УДК 519.87
https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.167

Ш. Д. МАХМУДОВА[1], А. Д. МАХМУДОВ[2], А. Н. УРАЗГАЛИЕВА[1]*

[1]Западно-Казахстанский аграрно-технический университет имени Жангир хана,
г. Уральск, Казахстан
[2]Западно-Казахстанский инновационно-технологический университет,
г. Уральск, Казахстан

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ В ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

В статье рассматривается применение теории оптимального управления для решения уравнений Гамильтона -Якоба с фазовыми ограничениями.

Предлагается метод конструирования обобщенных решений с помощью задач оптимального управления. Приводятся результаты и анализ численных экспериментов, условий существования равновесных ситуаций в бескоалиционных дифференциальных играх нескольких лиц, а именно условия существования равновесных ситуаций в бескоалиционных дифференциальных играх нескольких лиц, определяя действие по Гамильтону, получены необходимые условия в форме уравнений Гамильтона-Якоби.

Теория игр как прикладная математическая теория используется для понимания и объяснения механизмов, которые используются, когда люди принимают решение. Теория способствует функционированию логики стратегического планирования и взаимосвязи между людьми. Теория игр как метод прикладной математики применяется для изучения поведения в разных ситуациях, помогает понять поведение экономических субъектов.

Теория имеет много приложений может быть использована в разных областях как стратегические игры, области администрирования, экономики, исследовании искусственного элемента. В статье излагается математический метод изучения оптимальных ситуаций в теории игр.

***Ключевые слова**: дифференциальная игра; динамические системы; ситуация равновесия; равновесная траектория; функция Гамильтона-Якоби; уравнений Эйлера-Лагранжа; условия Вейерштрасса-Эрдмана.*

Введение. Рассматривается дифференциальная игра нескольких лиц, состояние которой характеризуется в каждый момент времени фазовым вектором $x(t)$ n-мерного евклидова пространства, при заданных начальных условиях и изменяющееся в соответствии с дифференциальным уравнением вида[1]:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_1(t), ..., u_i(t), ..., u_N(t)),\ t \in [t_0, t_f]\ , \tag{1}$$

С начальными условиями

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

Материалы и методы исследования

Функция Гамильтона $N_i(t)$ для каждого игрока определена следующим образом[1]:

$$\begin{aligned} H_i(t) &= \max_{u_i(t)\in U_i(t)} \prod\nolimits_i \left(t, x(t), u_1(t), ..., u_i(t), ..., u_N(t), \psi_i(t)\right) = \\ &= \psi_i(t) f\left(t, x(t), u(t) \middle\| u_i^p(t)\right) + h_i\left(t, x(t), u(t) \middle\| u_i^p(t)\right),\ i = \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{3}$$

* E-mail корреспондирующего автора: urazgalieva.akmaral@mail.ru

Функция Гамильтона i – го игрока есть непрерывная функция времени, то есть не зависит от программной стратегии $u_i(t)$ этого игрока. Из условия (3) очевидно, что

$$\prod_i \left(t, x(t), u(t) \middle\| u_i\,(t), \psi_i(t)\right) \le \prod_i \left(t, x(t), u(t) \middle\| u_i^p(t), \psi_i(t)\right) = H_i(t), \tag{4}$$

где

$$u_i(t) \in U_i(t),\, t \in [t_0, t_f],\, i = \overline{1,N}.$$

По постановке задачи[1] функция $u_i(t)$ имеет конечное число точек разрыва. Пусть τ – одна из них.

Перейдя к пределам в неравенстве (4):

$$\lim_{t\to\tau-0} \prod_i \left(t, x(t), u(t) \middle\| u_i\,(t), \psi_i(t)\right) \le \lim_{t\to\tau-0} \prod_i \left(t, x(t), u(t) \middle\| u_i^p(t), \psi_i(t)\right) =$$
$$= \lim\nolimits_{t\to\tau-0} H_i(t),\, i = \overline{1,N}.$$

Отсюда следует

$$\prod_i \left(\tau, x(\tau), u(\tau) \middle\| u_i\,(\tau-0), \psi_i(\tau)\right) \le H_i(\tau-0),\, i = \overline{1,N}.$$

Из полученного неравенства с учетом условия (3) имеем:

$$H_i(\tau) = \max\nolimits_{u_i(\tau-0)\in U_i(\tau)} \prod_i \left(\tau, x(\tau), u(\tau) \middle\| u_i^p(\tau-0), \psi_i(\tau)\right) \le H_i(\tau-0). \ .$$

