ӘОЖ 004.4:517.977.16
https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.155

А. К. ЕРДЕНОВА[1,2]*, Қ. ӘЛІМХАН*[2]*, Н. ТАСБОЛАТҰЛЫ*[1,3]**, С. С. АЛИШЕВА*[2]

[1]*Астана халықаралық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*
[2]*Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*
[3]*Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан*

КЕШІГУІ БАР ЖОҒАРЫ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ЖҮЙЕЛЕРДІ ҮЗДІКСІЗ ГЛОБАЛДЫ БАҚЫЛАУ

Бұл мақалада уақыт бойынша кешігуі бар жоғары ретті сызықты емес жүйелер класын күй кері байланыс арқылы кең ауқымды ізге түсіру мәселесі қарастырылады. Бұндағы зерттелетін жүйенің ерекшелігі сызықты еместіктің жоғары шекарасындағы шектеулілік дәрежесі үзіліссіз интервал аралығында алынуы мүмкін. Таңба (сигнум) функциясын енгізу арқылы және қуат интеграторын қосудың жалпылама әдісін қосып, сәйкес Ляпунов функциясын таңдау арқылы уақыт бойынша кешігетін сызықты еместікте үстемдік ететіндей реттелетін және уақыт кешігуіне тәуелсіз ізге түсіру контроллерін құрамыз. Әзірленген контроллер нәтижесінде алынатын тұйық циклдік жүйенің барлық күйлері кең ауқымды шектелген және шекті уақыттан кейін ізге түсіру қателігі жеткілікті мөлшерде аз болуын қамтамасыз етеді. Ұсынылған жобалаудың тиімділігі мен дұрыстығын көрсету үшін сандық мысал келтірілген.

Түйін сөздер*: шығысты практикалық бақылау, күй кері байланысы, Ляпунов функциясы*

Кіріспе. Қазіргі кезде практикалық ізге түсіру мәселесіне көп көңіл бөлінуде, себебі оны асимптотикалық ізге түсірумен салыстырғанда практикалық қолданысы кеңірек және жүйелерге қойылатын талаптар біршама жеңіл болып табылады. Мысалы, [1-4] еңбектерде анықталмаған сызықты емес жүйелерді шығыс кері байланыс арқылы практикалық ізге түсіруді қарастырылған, ал [5,6] жұмыстарда анықталмаған жоғары ретті сызықты емес жүйелерді күй кері байланыс арқылы практикалық ізге түсіру мәселесін зерттеді. Алайда қолданыстағы жұмыстардың көпшілігінде уақытша бақылау көрсеткіштері ескерілмеген. Жалпы айтқанда уақытша өнімділігі бар практикалық ізге түсірудің із жүзіндегі қолданыстары бойынша көбірек қызығушылық тудырады, алайда басқарудың күрделілігіне байланысты ондай мәселерді шешу үлкен қиындық туғызады. Уақыт бойынша кешігудің болуы жүйенің жұмысына айтарлықтай әсер ететіндігі белгілі, ал бұл басқару жүйесі жұмысының нашарлауына және орнықсыздануына әкеледі. Сондықтан кешігуі бар жүйелердің практикалық маңызы зор және соңғы жылдары оған көп көңіл бөлінуде. Жалпы айтқанда кешігуі бар жүйелер үшін басқаруды жобалау әдісін екі категорияға бөлуге болады: кешігуге тәуелді және кешігуге тәуелсіз. Кешігуі бар жүйелерге негізделген шолуларға қарасақ әлі күнге дейін шешімін таппаған көптеген зерттеу сұрақтары туындайды.

Төмендегі түрдегі жоғары ретті сызықты емес жүйелер классын шығыс кері байланыс арқылы кең ауқымды практикалық ізге түсіру мәселесін қарастырамыз:

* E-mail корреспондирующего автора: tasbolatuly@gmail.com

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = z_{i+1}^{p_i}(t) + \phi_i\left(z(t), z_1(t-\tau_1),\ldots,z_n(t-\tau_n)\right) \\ i = 1,\ldots,n-1, \\ \dot{z}_n(t) = u^{p_n}(t) + \phi_n\left(z(t), z_1(t-\tau_1),\ldots,z_n(t-\tau_n)\right) \\ y = z_1 \end{cases} \tag{1}$$

мұндағы $z(t)=[z_1(t),...,z_n(t)]^T \in R^n$ жүйенің күйі (немесе шешімі), $z_{n+1}(t) =: u(t) \in R$ кіріс контроллері, $\tau_i \in R^+$, $i=1,...,n$ күйдің уақыт бойынша кешігуі және ол келесі шартты қанағаттандырады: $\tau \geq \max\{\tau_1,...,\tau_n\}$, жүйе $z(\theta)=\xi_0(\theta),\ \forall\theta\in[-\tau,0]$ бастапқы шартын қанағаттандырады, мұндағы $\xi_0(\theta)$ - берілген үзіліссіз функция, $\phi_i : R^n \times R^n \to R,\ i=\overline{1,n}$ - белгісіз үзіліссіз функция, $p_i \in R_{odd}^{\geq 1} := \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \geq \mathrm{q} \right\},\ i=1,...,n$ - жүйенің жоғары дәрежесі, мұндағы p және q тақ бүтін сандар. $p_i = 1$ болған жағдайда (1) жүйе үшбұрышты формадағы уақыт бойынша кешігуі бар сызықты емес жүйеге келеді, оларды басқару конструкциясы кері қадам әдістемесі негізінде алынған біршама зерттеулер бар ([4], [7,8] және т.б.). $p_i > 1$ болғанда (1) жүйенің Якобиандық сызықтандырылуы координата басында басқарылмайтындығын байқауға болады, ал ол өз кезегінде кері байланыс негізінде сызықтандырылады.

