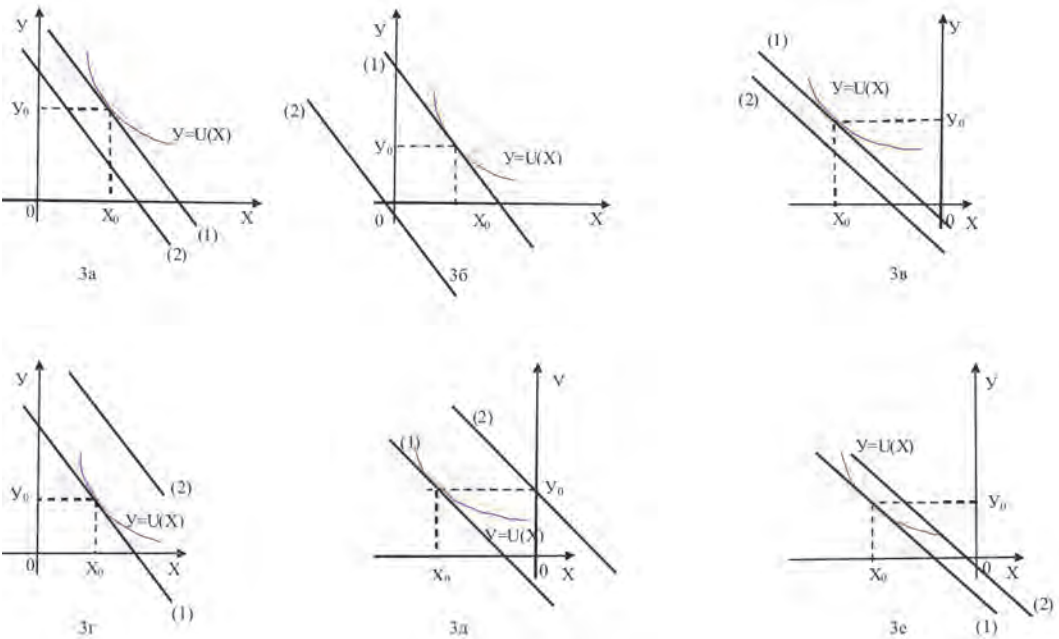

Рисунок 13-18 – Расположение касательной прямой (1), прямой, связанной с коэффициентом Эрроу-Пратта (2) относительно начала координат (случай, когда функция полезности – убывающая и вогнутая)

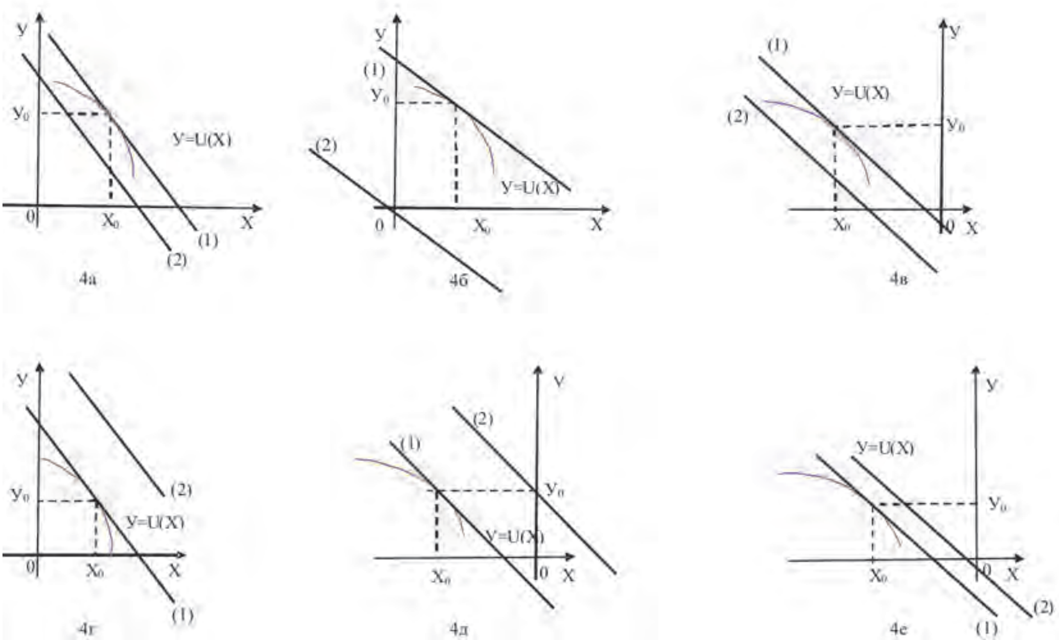

Рисунок 19-24 – Расположение касательной прямой (1), прямой, связанной с коэффициентом Эрроу-Пратта (2) относительно начала координат (случай, когда функция полезности – убывающая и выпуклая)

А в рисунке 4д, наоборот, расстояние от начала координат до прямой (1) увеличивается, а расстояние от начала координат до прямой (2) уменьшается. В рисунках 4в и 4е расстояние от начала координат до прямых (1) и (2) одновременно увеличивается.

Таким образом, в зависимости от расположения прямых (1), (2) относительно начала координат имеем двадцать четыре случая. Эти графики позволяют, не зная вид функции полезности $y = u(x)$ по прямым (1), (2), моделировать функцию полезности $y = u(x)$. Здесь значение величин $S\,(x_0)$, $\rho(x_0)$ и $r_э(x_0)$ зависит от координаты точки x_0.

Исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP09259811). Тема проекта: «Разработка количественной методологии для определения групп населения, готовых поддержать внедрение лекарственного страхования и оценки финансовой устойчивости этого вида страхования в Казахстане»

ЛИТЕРАТУРА

1 Бронштейн Е.М., Фатхиев О.М. Замечание о Санкт-Петербургском парадоксе // Журнал Новой экономической ассоциации . – 2018. –№ 2 (38). – С. –48-53.

2 Aumann R.J. The St. Petersburg Paradox: A Discussion of Some Recent Comments // Journal of Economic Theory. – 1977. –№ 14 (2). – P. –443-445.

3 Pratt J.W. Risk Aversion in the Small and in the Large // Econometrica. – 1964. –№ 32. – С. –122-136.

4 Schoemaker, P.J.H. The Expected Utility Model: Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations // Journal of Economic Literature. – 1982. –№ 2. – С. –529-563.

5 Коровин Д.И. О нахождении функции полезности в теории Неймана-Моргенштерна // Вестник ИГЭУ. – 2018. –№ 4. – С. –83-88.

REFERENCES

1 Bronshteyn Ye.M., Fatkhiyev O.M. Zamechaniye o Sankt-Peterburgskom paradokse // Zhurnal Novoy ekonomicheskoy assotsiatsii . – 2018. – № 2 (38). – S. –48-53.

2 Aumann R.J. The St. Petersburg Paradox: A Discussion of Some Recent Comments // Journal of Economic Theory. – 1977. – № 14 (2). – P. – 443-445.

3 Pratt J.W. Risk Aversion in the Small and in the Large // Econometrica. – 1964. – № 32. – S. –122-136.

4 Schoemaker, P.J.H. The Expected Utility Model: Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations // Journal of Economic Literature. – 1982. –№ 2. – S. –529-563.

5 Korovin D.I. O nakhozhdenii funktsii poleznosti v teorii Neymana-Morgenshterna // Vestnik IGEU. – 2018. – № 4. – S. – 83-88.

Л. С. СПАНҚҰЛОВА, Р. К. КЕРІМБАЕВ

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы, Қазақстан

ЭРРОУ-ПРАТТ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІНІҢ ПАЙДАЛЫЛЫҚ ФУНКЦИЯСЫНЫҢ ЖАНАМАСЫМЕН БАЙЛАНЫСЫ

Мақалада Arrow-Pratt коэффициентінің мәнін геометриялық интерпретациялау арқылы пайдалылық функцияларының кейбір қасиеттерін анықтау мәселесі зерттеледі. Атап айтқанда, координаталар басынан осы коэффициент есептелетін нүктедегі жанама түзуге параллель түзуге дейінгі қашықтықты анықтайтын Arrow-Pratt коэффициентінің геометриялық қасиеттері ашылады. Пайдалылық функцияларының мәні оң, ал анықтау облысы нақты түзу болады деп есептеледі. Демек, коэффициент мәнінің өсуі және кемуі пайдалы функцияның дөңестігін немесе ойыстығын анықтайды. Arrow-Pratt коэффициентінің мәні артқан сайын жанама түзу бастапқы нүктеден алыстайды. Бұл процесс қызметтік функциялардың дөңестігін сипаттайды. Біздің көзқарасымыз мынада: жанама түзудің және айнымалылардың дисперсиясымен және Arrow-Pratt коэффициентімен байланысты еркін мүшесі бар жанамаға параллель түзудің көмегімен біз пайдалы функцияның әрекетін анықтаймыз: монотондылық, дөңес. Бұл сызықтардың координат басына қатысты орналасуының жиырма төрт түрлі нұсқалары келтірілген, олар жанама түзу өтетін нүктедегі пайдалы функциялардың бірінші және екінші туындыларының белгілеріне қарай төрт топқа бөлінеді.

***Түйін сөздер**: Arrow-Pratt коэффициенті, пайдалылық функциясы, гессиан, якобиан, аналитикалық геометрия.*

R. K. KERIMBAYEV, L. S. SPANKULOVA

Al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Kazakhstan

RELATIONSHIP OF THE ARROW-PRATT COEFFICIENTS WITH THE TANGENT TO THE UTILITY FUNCTION

The article discusses a geometric approach for determining some properties of the utility function using the Arrow-Pratt coefficient. In particular, the geometric properties of the Arrow-Pratt coefficient are disclosed, it turned out that the Arrow-Pratt coefficient determines the distance from the origin to the straight line parallel to the tangent line at the point where the Arrow-Pratt coefficient is calculated. Therefore, an increase and decrease in the value of this coefficient determines the convexity or concavity of the utility function. With an increase in the value of the Arrow-Pratt coefficient, the tangent line moves away from the origin. This process describes the convexity of the utility function as a function of location from the origin. There are two concepts: the expected utility model and the utility function. Our approach is that due to a tangent line and a straight line parallel to the tangent with a free term, associated with the variance of variables and the Arrow-Pratt coefficient, we determine the behavior of the utility function: monotonicity, convexity, etc. The location of these lines relative to the origin gives us twenty-four different options, which are divided into four groups, depending on the signs of the first and second derivatives of the utility function at the point where the tangent line passes.

***Keywords**: Arrow-Pratt coefficient, utility function, Hessian, Jacobian, analytic geometry.*