С другой стороны, по условию (4), получим:

$$H_i(\tau-0) = \lim_{t\to\tau-0} \prod_i \left(t, x(t), u(t) \middle\| u_i^p(t), \psi_i(t)\right) =$$
$$\prod_i \left(\tau, x(\tau), u(\tau) \middle\| u_i^p(\tau-0), \psi_i(\tau)\right) =$$
$$= \lim_{u_i\to u_i(\tau-0)} \prod_i \left(\tau, x(\tau), u(\tau) \middle\| u_i\,(\tau-0), \psi_i(\tau)\right) \le$$
$$\le \prod_i \left(\tau, x(\tau), u(\tau) \middle\| u_i^p(\tau), \psi_i(\tau)\right) = H_i(\tau) \quad i = \overline{1,N}.$$

Итак, мы получили неравенства:

$$H_i(\tau-0) \le H_i(\tau) \ \text{ и } H_i(\tau-0) \ge H_i(\tau), \quad i = \overline{1,N},$$

из которых следует, что

$$H_i(\tau-0) = H_i(\tau), \quad i = \overline{1,N},$$

То есть, функция $H_i(\tau)$ – непрерывна слева в точке τ.

При условии, что $t \to \tau + 0$, рассуждая аналогично с неравенства (4), получаем непрерывность функции Гамильтона $H_i(\tau)$ в точке справа.

Итак, мы получили, что $H_i(t)$ непрерывна во всех точках отрезка $[t_0, t_f]$.

Дальнейшие рассуждения будут проводиться с допущением, что функция Гамильтона $H_i(t), \quad i = \overline{1,N}$ гладкая.

Условия непрерывности функций $\psi_i(t)$ и $H_i(t)$ в точках излома $\dot{x}$ называются условиями Вейерштрасса – Эрдмана [5] и записываются в виде:

$$H_i(\tau+0)=H_i(\tau-0),\quad i=\overline{1,N},$$

$$\psi_i(\tau+0)=\psi_i(\tau-0),\quad i=\overline{1,N}.$$

Рассмотрим функционал для каждого игрока, имея функцию Гамильтона (3):

$$\begin{gathered} S_i\left(x(\cdot),u(\cdot)/u_i(\cdot),\psi_i(\cdot)\right)=g_i(x(t_f))+ \\ +\int_{t_0}^{t_f}\left[H_i\left(t,x(t),u(t)/u_i(t),\psi_i(t)\right)-\psi_i(t)x(t)\right]dt,\quad i=\overline{1,N} \end{gathered}\tag{5}$$

Здесь проведена операция максимизации по допустимому управлению $u_i(t)$ i- го игрока подынтегральной функции. Функционал $S_i(*)$ из (5) назовем действием по Гамильтону [3] i - го игрока.

Из условий

$$\begin{gathered} \prod\nolimits_i\left(t,x(t),u_1(t),...,u_N(t),\psi(t)\right)=h_i(t,x(t),u_1(t),...,u_N(t))+ \\ \psi_i(t)f(t,x(t),u_1(t),...,u_N(t)),\quad i=\overline{1,N}; \\ \prod\nolimits_i\left(t,x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\right)=\max_{u_i(t)\in U_i(t)}\prod\nolimits_i\left(t,x^p(t),u^p(t)\|u_i(t),\psi_i(t)\right) \end{gathered}\tag{6}$$

и (3) следует, что на ситуации равновесия $u^p(\cdot)$ и соответствующей равновесной траектории $x^p(\cdot)$ существуют такие функции $\psi_i(\cdot),\ i=\overline{1,N}$, для которых верно соотношение

$$S_t^{u_i(\cdot)}\left(u^p(\cdot),x^p(\cdot),\psi_i(\cdot)\right)=S_i\left(x^p(\cdot),u^p(\cdot)/u_i(\cdot),\psi_i(\cdot)\right),\quad i=\overline{1,N}$$

Учитывая последнее равенство, вариация действия $S_i(*)$ из (5) в ситуации равновесия по фазовой переменной и вариация по сопряженным переменным $\psi_i(t),\ i=\overline{1,N}$, приводят к системе уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t)=-\dfrac{\partial H_i(t,x^p(t),u^p(t)\|u_i(t),\psi_i(t))}{\partial x},\quad i=\overline{1,N} \\ \dot{x}(t)=-\dfrac{\partial H_i(t,x^p(t),u^p(t)\|u_i(t),\psi_i(t))}{\partial \psi_i},\quad i=\overline{1,N} \end{cases}\tag{7}$$

Здесь $\dfrac{\partial H_i(*)}{\partial x}=\dfrac{\partial H_i}{\partial x^{(1)}},...,\dfrac{\partial H_i}{\partial x^{(n)}},\dfrac{\partial H_i(*)}{\partial \psi}=\dfrac{\partial H_i}{\partial \psi^{(1)}},...,\dfrac{\partial H_i}{\partial \psi^{(n)}}$.

Система уравнений (7) не содержит управления i-го игрока $u_i(t)$ и является аналогом Гамильтоновых систем в механике [6;7].