Бұл жұмыстың негізгі нәтижелері келесідей: біріншіден берілген (1) жүйенің сызықты еместік өсу шарты әлсіретіліп, басқару конструкциясына сигнум функциясын еңгізу арқылы бірнеше маңызды леммалар мен тұжырымдар алынады; екіншіден, қуат интеграторын қосу тәсілінің негізінде ізге түсіру контроллерінің схемасы жасалынады. Алынған контроллер нәтижесінде пайда болған тұйық жүйенің барлық күйлері шектелген және шекті уақыттан кейін ізге түсіру қателігі өздігінен аз болатындығын көрсетеміз.

Математикалық алғышарттар. Алдымен осы мақалада қолданылатын негізгі белгілеуерді берейік.

Белгілеулер: R^+ - барлық теріс емес нақты сандар жиыны, $Z(t)\in R^n$ векторы үшін $Z_i(t)=[z_1(t),...,z_i(t)]^T \in R^i$, $i=\overline{1,n-1}$, $Z_n(t)=z(t)=[z_1(t),...,z_n(t)]^T \in R^n$. $\|z(t)\|$ дегеніміз $z(t)$ векторының Евклид нормасы, ол былай анықталады: $\|z(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2(t)}$ және $\|z(t)\|_! = \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} \|z(t+\theta)\|, \forall t\geq 0$ үшін. $h(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын үзіліссіз $h : R^+ \to R^+$ функциясы K^∞ функция деп аталады, егер ол қатаң өспелі болса және $\lim_{s\to+\infty} h(s) = +\infty$ болса. *sign z* таңба функциясы былай анықталады:

$$sign\, z = \begin{cases} 1,\ z>0 \\ 0,\ z=0 \\ -1,\ z<0 \end{cases}$$

Кез келген $\alpha \in R^{+}$ және $z \in R$ үшін $[z]^{\alpha}$ функциясы $sign(z)|z|^{\alpha}$ түрінде анықталады. $\phi : R^{n} \to R$ функциясы C^{k} функциясы деп аталады, егер оның дербес туындылары бар және k $(1 \le k < \infty)$ ретке дейін үзіліссіз болатын болса. C^{0} - функцияның үзіліссіздігін, C^{∞} - функцияның тегістігін, яғни оның кез келген ретті дербес туындылары бар болатындығын білдіреді. Сонымен қатар, функциялардың (немесе функционалдардың) аргументтері қолайлылық үшін алынып тасталады, мысалы, $\phi(x(t))$ деген функция болса, оны $\phi(x), \phi(\cdot), \phi$ деп жазылуы мүмкін.

Алдымен шығысты практикалық ізге түсірудің анықтамасын берейік.

Айталық, (1) жүйенің $y_r(t)$ тірек сигналы $[0, \infty]$ аралығында уақыт айнымалысы бойынша C^1 - шектеулі болсын, онда күй контроллері арқылы шығысты кең ауқымды практикалық ізге түсіруді былай тұжырымдаймыз:

Кез келген $\varepsilon > 0$ оң нақты саны үшін

$$u = u(z, y_r(t)) \tag{2}$$

үзіліссіз контроллері құрылады және ол төмендегі шарттарды қанағаттандырады:

1) (1)-(2) тұйық жүйенің барлық күйлері $[0, +\infty]$ аралығында анықталған және кең ауқымды шектеулі болады;

2) Кез келген $z(0) \in R^{n}$ үшін $T > 0$ ақырлы уақыты табылып, (1)-(2) тұйық жүйенің $y(t)$ шығысы

$$|y(t) - y_r(t)| = |z_1(t) - y_r(t)| < \varepsilon, \qquad \forall t \ge T > 0 \tag{3}$$

шартын қанағаттандыратын болса, онда тұйық-циклдық жүйенің шығысы кең ауқымды практикалық ізге түсіріледі.

Шығысты кең ауқымды практикалық ізге түсіру мәселесін шешу үшін келесі болжамды жасайық.

Болжам 1. Әрбір $i = 1, \dots, n$ үшін $C_1, C_2 \ge 0$ және $\omega \ge 0$ белгілі тұрақтылары табылып, келесі шарт орындалады:

$$|\phi_i(z(t), z_1(t - \tau_1), \dots, z_n(t - \tau_n))| \le C_1 \left(\sum_{j=1}^{i} |z_j(t)|^{\frac{r_i + \omega}{r_j}} + \sum_{j=1}^{i} |z_j(t - \tau_j)|^{\frac{r_i + \omega}{r_j}} \right) + C_2 \tag{4}$$

мұндағы r_1 келесі түрде анықталады:

$$r_1 = 1, \quad r_i = \frac{r_{i-1} + \omega}{p_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n+1 \tag{5}$$

$\dfrac{r_i + \omega}{r_j}$ - саны белгілі бір нүктеде емес, қайсыбір интервалда мән қабылдайды.

