УДК 621.398
https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.182

М. А. БЕЙСЕНБИ, А. А. МАЙМУРЫНОВА*

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, кафедра системного анализа и управления, Нур-Султан, Казахстан.
beisenbi@mail.ru, aizhan_maimurynova@mail.ru.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОСНОВНОГО КОНТУРА СИСТЕМЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫМИ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ХАОТИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ С M-ВХОДАМИ И N-ВЫХОДАМИ В КЛАССЕ КАТАСТРОФ «ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ОМБИЛИКА»

Актуальной проблемой в условиях неопределенности параметров объекта управления и внешних воздействий для управления неустойчивыми и детерминированными хаотическими процессами является применение методов адаптации. При этом эталонная модель с желаемой динамикой и основной контур управления адаптивной системы строятся в классе катастроф «гиперболическая омбилика», а апериодическая робастная устойчивость эталонной модели с желаемой динамикой и основной контур управления самоорганизующейся адаптивной системы с повышенным потенциалом робастной устойчивости исследуется градиентно-скоростным методом вектор функции Ляпунова.

***Ключевые слова**: гиперболическая омбилика, детерминированные хаотические процессы, градиентно-скоростной метод, робастная устойчивость, адаптивная система, лемма Морса, функция Ляпунова.*

Введение. Синтез основного контура адаптивной системы управления при известных параметрах неустойчивыми и детерминированным хаотическими процессами [1,2,3,4] неразрывно связан с обеспечением устойчивости, робастности и качества управления [5,6]. В адаптивных системах управления внешние воздействия компенсируются, т.е. система управления становится инвариантным относительно внешних воздействий [2,7,8], а выбор эталонной модели и синтез основного контура управления в классе катастроф «гиперболическая омбилика» [10] обеспечивает робастную устойчивость [5,6], а желаемая динамика эталонной модели, исследование и синтез всех подсистем адаптивного управления, градиентно скоростным методом вектор

* E-mail корреспондирующего автора: akkma@mail.ru

функций Ляпунова [11] гарантирует апериодическую робастную устойчивость системы заданного качества управления.

Задача синтеза основного контура управления при известных значениях параметров объекта управления решается градиентно скоростным методом вектор-функции Ляпунова [11].

Методы, основанные на применении функций Ляпунова [7,9,12,13], являются основными в управлении. Но в настоящее время эти методы служат только инструментом для теоретических исследований [14,15,16,17,18] и не могут дать ответы на основные вопросы исследования и синтеза адаптивных регуляторов в реальных условиях. Основным препятствием при этом являются отсутствие универсального подхода к построению функций Ляпунова [12,13,19].

Из геометрической интерпретации теоремы об асимптотической устойчивости [7,12,13] прямого метода А.М. Ляпунова можно наглядно убедиться, что динамика изменения фазовой траектории в фазовом пространстве определяются вектором скорости $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$, а динамика изменения требуемой функций Ляпунова вдаль фазовой траектории в фазовом пространстве всюду определяется вектором градиента $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ от функций Ляпунова $V(x)$. На границе апериодической робастной устойчивости эти векторы имеют одинаковые значения по величине и противоположенного знака. На этой основе рассматривается динамическая система как градиентные системы, а функции Ляпунова как потенциальные функции из теории катастроф [10] и позволяет написать:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}, i = 1,...,n \ ;$$

Применение этих соотношений и леммы Морса позволяет построить необходимую функцию Ляпунова и решить задачи синтеза при известных значениях параметров объекта управления.

Из условий границы апериодической робастной устойчивости эталонной модели с желаемой динамикой и основного контура системы адаптивного управления неустойчивыми процессами вычисляются коэффициенты усиления обратной связи.

В настоящее время общепризнано, что реальные объекты управления являются нелинейными и детерминированный хаос с порождением «странного аттрактора» является внутренним свойством любой нелинейной детерминированной динамической системы [1,2,3,4]. В линеаризованных динамических системах это проявляется как потеря робастной устойчивости [5,6].

Результаты и их обсуждение.

Исследование системы основного контура управления. Пусть MIMO система управления представляется уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния системы управления; $u(t) \in R^m$ – вектор-функция управляющих воздействий; $yx(t) \in R^l$ – вектор выхода системы размерности l; $A \in R^{n\times n}$ – матрица объекта управления размерности $n \times n$; $B \in R^{m\times n}$ – матрица управления размерности $m \times n$; $C \in R^{l\times n}$ – матрица выхода системы управления размерности $l \times n$.

Первое уравнение системы управления заключает в себе всю динамику системы, второе же уравнение выхода представляет собой статическое соотношение. Для исследования динамических свойств, как правило, рассматривается только первое уравнение.