Введем обозначение

$$L_i\left(t,x(t),\dot{x}(t),u(t)/u_i(t),\psi_i(t)\right)=H_i\left(t,x(t),u(t)/u_i(t),\psi_i(t)\right)-\psi_i(t)\dot{x}(t),\quad i=\overline{1,N}.\tag{8}$$

Здесь функция $L_i(*)$ является аналогом функции Лагранжа (лагранжиан) *i*-го игрока[6;7]. Учитывая определение функции Лагранжа(8), дадим определение функции Гамильтона в виде:

$$H_i(*) = L_i(*) + \psi_i(t)\dot{x}(t), \quad i = \overline{1, N}.$$

Из (6) и (3) следует, что функции $L_i(*)$ из (8) можно представить в виде:

$$L_i(*) = \max_{u_i(t)\in U_i(t)} L_i^{u_i(\cdot)}(*), \quad i = \overline{1, N},$$

где $L_i^{u_i(\cdot)}\left(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), \psi_i(t)\right) = H_i\left(t, x(t), u(t)\right) + \psi_i(t)\left(f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)\right), \quad i = \overline{1, N},$

В выражениях для $L_i(*)$, $L_i^{u_i(\cdot)}(*)$, когда функция $\psi_i(t)$ фиксирована, будем считать функции $L_i(*)$, $L_i^{u_i(\cdot)}(*)$ зависящими соответственно только от $\left(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)/u_i(t)\right)$ и $\left(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)\right)$.

Из определения $L_i(*)$ (8) имеем, что

$$\frac{\partial L_i(*)}{\partial x} = \frac{\partial H_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial L_i(*)}{\partial x} = -\psi_i(t), \quad i = \overline{1, N},$$

$$\frac{\partial L_i(*)}{\partial x} = \left(\frac{\partial L_i}{\partial x^{(1)}}, \ldots, \frac{\partial L_i}{\partial x^{(n)}}\right), \quad \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L_i}{\partial \dot{x}^{(1)}}, \ldots, \frac{\partial L_i}{\partial \dot{x}^{(n)}}.$$

Откуда из (7) следует, что для ситуации равновесия и соответствующей равновесной траектории имеет место система управлений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_i(t, x^p(t), \dot{x}^p(t), u^p(t)/u_i(t))}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_i(t, x^p(t), \dot{x}^p(t), u^p(t)/u_i(t))}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1, N} \ ,$$

В точках τ, $k = \overline{1, s}$ излома экстремалей функции $L_i(*)$ удовлетворяют условиям Вейерштрасса-Эрдмана[5], вида:

$$\left.\frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}\right|_{t=\tau_k-0} - \left.\frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}\right|_{t=\tau_k+0} = 0, \quad k = \overline{1, s}, \tag{9}$$

$$\left(L_i(*) - \left.\frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right|\right)_{t=\tau_k-0} - \left(L_i(*) - \left.\frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right|\right)_{t=\tau_k+0} = 0, \quad k = \overline{1, s} \tag{10}$$

Условие (10) перепишем в виде:

$$L_i(*)\Big|_{\tau_k-0} - L_i(*)\Big|_{\tau_k+0} = \left.\frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}\right|_{\tau_k+0}^{\tau_k-0}, \quad k = \overline{1, s} \ ,$$

оно показывает, что касательные в точках $\dot{x}(\tau_k - 0)$ и $\dot{x}(\tau_k + 0)$, $k = \overline{1, s}$ не только параллельны, а даже совпадают.

Для канонических переменных [8;9]

$$\psi_i(t) = -\frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}, \quad H_i(*) = L_i(*) - \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}\dot{x}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Определим на ситуации равновесия $(u_1(\cdot),...,u_i(\cdot),...,u_N(\cdot))$ вдоль соответствующей равновесной траектории $x(\cdot)$ функцию действия $S_i(t,x), \quad (i=\overline{1,N})$, которая зависит от значения фазовой переменной $x = x(t)$, выбранного как начальное состояние системы, соответствующего некоторому моменту времени t [10;11]:

$$S_i(t,x) = g_i\left(x(t_f)\right) + \int_t^{t_f} \max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}} [h_i(\tau,x(\tau),u(\tau)) + \psi_i(\tau)(f(\tau,x(\tau),u(\tau)) - \dot{x}(\tau))]dt, \quad i=\overline{1,N}. \quad (11)$$

Запишем выражение (11) через лагранжиан $L_i(*)$ (8).

$$S_i(t,x) = g_i\left(x(t_f)\right) + \int_t^{t_f} L_i(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau),u(\tau)/u_i(\tau))d\tau, \quad i=\overline{1,N}. \quad (12)$$

Отметим, что в нашей задаче функции (4) характеризуют движение системы по равновесным траекториям. В дальнейших рассуждениях будем считать $S_i(t, x)$ из (12) гладкой функцией. Использование в точках её излома условий Вейерштрасса – Эрдмана [5, 13] позволяет распространить их на общий случай.