Болжам 2. $y_r(t)$ тірек сигналы үзіліссіз дифференциалданатын болса және сонымен қатар, $D >$ оң белгісіз тұрақтысы табылып келесі теңсіздік орындалады:

$$|y_r(t)| + |\dot{y}_r(t)| \le D, \ \ \forall t \in [0, +\infty)$$

Енді ізделінді контроллерді құру үшін қажетті бірнеше лемманы қарастырайық.

Лемма 1.[9] $x \in R,\ y \in R,\ p \geq 1$ тұрақтылары үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$|x+y|^p \leq 2^{p-1}|x^p + y^p|,\ \left(|x|+|y|\right)^{\frac{1}{p}} \leq |x|^{\frac{1}{p}} + |y|^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{p-1}{p}}\left(|x|+|y|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Егер $p \in R_{odd}^{\geq 1}$ болса, онда $|x-y|^p \leq 2^{p-1}|x^p - y^p|,\ |x|^{\frac{1}{p}} - |y|^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{p-1}{p}}|x-y|^{\frac{1}{p}}$.

Егер $0 < p \leq 1$ болса, онда $\left(|x|+|y|\right)^p \leq |x|^p + |y|^p$. Мұндағы $p = \dfrac{a}{b} \leq 1,\ a > 0,\ b > 0$ тақ бүтін сандар болса, онда $|x^p + y^p| \leq 2^{1-p}|x+y|^p$ болады.

Лемма 2. Айталық, c, d оң тұрақтылар болсын. Онда кез келген $\gamma(x,y) > 0$ нақты айнымалы функциясы үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$|x|^c|y|^d \leq \frac{c}{c+d}\gamma(x,y)|x|^{c+d} + \frac{d}{c+d}\gamma^{-c/d}(x,y)|y|^{c+d}.$$

Лемма 3. Берілген $m,\ n$ оң нақты сандары және $a(x,\ y)$ оң анықталған функция үщін төмендегі теңсіздікті қанағаттандыратын $c(x,\ y)$ оң тұрақтысы табылады:

$$\left|a(x,y)x^m y^n\right| \leq c(x,y)|x|^{m+n} + \frac{n}{m+n}\left(\frac{m}{(m+n)c(x,y)}\right)^{\frac{m}{n}}|a(x,y)|^{\frac{m+n}{n}}|y|^{m+n}.$$

Лемма 4.[10] Айталық, $\dfrac{a}{b} \in R_{odd}^{\geq 1},\ b \geq 1$ болғанда келесі теңсіздік орындалады:

$$\left|x^{\frac{p}{q}} - y^{\frac{p}{q}}\right| \leq 2^{1-\frac{1}{q}}\left|sign(x)|x|^p - sign(y)|y|^p\right|^{\frac{1}{q}}, \tag{6}$$

Лемма 5. [10]. $f(x) = sign(x)|x|^p,\ p \geq 1$ функциясы $(-\infty;+\infty)$ аралығында үздіксіз дифференциалданады және оның туындысы төмендегі теңдікті қанағаттандырады: $\dot{f}(x) = p|x|^{p-1}$.

Лемма 6. Егер $f:[a,b] \to R\,(a \leq b)$ монотонды шектеулі және $f(a) = 0$ шартын қанағаттандыратын болса, онда $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq |f(b)||b-a|$.

Ізге түсіру контроллерін жобалау.

Қойылған мақсатқа жету үшін алдымен келесідей координат түрлендіруін еңгізейік:

$$\begin{cases} x_k(t) = \left[z_k(t)\right]^{\frac{\sigma}{r_k}} - \left[\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))\right]^{\frac{\sigma}{r_k}}, \quad k = \overline{1,n} \\ \alpha_k(Z_k(t)) = -(sign(x_k(t)))^{\frac{1}{p_k}} g_k^{\frac{r_{k+1}}{\sigma}}|x_k(t)|^{\frac{r_{k+1}}{\sigma}},\ k = \overline{1,n}, \\ u(t) = \alpha_n(t) \\ y = x_1 + y_r \end{cases} \tag{7}$$

мұндағы σ - $\sigma \geq \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{r_i + \omega\}$ шартын қанағаттандыратын оң тұрақты,

$\alpha_k : R^k \to R,\ k=\overline{1,n}$, $g_k > 1$ -оң тұрақтысы бар виртуалды контроллер деп аталады. Біріздiлiк үшiн $p_0 = g_0 = 1,\ \alpha_0(t) = 0$ деп есептеймiз.

[9] еңбектегi түрлендiрудi қолдансақ және айталық, σ - жұп оң анықталған тұрақты сан болса, онда $x_1(t) = z_1^{\frac{\sigma}{r_1}} \ge 0$ қарама-қайшылыққа келемiз, сондықтан *sign* таңба функциясын (7) координат түрлендiруiне енгiзу арқылы $x_1(t),...,x_n(t)$ барлық мүмкiн мәндерiн табуға болады. $p_k \in R_{odd}^{\ge 1}$ тақ бүтiн сан және $\alpha_k(Z_k(t))$ өрнегiнен $sign(\alpha_k(Z_k(t))) = -sign(x_k(t))$ болатындығын аламыз. Демек келесi теңдiк орынды болады:

$$\begin{gathered}\left[\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))\right]^{\frac{\sigma}{r_k}} = -sign\left(x_{k-1}(t)\right)\left|-sign\left(x_{k-1}(t)\right)^{\frac{1}{p_{k-1}}} g_{k-1}^{\frac{r_k}{\sigma}}\left|x_{k-1}(t)\right|^{\frac{r_k}{\sigma}}\right|^{\frac{\sigma}{r_k}} = \\ = -sign\left(x_{k-1}(t)\right) g_{k-1}\left|x_{k-1}(t)\right| = -g_{k-1}x_{k-1}(t) = -\sum_{i=1}^{k-1}\left(\prod_{j=i}^{k-1} g_j\right)\left[z_i(t)\right]^{\frac{\sigma}{r_i}}\end{gathered} \tag{8}$$