Докажем, что функция $S_i(t, x)$ из (12) удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби в частных производных, т.е. является главной функцией Гамильтона [10;11] i-го участника, $(i=\overline{1,N})$. Действительно, вариация функции (12) по фазовой переменной в момент времени t имеет вид:

$$\delta_x S_i(t,x) = \frac{\partial g_i(x(t_f))}{\partial x}\delta x(t_f) - \int_{t_f}^{t}\left(\frac{\partial L_i(*)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}\right)\partial x d\tau - \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}\partial x(t) + \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}\partial x(t_f). \quad (13)$$

Здесь символ (*) обозначает аргумент функции (функционала, теоретико-множественного отображения).

Введем обозначение аналогично [2, 12]:

$$\psi_i(t) = \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}, \quad t\in[t_0,t_f), \quad i=\overline{1,N}. \quad (14)$$

Функции $S_i(t, x)$ из (12) определены на ситуациях равновесия вдоль равновесных траекторий, поэтому для каждого участника справедливы уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_i(t,x^p(t),\dot{x}^p(t),u^p(t)/u_i(t))}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_i(t,x^p(t),\dot{x}^p(t),u^p(t)/u_i(t))}{\partial x} = 0, \quad i=\overline{1,N},$$

и в (13) интегральный член обращается в нуль. С учетом обозначения (14) соотношение (13) перейдет в следующее:

$$\delta_x S_i(t,x) = \left[\frac{\partial g_i(x(t_f))}{\partial x} - \psi_i(t_f)\right]\delta x(t_f) + \psi_i(t)\delta x(t), \quad i=\overline{1,N}. \quad (15)$$

Выбирая сопряженные переменные $\psi_i(t), \quad i=\overline{1,N}.$, таким образом, чтобы любые малые вариации равновесных значений, освобожденных от связей x, «не улучшали» бы функционала

$$S_i^{u_i(\cdot)}(*) = g_i\left(x(t_f)\right) - \psi_i(t)x(t)\Big|_{t_0}^{t_f} +$$

$$+S_{t_0}^{t_f}[\dot{\psi}_i(t)x(t) + h_i(t, x(t), u_1(t), ..., u_N(t)) +$$

$$+\psi_i(t) f(t, x(t), u_1(t), ..., u_N(t))]dt, \quad i = \overline{1, N}.$$

граничные условия для сопряженной переменной $\psi_i(t)$, i-го игрока получаются:

$$\psi_i(t_f) = -\frac{\partial g_i(x(t_f))}{\partial x}, \quad i = \overline{1, N}. \tag{16}$$

Из соотношений (15) и (16) получаем:

$$\psi_i(t) = -\frac{\partial s_i(t, x)}{\partial x}, t \in [t_0, t_f), \quad i = \overline{1, N}. \tag{17}$$

Из определения (12) полная производная по времени функции $S_i(t, x)$:

$$\frac{ds_i(t, x)}{dt} = -L_i(*), \quad i = \overline{1, N}.$$

С другой стороны, рассматривая (12) как функцию переменных $x = x(t)$ и t, используя соотношение (17), имеем:

$$\frac{ds_i(t, x)}{dt} = \frac{\partial s_i(t, x)}{\partial t} + \psi_i(t)\dot{x}(t), \quad t \in T, \quad i = \overline{1, N}.$$

Окончательно получим

$$\frac{\partial s_i(t, x)}{\partial t} + \psi_i(t)\dot{x}(t) + L_i(*) = 0, \quad i = \overline{1, N}. \tag{18}$$

Откуда с учетом (17) и

$$L_i(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)/u_i(t), \psi_i(t)) = H_i(t, x(t), u(t)/u_i(t), \psi_i(t)) - \psi_i(t)\dot{x}(t), \quad i = \overline{1, N}$$

следует

$$\frac{\partial s_i(t, x)}{\partial t} + H_i(*) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Используя определение функции Гамильтона $H_i(*)$ (3), представим последнее уравнение в виде:

$$\frac{\partial s_i(t, x)}{\partial t} + \max_{u_i(\tau) \in \vartheta_{i(\tau)}} \prod\nolimits_i (t, x(t), u(t) // u_i(t), \psi_i(t)) = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

где функции Понтрягина определены в виде:

$$\prod\nolimits_i (t, x(t), u_1(t), ..., u_N(t), \psi_i(t)) =$$

$$h_i(t, x(t), u_1(t), ..., u_N(t)) + \psi_i(t) f(t, x(t), u_1(t), ..., u_N(t)), \quad i = \overline{1, N}$$

С учетом (17) из (18) окончательно получим уравнение

$$\frac{\partial s_i(t,x)}{\partial t}+\max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}}\left[\frac{\partial s_i(t,x)}{\partial t}f(t,x(t),u(t)//u_i(t))+h_i(t,x(t),u(t)//u_i(t))\right]=0, \quad (19),$$

которое является аналогом уравнения Гамильтона-Якоби для i-го участника ($i=\overline{1,N}$).