$r_i \le r_i + \omega \le \sigma$ болатындығын ескерсек және 5-лемманы қолданып (8) теңдеуден келесiдей қорытынды жасауға болады: $\left[\alpha_1(x_1(t))\right]^{\frac{\sigma}{r_1}},...,\left[\alpha_{n-1}(X_{n-1}(t))\right]^{\frac{\sigma}{r_n}}$.

Функциясы t бойынша үздiксiз дифференциалданады, онда осының негiзiнде $x_1(t),...,x_n(t)$ күйi t бойынша үздiксiз дифференциалданатын болады және бұдан түрленген жүйенi аламыз. $x_1(t),...,x_n(t)$ күйi t бойынша үздiксiз дифференциалдануы (7) түрлендiру арқылы нақты контроллерiн құруды қамтамасыз етедi.

Ляпунов функциясын құрайық.

$$W_{H_k}(Z_k(t)) = \int_{\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))}^{z_k(t)} \left[\left[s\right]^{\frac{\sigma}{r_k}} - \left[\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))\right]^{\frac{\sigma}{r_k}}\right]^{\frac{2\sigma - r_{k+1}p_k}{\sigma}} ds,$$

$$W_{D_k}(t) = (n-k+1)\int_{t-\tau_k}^{t} x_k^2(l)dl + (n-k)\int_{t-\tau_{k+1}}^{t} x_k^2(l)dl\ ,\ k=\overline{1,n}\ ;\ \tau_{n+1}=0$$

Бұл $W_{H_k}(t), W_{D_k}(t)$ функциялары төмендегi тұжырыммен сипатталады.

Тұжырым 1. [10] $k=\overline{1,n}$ үшiн $W_{H_k}(t)$ және $W_{D_k}(t)$ функциялары үздiксiз дифференциалданады және келесi теңдiктi қанағаттанырады:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W_{H_k}(Z_k(t))}{\partial z_k(t)} = \left[x_k(t)\right]^{\frac{2\sigma - r_k - \omega_k}{\sigma}} \\ \dfrac{\partial W_{H_k}(Z_k(t))}{\partial z_i(t)} = -\displaystyle\int_{\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))}^{z_k(t)} \left|\left[s\right]^{\frac{\sigma}{r_k}} - \left[\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))\right]^{\frac{\sigma}{r_k}}\right|^{\frac{2\sigma - r_{k+1}p_k}{\sigma}} ds \times \\ \times \dfrac{2\sigma - r_{k+1}p_k}{\sigma} \cdot \dfrac{\partial}{\partial z_i(t)}\left(\left[\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))\right]^{\frac{\sigma}{r_k}}\right),\quad i=\overline{1,k-1} \\ \dfrac{dW_{D_k(t)}}{dt} = (2n-2k+1)x_k^2 - (n-k+1)x_k^2(t-\tau_k) - (n-k)x_k^2(t-\tau_{k+1}).\end{cases} \tag{9}$$

$$2^{\frac{(2\sigma-\omega-r_k)(r_k-\sigma)}{\sigma r_k}}\cdot\frac{r_k}{2\sigma-\omega}\left|z_k(t)-\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))\right|^{\frac{2\sigma-\omega}{r_k}}\le W_{H_k}(Z_k(t))\le 2^{1-\frac{r_k}{\sigma}}\cdot\left|x_k(t)\right|^{\frac{2\sigma-\omega}{\sigma}}$$

$V_1=W_{H_1}+W_{D_1}$ болатындай V_1-ді таңдап аламыз. Оның уақыт бойынша туындысын тауып, 1-тұжырымды қолдансақ мынаны аламыз:

$$\dot V_1=\left[x_1\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_1}{\sigma}}\alpha_1^{p_1}+\left[x_1\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_1}{\sigma}}\left(z_2^{p_1}-\alpha_1^{p_1}\right)+\left[x_1\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_1}{\sigma}}f_1+(2n-1)x_1^2-nx_1^2(t-\tau_1)-\\ -(n-1)x_1^2(t-\tau_2). \quad (10)$$

1-болжам мен 3-лемманың негізінде келесі бағалау орындалады:

$$\left[x_1\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_1}{\sigma}}\phi_1\le C\left|x_1\right|^{\frac{2\sigma-\omega-r_1}{\sigma}}\left(\left|x_1\right|^{\frac{\omega+r_1}{\sigma}}+\left|x_1(t-\tau_1)\right|^{\frac{\omega+r_1}{\sigma}}\right)\le\\ \le\left(C+\frac{2\sigma-\omega-r_1}{2\sigma}\cdot\left(\frac{\omega+r_1}{2\sigma}\right)^{\frac{\omega+r_1}{2\sigma-\omega-r_1}}C^{\frac{2\sigma}{2\sigma-\omega-r_1}}\right)\cdot x_1^2+x_1^2(t-\tau_1)=:\beta_1x_1^2+x_1^2(t-\tau_1) \quad (11)$$