Граничное условие для $S_i(t, x)$ следует при $t = t_f$ из (12):

$$S_i\left(t_f,x(t_f)\right)=g_i\left(x(t_f)\right),\quad i=\overline{1,N}. \qquad (20)$$

Результаты исследования. Уравнения Гамильтона-Якоби (19) являются и достаточными условиями существования ситуации равновесия для дифференциальной игры (1) – (5), т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы ситуация $u^p(\cdot)=\left(u_1^p(\cdot),...,u_N^P(\cdot)\right), u^p(\cdot)\to x^p(\cdot)$ являлась ситуацией равновесия в игре (1) - (5), достаточно, чтобы существовало гладкое решение уравнения (9) с граничным условием (10), а стратегия $u_1^p(\cdot)$ i-го участника в каждый момент времени t удовлетворяла условию

$$\begin{aligned}&\frac{\partial S_i(t,x^p(t))}{\partial \dot{x}}f(t,x^p(t),u^p(t))+h_i(t,x^p(t),u^p(t))=\\&=\max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(t)}}\left[\frac{\partial S_i(t,x^p(t))}{\partial t}f(t,x^p(t),u^p(t)//u_i(t)+h_i(t,x^p(t),u^p(t)//u_i(t))\right].\end{aligned} \qquad (21)$$

Доказательство. Для управления $u^p(\cdot)=\left(u_1^p(\cdot),...,u_N^P(\cdot)\right)$ в каждой точке t его непрерывности в силу определения функции Гамильтона и условий Вейерштрасса Эрдмана на траектории $x^p(\cdot)$ имеем:

$$\begin{aligned}\frac{dS_i(t,x^p(t))}{dt}&=\frac{\partial S_i(t,x^p(t))}{\partial t}+\frac{\partial S_i(t,x^p(t))}{\partial x}f(t,x^p(t),u^p(t)//u_i(t))=\\&=-h_i(t,x^p(t),u^p(t)//u_i(t)),\quad i=\overline{1,N}.\end{aligned}$$

Интегрируя вдоль $x^p(\cdot)$, получим

$$S_i(t_f,x^p(t_f))-S_i(t_0,x^p(t_0))=-\int_{t_f}^{t}h_i(t,x^p(t),u^p(t)//u_i(t))dt,\quad i=\overline{1,N},$$

или с учетом (10):

$$S_i(t_0,x^p(t_0))=J_i\left(u^p(\cdot)//u_i^p(\cdot)\right),\quad i=\overline{1,N},$$

Где $J_i\left(u(\cdot)\right)$ – выигрыша i-го участника в дифференциальной игре[1], $i=\overline{1,N}$.

Пусть $\tilde{u}_i(\cdot)$, $i=\overline{1,N}$ – другое допустимое управление i-го участника в игре [1], а $\tilde{x}_i(\cdot)$ – соответствующая траектория $\left(u^p(\cdot)//\tilde{u}_i(\cdot)\right)\to\tilde{x}_i(\cdot)$. Для них в силу (21) имеем

$$\frac{dS_i(t,\tilde{x}(t))}{dt}+h_i(t,\tilde{x}(t),u^p(t)//\tilde{u}_i(t))=$$

$$\frac{\partial S_i(t,\tilde{x}(t))}{\partial t}+\frac{\partial S_i(t,\tilde{x}(t))}{\partial x}f(t,\tilde{x}(t),u^p(t)//\tilde{u}_i(t))+h_i(t,\tilde{x}(t),u^p(t)//\tilde{u}_i(t)\le$$

$$\frac{\partial S_i(t,\tilde{x}(t))}{\partial t}+\max_{u_i(\tau)\in\vartheta_i(\tau)}\left[\frac{\partial S_i(t,\tilde{x}(t))}{\partial x}f(t,\tilde{x}(t),u^p(t)//\tilde{u}_i(t))+h_i(t,\tilde{x}(t),u^p(t)//\tilde{u}_i(t)\right]=0,$$

$$i=\overline{1,N}$$

Интегрируя вдоль $\tilde{x}(t)$, получаем:

$$S_i(t_f,\tilde{x}(t_f))-S_i(t_0,\tilde{x}(t_0))=-\int_{t_f}^{t}h_i(t,\tilde{x}(t),u^p(t)//\tilde{u}(t))dt\le 0,$$