Енді бірінші α_1 виртуалды контроллерді былай таңдап алайық:

$$\alpha_1^{p_1}(z_1)=-sign(x_1)g_1^{\frac{r_1+\omega}{\sigma}}\left|x_1\right|^{\frac{r_1+\omega}{\sigma}} \quad (12)$$

мұндағы $g_1=(3n-1+\beta_1)^{\frac{\sigma}{r_1+\omega}}>1$. (11) мен (12) теңдіктерді қолданып (10) теңдікті былай жазуға болады:

$$\dot V_1\le-nx_1^2-(n-1)\left(x_1^2(t-\tau_1)+x_1^2(t-\tau_2)\right)\left[x_1\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_1}{\sigma}}\left(z_2^{p_1}-\alpha_1^{p_1}\right).$$

Бұдан рекурсивті қадамға көшсек, (k–1)-ші қадамда

$$\dot V_{k-1}\le-\left(n-k+2\right)\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2-(n-k+1)\sum_{i=1}^{k-1}\left(x_i^2(t-\tau_i)+x_i^2(t-\tau_{i+1})\right)\left[x_{k-1}\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_{k-1}}{\sigma}}\left(z_k^{p_{k-1}}-\alpha_{k-1}^{p_{k-1}}\right). \quad (13)$$

Келесі қадамда $V_k=V_{k-1}+W_{H_k}+W_{D_k}$ болайтындай етіп, V_k-ны таңдаймыз. Оның уақыт бойынша туындысын (1)-ші теңдеудің шешімінің төңірегінде тауып, (13) теңдеу мен 1-тұжырымды қолдансақ мынаны аламыз:

$$\dot V_k\le-\left(n-k+2\right)\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2-(n-k+1)\left(\sum_{i=1}^{k}x_i^2(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2(t-\tau_{i+1})\right)-\\ -(n-k)x_k^2(t-\tau_{k+1})+(2n-2k+1)x_k^2+\left[x_k\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}}\left(z_{k+1}^{p_k}-\alpha_k^{p_k}\right)+\left[x_k\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}}\alpha_k^{p_k}+\\ +\left[x_k\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}}f_k+\left[x_{k-1}\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_{k-1}}{\sigma}}\left(z_k^{p_{k-1}}-\alpha_{k-1}^{p_{k-1}}\right)-\frac{2\sigma-r_{k+1}p_k}{\sigma}\int_{\sigma_{k-1}}^{z_k}\left|[s]^{\frac{\sigma}{r_k}}-[\alpha_{k-1}]^{\frac{\sigma}{r_k}}\right|^{\frac{\sigma-r_{k+1}p_k}{\sigma}}ds\times\\ \times\sum_{i=1}^{k-1}\left(x_{i+1}^{p_i}+f_i\right)\frac{\partial}{\partial z_i}\left([\alpha_{k-1}]^{\frac{\sigma}{r_k}}\right) \quad (14)$$

Ары қарай α_k виртуалды контроллерін құру үшін (14) теңдеудің оң жағындағы соңғы үш мүшесіне сәйкес шектеуші бағалау беру керек. Ол келесідей 3 дәйектің негізінде қол жетімді болады.

Дәйек 1: β_k оң тұрақтысы табылып,

$$\left[x_{k-1}\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_{k-1}}{\sigma}}\left(z_k^{p_{k-1}}-\alpha_{k-1}^{p_{k-1}}\right)\le 2^{1-\frac{r_{k-1}+\omega}{\sigma}}\left|x_{k-1}\right|^{\frac{2\sigma-\omega-r_{k-1}}{\sigma}}\left|x_k\right|\le\frac{1}{2}x_{k-1}^2+\beta_{k_1}x_k^2 \qquad (15)$$

Дәйек 2:

$$\left[x_k\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_{k-1}}{\sigma}}f_k\le\beta_{k_2}x_k^2+\frac{1}{3}x_{k-1}^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2}x_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2\left(t-\tau_i\right)+x_k^2(t-\tau_k)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2}x_i^2\left(t-\tau_{i+1}\right)+x_{k-1}^2\left(t-\tau_k\right) \qquad (16)$$

Дәйек 3:

$$\left(\frac{2\sigma-r_{k+1}p_k}{\sigma}\int_{\sigma_{k-1}}^{z_k}\left|[s]^{\frac{\sigma}{r_k}}-[\alpha_{k-1}]^{\frac{\sigma}{r_k}}\right|^{\frac{\sigma-r_{k+1}p_k}{\sigma}}ds\right)\cdot\sum_{i=1}^{k-1}\left(x_{i+1}^{p_i}+f_i\right)\frac{\partial}{\partial z_i}\left([\alpha_{k-1}]^{\frac{\sigma}{r_k}}\right)\le\beta_{k_3}x_k^2+\frac{1}{3}x_{k-1}^2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2}x_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2(t-\tau_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2}x_i^2(t-\tau_{i+1}) \qquad (17)$$