что в силу (2), (20), эквивалентно:

$$S_i(t_0,\tilde{x}(t_0))\ge J_i\left(u^p(\cdot)//u_i^p(\cdot)\right),\quad i=\overline{1,N}.$$

Сравнивая полученное неравенство с (12), имеем:

$$J_i\left(u^p(\cdot)\right)\ge J_i\left(u^p(\cdot)//u_i^p(\cdot)\right),\quad i=\overline{1,N}.$$

Таким образом, $u^p(\cdot)=\left(u_i^p(\cdot),i=\overline{1,N}\right)$ является ситуацией равновесия, а соответственно траектория $x^p(\cdot)$ – равновесная в игре[1].

Замечание. Используя необходимые[1] и полученные выше достаточные условия, можно строить методы нахождения ситуации равновесия в бескоалиционных дифференциальных играх.

Пусть функции $u_i^p=\varphi_i\left(x,x(t),\dfrac{\partial S_i(t,x)}{\partial x},u^p(t)/u_i(t)\right),\quad i=\overline{1,N},$

Здесь $\dfrac{\partial S_i(t,x)}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial S_i(t,x)}{\partial x^{(1)}},\dots,\dfrac{\partial S_i(t,x)}{\partial x^{(n)}}\right),$

найдены из условий

$$\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x}f\left(t,x(t),u^p(t)//\varphi_i\left(t,x(t),\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x},u^p(t)/u_i(t)\right)\right)+$$

$$+h_i\left(t,x(t),u^p(t)//\varphi_i\left(t,x(t),\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x},u^p(t)/u_i(t)\right)\right)=$$

$$=\max_{u_i(\tau)\in\vartheta_i(\tau)}\left[\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x}f(t,x(t),u^p(t)//u_i(t))+h_i(t,x(t),u^p(t)//u_i(t))\right].$$

Система $u_i^p=\varphi_i\left(x,x(t),\dfrac{\partial S_i(t,x)}{\partial x},u^p(t)/u_i(t)\right),\quad i=\overline{1,N}$ представляет собой систему N уравнений относительно равновесных стратегий игроков $u_i^p(\cdot),\, i=\overline{1,N}$. Если существует решение данной системы в классе допустимых стратегий, то, решив ее, получим:

$$u_i^p = \chi_i\left(x, x(t), \frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x}, ..., \frac{\partial S_N(t,x)^p}{\partial x}\right), \quad i = \overline{1, N}, \tag{22}$$

Подставляя найденное значение равновесной стратегии в уравнение (19), получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно функции $S_i(t,x), i = \overline{1,N}$:

$$\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x} f\left(t, x(t), \chi_i\left(t, x(t), \frac{\partial S_1(t,x)}{\partial x}, ..., \frac{\partial S_N(t,x)}{\partial x}\right)\right) +$$

$$+h_i\left(t, x(t), \chi_i\left(t, x(t), \frac{\partial S_1(t,x)}{\partial x}, ..., \frac{\partial S_N(t,x)}{\partial x}\right)\right) = 0, \quad i = \overline{1,N}.$$

Если существует N различных функций $S_i(t, x)$, которые удовлетворяют системе (22) с граничными условиями (20), то решение игры определено полностью. В самом деле, подставив полученные функции $S_i(t,x), i = \overline{1,N}$ в равенство (22), получаем равновесные стратегии вида:

$$u_i^p(t) = u_i^p(t,x), i = \overline{1,N} ,$$

Как функции координат и времени. Пусть стратегии $u_i^p(t) = u_i^p(t,x), i = \overline{1,N}$ порождают единственную траекторию $x^p(t)$ системы (1) при начальном условии (2), определенную на отрезке $[t_0, t_f]$, вдоль которой функции $u_i^p(t) = u_i^p(t, x^p(t)), i = \overline{1,N}$, – кусочно-непрерывны. Тогда стратегия $u_i^p(t) = u_i^p, i = \overline{1,N}$, является ситуацией равновесия в игре[1].

Заключение. Из полученных результатов можно сделать вывод: методы аналитической механики являются общими, едиными для изучения движения и равновесия, которые применимы для различных материальных систем [14,15]. Так, с помощью принципов аналитической механики, мы выразили достаточные условия существования ситуации равновесия в бескоалиционной дифференциальной игре лиц через уравнения движения в форме Гамильтона – Якоби.

ЛИТЕРАТУРА

1 Махмудова Ш.Д. Главная функция Гамильтона и необходимые условия существования ситуации равновесия в форме уравнений Гамильтона-Якоби/ Ш.Д.Махмудова, А.Н.Уразгалиева// Вестник КазНПУ им.Абая – 2021. – №1. – С. 31.

2 Иванилов Ю.П. Применимость методов аналитической механики в оптимальном управлении// Изв.АН СССР. Техническая кибернетика. – 1983. – №2. – С. 61-71.

3 Иванилов Ю.П. Принцип освобождения от связей в форме штрафных функций/ Ю.П. Иванилов// Изв.АН СССР. Техническая кибернетика. – 1985. – .№3. – С. 170-178.

4 Иванилов Ю.П. Главная функция Гамильтона и условия оптимальности/ Ю.П. Иванилов// Автоматика и телемеханика. – 1988. – №5. – С. 51-61.

5 Гельфанд И.М. Вариационное исчисление/ И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.

6 Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики в 2-х т. Т.2./ Н.Н. Бухгольц. – М.: Лань, 2009. – 400 с.

7 Голдстейн Г. Классическая механика/ Г.Голдстейн. – М.: Наука, 1975. – 408 с.

8 Воробьев Н.Н. Теория игр. – М.: Наука, 1985. – 408 с.

9 Жуковский В.И. О дифференциальных играх нескольких лиц с ненулевой суммой // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. № 3. С. 3 – 13.

10 Разумихин Б.С. Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике. – М.: Наука, 1975. – 304 с.

11 Мкртычев, О.В. Теоретическая механика: Уч. / О.В. Мкртычев. – М.: Вузовский учебник, 2019.– 320 с.

12 Гордин В. А. Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решить / В. А.Гордин – М.: Учебники Высшей школы экономики, 2016. – 235 с.

13 Зеликин, М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление / М.И. Зеликин. – М.: Ленанд, 2017. - 160 с.

14 Ландау, Л.Д. Теоретическая физика в 10 томах. т.1. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц.– М.: Физматлит, 2018.– 224 с.

15 Бертяев, В.Д. Теоретическая и аналитическая механика. Учебно-исследовательская работа студентов: Учебное пособие / В.Д. Бертяев, В.С. Ручинский. – СПб.: Лань, 2019. – 424 с.

REFERENCES

1 Makhmudova, Sh.D. (2021). Osnovnaya funktsiya Gamil’tona i neobkhodimyye usloviya sushchestvovaniya situatsii ravnovesiya v vide uravneniy Gamil’tona-Yakobi [Hamilton’s principal function. Necessary conditions for the existence of equilibrium in the form of hamilton-jacobi equations] Vestnik KazNPU imeni Abaya [in Russian].

2 Ivanilov, Ju.P. (1983). Primenimost' metodov analiticheskoj mehaniki v optimal'nom upravlenii [Applicability of analytical mechanics methods in optimal control]. Izv.AN SSSR. Tehnicheskaja kibernetika[in Russian].

3 Ivanilov, Ju.P. (1985). Princip osvobozhdenija ot svjazej v forme shtrafnyh funkcij [The principle of freeing from bonds in the form of penalty functions]. Izv.AN SSSR. Tehnicheskaja kibernetika [in Russian].

4 Ivanilov, Ju.P. (1988). Glavnaja funkcija Gamil'tona i uslovija optimal'nosti [The main Hamilton function and optimality conditions]. Avtomatika i telemehanika. [in Russian].

5 Gel'fand, I.M., & Fomin, S.V. (1961). Variacionnoe ischislenie [Calculus of variation]. M.: Fizmatgiz [in Russian].

6 Buhgol'c, N.N. (1969). Osnovnoj kurs teoreticheskoj mehaniki [Basic Course in Theoretical Mechanics]. V.2. (Vols. 1-2). M.:Nauka [in Russian].

7 Goldstejn, G. (1975). Klassicheskaja mehanika [Classic mechanics]. M.: Nauka [in Russian].

8 Vorob'ev N.N. (1985) Teorija igr. [Game theory]. M.: Nauka [in Russian].

9 Zhukovskij V.I. (1971) O differencial'nyh igrah neskol'kih lic s nenulevoj summoj [On differential games of several players with nonzero sum] Tehnicheskaja kibernetika Izv. AN SSSR [in Russian].

10 Razumihin B.S. (1975) Fizicheskie modeli i metody teorii ravnovesija v programmirovanii i jekonomike [Physical models and methods of equilibrium theory in programming and economics]. M.: Nauka [in Russian].

11 Mkrtychev O.V. (2019). Teoreticheskaja mehanika[Theoretical mechanics]. M.: Vuzovskij uchebnik. [in Russian].

12 Gordin V. A. (2016). Differencial’nye i raznostnye uravnenija. Kakie javlenija oni opisyvajut i kak ih reshit [Differential and difference equations. What phenomena do they describe and how to solve them]. M.: Uchebniki Vysshej shkoly jekonomiki. [in Russian].