Алынған нәтижелерді (14) қойып, мынаны аламыз:

$$\dot{V}_k\le-\left(n-k+1\right)\sum_{i=1}^{k}x_i^2-(n-k)\left(\sum_{i=1}^{k}x_i^2(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2(t-\tau_{i+1})\right)+\left[x_k\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}}\alpha_k^{p_k}+$$
$$+\left(2n-2k+1+\beta_k\right)x_k^2+\left[x_k\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}}\left(z_{k+1}^{p_k}-\alpha_k^{p_k}\right) \qquad (18)$$

мұндағы $\beta_k=\beta_{k1}+\beta_{k2}+\beta_{k3}$. Осылайша α_k виртуалды контроллерін келесі түрде таңдап алайық:

$$\alpha_k^{p_k}(Z_k)=-sign(x_k)g_k^{\frac{r_k+\omega}{\sigma}}\left|x_k\right|^{\frac{r_k+\omega}{\sigma}} \qquad (19)$$

мұндағы $g_k=(3n-3k+2+\beta_k)^{\frac{\sigma}{r_k+\omega}}>1$ - оң тұрақты. Бұл индуктивті қадамды аяқтайды. Бұдан

$$\dot{V}_k\le-\left(n-k+1\right)\sum_{i=1}^{k}x_i^2-(n-k)\left(\sum_{i=1}^{k}x_i^2(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2(t-\tau_{i+1})\right)+\left[x_k\right]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}}\left(z_{k+1}^{p_k}-\alpha_k^{p_k}\right. \qquad (20)$$

$k = n$ болғанда $V_n : R^n \to R^+$ Ляпунов функционалы үшін

$$V_n(\cdot)=\sum_{i=1}^{n}\left(W_{H_i}(\cdot)+W_{D_i}(\cdot)\right) \qquad (21)$$

болады.

Жоғарыда келтірілген индуктивті болжамды қолдана отырып, n-ші қадамда $z_{n+1} = \alpha_n = u$ екенін ескеріп, $\alpha_n : R^n \to R$ үзіліссіз функциясын құра аламыз, бұдан $u : R^n \to R$ контроллері келесі түрде алынады:

$$u(z) = -\left(sign(x_n)\right)^{\frac{1}{p_n}} g_n^{\frac{r_{n+1}}{\sigma}} \left|x_k\right|^{\frac{r_{n+1}}{\sigma}} \tag{22}$$

Демек,

$$\dot{V}_n \le -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n\delta \tag{23}$$

4 және 6 леммалардан

$$W_{H_k}(t) \le \left| [z_k(t)]^{\frac{\sigma}{r_k}} - \left[\alpha_{k-1}\left(Z_{k-1}(t)\right)\right]^{\frac{\sigma}{r_k}} \right|^{\frac{2\sigma - r_{k+1}p_k}{\sigma}} \left| z_k(t) - \alpha_{k-1}\left(Z_{k-1}(t)\right)\right| \le 2^{1-\frac{r_k}{\sigma}} \left|x_k(t)\right|^{\frac{2\sigma-\omega}{\sigma}}$$

Айталық, $\lambda = \dfrac{2\sigma - \omega}{\sigma}$ болсын. Сонда келесі шартты алуға болады:

$$\dot{V}_n \le -\left(\frac{1}{2}V_n\right)^{\frac{1}{\lambda}} + n\delta \tag{24}$$

Келесі түрдегі жиынды енгізейік

$$\Omega := \{x(t) \in R^n \mid V_n \ge 2(2n\delta)^{\lambda} \tag{25}$$

және айталық, $x(t)$ - $x(0)$ бастапқы күйі бар (7) жүйенің траекториясы болсын. Егер $x(t) \in \Omega$ болса, онда (25)-тен мынау шығады:

$$\dot{V}_n \le -\left(\frac{1}{2}V_n\right)^{\frac{1}{\lambda}} + n\delta \le -n\delta < 0 \tag{26}$$

Бұл дегеніміз, $x(t) \in \Omega$ болғанда, V_n - t уақыт өте келе қатаң кемімелі болады, демек x(t) - R^n кеңістігінің Ω толықтауыш жиынтығына ақырлы T>0 уақытында еніп, сол жерде мәңгі қалуы керек дегенді білдіреді. Бұдан (7) тұйық жүйенің $x(t)$ шешімі $[0, +\infty)$ аралығында анықталған және кең ауқымды шектелген болады. Енді (3) шарттың орынды болатындығын (9), (24) қолданып, және δ параметрін таңдау арқылы көрсетуге болады:

$$\left|y(t) - y_r(t)\right| = \left|x_1(t)\right| \le V_n \le 2(2n\delta)^{\frac{2\sigma-\omega}{\sigma}} < \varepsilon$$

Бұдан кез келген $\varepsilon > 0$ үшін (22) түрдегі үзіліссіз күй кері байланыс контроллері (3) шартты қанағаттандыратын шығысты кең ауқымды практикалық ізге түсіру есебін шешеді.