13 Zelikin M.I. (2017). Optimal’noe upravlenie i variacionnoe ischislenie [Optimal control and calculus of variations]. M.: Lenand. [in Russian].

14 Landau L.D. & Livshic E.M. (2018). Teoreticheskaja fizika v 10 tomah. t. 1. Mehanika [Theoretical physics in 10 volumes] V.I. M.: Fizmatlit. [in Russian].

15 Bertjaev V.D. & Ruchinskij V.S. (2019). Teoreticheskaja i analiticheskaja mehanika. Uchebno-issledovatel’skaja rabota studentov: Uchebnoe posobie[Theoretical and analytical mechanics. Educational and research work of students: Textbook]. SPb.: Lan. [in Russian].

Ш. Д. МАХМУДОВА[1], А. Д. МАХМУДОВ[2], А. Н. УРАЗГАЛИЕВА[1]

[1]Жәңгір хан атындағы Батыс Қазақстан аграрлық-техникалық университеті, Орал қаласы, Қазақстан
[2]Батыс Қазақстан инновациялық-технологиялық университеті, Орал қаласы, Қазақстан

ТЕПЕ-ТЕҢДІК ЖАҒДАЙДЫҢ БАР БОЛУЫНЫҢ ГАМИЛЬТОН-ЯКОБИ ТЕҢДЕУЛЕРІ ТҮРІНДЕГІ ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТТАРЫ

Мақалада фазалық шектеулері бар Гамильтон-Якоби теңдеулерін шешу үшін оңтайлы басқару теориясын қолдану қарастырылады.

Оңтайлы басқару есептерін қолдана отырып, жалпыланған шешімдерді құру әдісі ұсынылған. Сандық эксперименттердің нәтижелері мен талдауы, бірнеше тұлғалардың ынтымақтастығы жоқ дифференциалдық ойындарындағы тепе-теңдік жағдайларының болуының шарттары, атап айтқанда, Гамильтон бойынша әрекетті анықтайтын бірнеше тұлғаның бірлескен емес дифференциалдық ойындарындағы тепе-теңдік жағдайларының Гамильтон-Якоби теңдеулері түріндегі болу шарттары алынған.

Ойын теориясы қолданбалы математикалық теория ретінде, адамдар шешім қабылдаған кезде қолданылатын механизмдерді түсіну және түсіндіру үшін қолданылады. Теория стратегиялық жоспарлау логикасы мен адамдар арасындағы қарым-қатынастың қызмет етуіне ықпал етеді. Ойын теориясы қолданбалы математика әдісі ретінде әртүрлі жағдайларда әрекетті зерттеу үшін қолданылады, экономикалық субъекттердің әрекетін түсінуге көмектеседі.

Теорияның көптеген қолданбалары бар және стратегиялық ойындар, әкімшілік саласы, экономика және жасанды элементті зерттеу сияқты әртүрлі салаларда қолданылуы мүмкін. Мақалада ойын теориясындағы оңтайлы жағдайларды зерттеудің математикалық әдісі сипатталған.

***Түйін сөздер**: дифференциалдық ойын; динамикалық жүйелер; тепе-теңдік жағдайы; тепе-теңдік траекториясы; Гамильтон-Якоби функциясы; Эйлер-Лагранж теңдеулері; Вейерштрасс-Эрдман шарттары.*

SH. D. MAKHMUDOVA[1], A. D. MAKHMUDOV[2], A. N. URAZGALIEVA[1]

[1]Zhangir Khan West Kazakhstan agrarian-Technical university, Uralsk, Kazakhstan
[2]West Kazakhstan Innovation and Technological University, Uralsk, Kazakhstan

SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF EQUILIBRIUM IN THE FORM OF HAMILTON-JACOBI EQUATIONS

The article discusses the application of the theory of optimal control for solving Hamilton-Jacob equations with phase constraints.

A method for constructing generalized solutions using optimal control problems is proposed. The results and analysis of numerical experiments, conditions for the existence of equilibrium situations in noncooperative differential games of several persons, namely the conditions for the existence of equilibrium situations in noncooperative differential games of several persons, defining the action according to Hamilton, are stated. Necessary conditions in the form of Hamilton-Jacobi equations are obtained.

Game theory as an applied mathematical theory is used to understand and explain the mechanisms that are used when people make decisions. The theory contributes to the functioning of the logic of strategic planning and the relationship between individuals. Game theory as a method of applied mathematics is used for behavioral studies in various conditions, and helps understand the behavior of economic agents.

The theory has many applications and can be used in different areas such as: strategy games, administration, economics and artificial intelligence research. The article describes a mathematical method for studying optimal situations in game theory.

***Key words**: Differential game; dynamic systems; equilibrium situation; equilibrium trajectory; Hamilton-Jacobi function; Euler-Lagrange equations; Weierstrass-Erdmann conditions.*