Сандық мысал. Бұл бөлімде теориялық нәтижелердің дұрыстығы мен тиімділігін көрсету үшін сандық мысал қарастырайық. Келесі түрдегі сызықты емес жүйені қарастырамыз:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2^5(t) - \left|z_1(t-1)\right|^{\frac{5}{2}} \cos z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = u^5(t) + z_2^2(t-2) + z_2^2(t)\sin(z_1(t-1)) \\ y(t) = z_1(t) \end{cases} \tag{27}$$

$\phi_1(\cdot) = \left|z_1(t-1)\right|^{\frac{5}{2}} \cos(z_2(t)),\ \ \phi_2(\cdot) = z_2^2(t-2) + z_2^2(t)\sin(z_1(t-1))$. $\omega = \dfrac{1}{5}$ деп алсақ, онда $r_1 = 1$ және $p_1 = 5$, $p_2 = 5$, демек $r_2 = \dfrac{r_1+\omega}{p_1} = \dfrac{1+\frac{1}{5}}{5} = \dfrac{6}{25}$, $r_3 = \dfrac{r_2+\omega}{p_2} = \dfrac{\frac{6}{25}+\frac{1}{5}}{5} = \dfrac{11}{125}$ болатындығын оңай есептеп алуға болады.

$$\left|\phi_1\right| \le \left(1+z_1^2\right)\left(\left|z_1\right|^{\frac{6}{5}} + \left|z_1(t-1)\right|^{\frac{6}{5}}\right) + C_2,\quad \left|\phi_2\right| \le$$

$$\le C_1\left(\left|z_1(t)\right|^{\frac{6}{5}} + \left|z_2(t)\right|^{\frac{11}{6}} + \left|z_1(t-1)\right|^{\frac{6}{5}} + \left|z_2(t-2)\right|^{\frac{11}{6}}\right) + C_2$$

1-болжамды қанағаттандыратынын көреміз. Енді $\sigma = 2$ деп таңдап алайық.

$$\left(\sigma \ge \max\{r_1+\omega; r_2+\omega; r_3+\omega\} = \max\left\{\frac{6}{5}; \frac{11}{25}; \frac{36}{125}\right\} = \frac{6}{5}\right)$$

Есептеулер жүргізу арқылы Ляпунов функциясын келесі түрде табамыз:

$$\dot{V}_2 \le -x_1^2 + \left[x_1\right]^{\frac{89}{50}} \alpha_2^5 + (1+\beta_2)x_2^2 + \left[x_2\right]^{\frac{89}{50}}\left(z_3^5 - \alpha_2^5\right)$$

мұндағы $\beta_2 = \beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23}$, $\alpha_2^5(z_2) = -\left[x_2\right]^{\frac{11}{25}} g_2^{\frac{11}{50}}$ $\dot{V}_2 \le -(x_1^2 + x_2^2) + \left[x_2\right]^{\frac{89}{50}}\left(z_3^5 - \alpha_2^5\right)$

$\alpha_2 = u$, $u(z) = -\left(sign(x_2)\right)^{\frac{1}{5}} g_2^{\frac{11}{250}} \left|x_2\right|^{\frac{11}{250}}$, мұндағы $g_2 = (2+\beta_2)^{\frac{50}{11}} > 1$, бұдан

$$\dot{V}_2 \le -\left(\frac{1}{2}V_2\right)^{\frac{10}{19}} + 2\delta \le -2\delta < 0$$

$$\dot{V}_2 \le -\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

$$\left|y(t) - y_r(t)\right| = \left|x_1(t)\right| \le V_2 \le 2(4\delta)^{\frac{10}{19}} < \varepsilon\ \ , \varepsilon > 0$$

$\delta = 0{,}01$ болғанда алынған ізге түсіру қателігі 0.38 төңірегінде болады; $\delta = 0{,}0001$ болған кезде ізге түсіру қателігі шамамен 0.016 азаяды.

Қорытынды. Бұл жұмыста жүйенің сызықтық емес әлсіз жағдайларында уақыт өте келе өзгеретін кідірістері бар жоғары ретті сызықты емес жүйелер класы үшін шығысты кең ауқымды практикалық ізге түсіру мәселесі зерттеледі. Таңба функциясын және қуат интеграторын қосудың жалпылама әдісін қолдана отырып, уақыт кешігуіне тәуелсіз үздіксіз күй контроллері жасалды, нәтижесінде алынған жабық контурлық жүйенің барлық күйлері шектеулі болады, ал ізге түсіру қателігі жеткілікті аз болады. Сандық мысал нәтиженің тиімділігін көрсетеді.

ӘДЕБИЕТ

1 Алимхан К., Инаба Х. Практическое отслеживание выходного сигнала с помощью плавного выходного компенсатора для неопределенных систем с нестабилизуемой и неопределяемой линеаризацией. Int. J. Моделирование, идентификация и контроль, 5, 1-13 (2008).

2 Алимхан К., Инаба Х. Надежное практическое отслеживание выходных данных с помощью выходного компенсатора для класса неопределенных изначально нелинейных систем. Int. J. Моделирование, идентификация и контроль, 4, 304-314 (2008).

3 Гун К., Цянь С. Глобальное практическое регулирование выходного сигнала класса нелинейных систем с помощью обратной связи по выходу, Automatica, (2007), 43, (1), стр. 184-189.

4 Бенабдалла А., Халифа Т., Мабрук М. Адаптивное практическое управление отслеживанием выходных данных для класса неопределенных нелинейных систем, Международный журнал системных наук, 1421-1431 (2013).

5 Цянь К.Дж., Лин У. Практическое отслеживание выходных данных нелинейных систем с неконтролируемой нестабильной линеаризацией. IEEE Transactions on Automatic Control, 47, 21-36 (2002).

6 Сун З.Я., Лю Ю.Г. Адаптивное практическое управление отслеживанием выходных данных для нелинейных неопределенных систем высокого порядка. Автомат Acta. Синица, 34, 984-989 (2008).

7 Дэниел У., Ли Дж.М., Ниу Ю.Г. Адаптивное нейронное управление для класса нелинейно-параметрических систем с временной задержкой. IEEE Transactions on Neural Networks, 16, 625-635 (2005).

8 Хуа К.С., Ван К.Г., Гуан Х.П. Адаптивный контроллер слежения для нелинейных систем с временными задержками и неизвестным входом в мертвую зону. IEEE Transactions on Automatic Control, 53, 1753-1759 (2008).

9 Полендо Дж., Цянь С. Обобщенный подход однородного доминирования для глобальной стабилизации изначально нелинейных систем с помощью обратной связи по выходу, Int. J. Робастного и нелинейного управления, том 7, № 7, стр. 605-629 (2007).

10 Сун З.Я., Чжан Х.Х., Се Х.Дж. Непрерывная глобальная стабилизация нелинейных систем с временной задержкой высокого порядка. Международный журнал контроля, 6, 994-1007. (2013).

REFERENCES

1 Alimhan, K., Inaba, H. Practical output tracking by smooth output compensator for uncertain systems with unstabilisable and undetectable linearization. Int. J. Modelling, Identification and Control, 5, 1-13 (2008).

2 Alimhan, K., Inaba, H. Robust practical output tracking by output compensator for a class of uncertain inherently nonlinear systems. Int. J. Modelling, Identification and Control, 4, 304-314(2008).

3 Gong, Q., Qian, C., Global practical output regulation of a class of nonlinear systems by output feedback, Automatica, (2007), 43, (1), pp. 184–189.

4 BenAbdallah A., Khalifa T, Mabrouk M. Adaptive practical output tracking control for a class of uncertain nonlinear systems, International Journal of Systems Science, 1421-1431 (2013) .

5 Qian, C.J., Lin, W. Practical output tracking of nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization. IEEE Transactions on Automatic Control, 47, 21-36 (2002).

6 Sun, Z.Y., Liu, Y.G. Adaptive practical output tracking control for high-order nonlinear uncertain systems. Acta Automat. Sinica, 34, 984-989(2008).

7 Daniel, W., Li, J.M., Niu, Y.G. Adaptive neural control for a class of nonlinearly parametric time-delay systems. IEEE Transactions on Neural Networks, 16, 625-635(2005).

8 Hua, C.C., Wang, Q.G., Guan, X.P. Adaptive tracking controller design of nonlinear systems with time delays and unknown dead-zone input. IEEE Transactions on Automatic Control, 53, 1753-1759(2008).

9 Polendo, J., Qian, C. A generalized homogeneous domination approach for global stabilization of inherently nonlinear systems via output feedback, Int. J. of Robust and Nonlinear Control, vol. 7, No.7, pp. 605–629(2007).

10 Sun, Z.Y., Zhang, X.H., Xie, X.J. Continuous global stabilization of high-order time-delay nonlinear systems. International Journal of Control, 6, 994-1007. (2013).

А. К. ЕРДЕНОВА[1,2], Қ. АЛИМХАН[2], Н. ТАСБОЛАТҰЛЫ[1,3], С. С. АЛИШЕВА[2]

[1]Международный университет Астана, Нур-Султан, Казахстан
[2]Евразийский университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
[3]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

НЕПРЕРЫВНОЕ ГЛОБАЛЬНОЕ ОТСЛЕЖИВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В данной статье рассматривается проблема глобального практического отслеживания для класса нелинейных систем высокого порядка с задержкой по времени. Особенность исследуемой системы состоит в том, что степень ограничения на верхнем пределе нелинейности может быть получена в непрерывном интервале. Вводя знаковую (сигнум) функцию и добавляя обобщенный метод включения интегратора мощности, а также выбирая соответствующую функцию Ляпунова, создадим регулируемый и не зависящий от времени контроллер слежения, который будет доминировать в нелинейности с задержкой по времени. Все состояния замкнутой системы, полученные в результате разработанного контроллера, широко ограничены и гарантируют, что ошибка слежения по истечении установленного времени достаточно мала. Приводится числовой пример, демонстрирующий эффективность и обоснованность предложенного метода.

***Ключевые слова**: практическое отслеживание выхода, обратная связь по состоянию, функция Ляпунова.*

A. K. YERDENOVA[1,2], K. ALIMHAN[2], N. TASBOLATULY[1,3], S. S. ALISHEVA[2]

[1]Astana International University, Nur-Sultan, Kazakhstan
[2]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
[3]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

CONTINUOUS GLOBAL TRACKING OF A CLASS HIGH-ORDER TIME-DELAY NONLINEAR SYSTEMS

This paper deals with the problem of global practical tracking for a class of high-order nonlinear systems with time delay. The peculiarity of the system under study is that the degree of restriction on the upper limit of nonlinearity can be obtained in a continuous interval. By introducing a sign (signum) function and adding a generalized method for enabling the power integrator, as well as selecting the corresponding Lyapunov function, we create an adjustable and time-independent tracking controller that will dominate the time-delayed nonlinearity. All the closed system states obtained as a result of the developed controller are widely limited and ensure that the tracking error after the set time is sufficiently small. A numerical example is given to demonstrate the effectiveness and validity of the proposed design.

***Keywords**: practical output tracking, state feedback, Lyapunov function.*