Пусть матрицы A и B заданы в следующем виде:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix}$$

Закон управления задается в виде катастрофы «гиперболическая омбилика» (трехпараметрические структурно-устойчивое отображение) [10,19,20]:

$$u_i(t) = +x_i^3 + x_{i+1}^3 + k_{i,i+1}x_i x_{i+1} - k_i^1 x_i - k_i^2 x_{i+1},\ i = 1, \dots, n \tag{1.2}$$

Первое уравнение системы (1.1) с учетом закона управления (1.2) в развернутой форме записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b_{11}x_1^3 + b_{11}x_2^3 + b_{11}k_{12}x_1x_2 - (a_{11} + b_{11}k_1^1)x_1 \pm (-a_{12} + b_{11}k_1^2)x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = b_{22}x_1^3 + b_{22}x_2^3 + b_{22}k_{12}x_1x_2 - (a_{21} + b_{22}k_2^1)x_1 \pm (-a_{22} + b_{22}k_2^2)x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ \quad \dots \qquad\qquad \dots \qquad\qquad \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + b_{nn}x_{n-1}^3 + b_{nn}x_n^3 + b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}x_n - \left(-a_{n,n-1} + b_{nn}k_n^1\right)x_{n-1} \\ \qquad \pm(-a_{nn} + b_{nn}k_n^2)x_n \end{cases} \tag{1.3}$$

Система (3.3) имеет стационарные состояния [10,19]:

$$x_{1s}^1 = 0, x_{2s}^1 = 0, x_{3s}^1 = 0, \dots, x_{ns}^1 = 0 \tag{1.4}$$

И другие стационарные состояния:

$$x_{is}^{2,3} = \pm\sqrt{k_i^1} + \frac{a_{ii}}{b_{ii}}, x_{(i+1)s} = 0,\ x_{is}^4 = \frac{1}{k_{i,i+1}}\left(k_i^2 + \frac{a_{i,i+1}}{b_{ii}}\right) \tag{1.5}$$

Апериодическая робастная устойчивость стационарного состояния (1.4) системы (1.3) исследуется градиентно-скоростным методом вектор-функции Ляпунова.

Из уравнения состояния (1.3) определяем компоненты векторов градиентов от вектор-функции Ляпунова [11]

$$\begin{cases} \frac{\partial V_i(x)}{dx_j} = -b_{ii}x_i^3 - \frac{1}{2}b_{ii}k_{i,i+1}x_ix_{i+1} + b_{ii}\left(k_i^1 - \frac{a_{ij}}{b_{ii}}\right)x_j \quad \text{при } j = i; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \\ \frac{\partial V_i(x)}{dx_j} = -b_{ii}x_{i+1}^3 - \frac{1}{2}b_{ii}k_{i,i+1}x_ix_{i+1} + b_{ii}\left(k_i^2 - \frac{a_{ij}}{b_{ii}}\right)x_j \quad \text{при } j = i+1; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \\ \frac{\partial V_i(x)}{dx_j} = -a_{ij}x_j, \quad \text{при } j \neq i; \quad j \neq i+1, \dots, n; j = 1, \dots, n \end{cases} \tag{1.6}$$

Из (1.6) по компонентам векторов градиентов построим вектор-функцию Ляпунова в скалярной форме:

$$\begin{gathered}V(x) = -\frac{1}{4}b_{11}x_1^4 - \frac{1}{4}b_{11}k_{12}x_1^2x_2 + \frac{1}{2}b_{11}\left(k_1^1 - \frac{a_{11}}{b_{11}}\right)x_1^2 - \frac{1}{4}b_{11}x_2^4 - \frac{1}{4}b_{11}k_{12}x_1x_2^2 + \frac{1}{2}b_{11}\left(k_1^2 - \frac{a_{12}}{b_{11}}\right)x_2^2 - \frac{1}{2}a_{13}x_3^2 - \\ \cdots - \frac{1}{2}a_{1n}x_n^2 - \frac{1}{4}b_{22}x_1^4 - \frac{1}{4}b_{22}k_{12}x_1^2x_2 + \frac{1}{2}b_{22}\left(k_2^1 - \frac{a_{21}}{b_{22}}\right)x_1^2 - \frac{1}{4}b_{22}x_2^4 - \frac{1}{4}b_{22}k_{12}x_2^2x_2 + \frac{1}{2}b_{22}\left(k_2^2 - \frac{a_{22}}{b_{22}}\right)x_2^2 - \\ \frac{1}{2}a_{23}x_3^2 - \cdots - \frac{1}{2}a_{2n}x_n^2 - \cdots - \frac{1}{2}a_{n1}x_1^2 - \frac{1}{2}a_{n2}x_2^2 - \cdots - \frac{1}{4}b_{nn}x_{n-1}^4 - \frac{1}{4}b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}^2x_n + \frac{1}{2}b_{nn}\left(k_n^1 - \frac{a_{n,n-1}}{b_{nn}}\right)x_{n-1}^2 - \\ \frac{1}{4}b_{nn}x_n^4 - \frac{1}{4}b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}x_n^2 + \frac{1}{2}b_{nn}\left(k_n^2 - \frac{a_{nn}}{b_{nn}}\right)x_n^2\end{gathered} \qquad (1.7)$$

По виду функции (1.7) условия существования функции Ляпунова, т.е. ее положительная определенность не очевидна, но функция (1.7) в начале координат обращается в нуль и является непрерывно-дифференцируемой функцией, т.е. удовлетворяет условиям леммы Морса из теории катастроф [10]. В соответствии с леммой Морса функция (1.7) может быть локальна в окрестности начала координат и представлена в виде квадратичной формы:

$$\begin{gathered}V(x) \approx [b_{11}k_1^1 - a_{11} + b_{22}k_1^2 - a_{21} - a_{31} - \cdots - a_{n1}]x_1^2 + \\ + [b_{11}k_2^1 - a_{12} + b_{22}k_2^2 - a_{22} - a_{32} - \cdots - a_{n2}]x_2^2 + \cdots + \\ [-a_{1n} - a_{2n} - a_{3n} - \cdots + b_{n-1n-1}k_n^1 - a_{n-1,n} + b_{nn}k_n^2 - a_{nn}]x_n^2\end{gathered} \qquad (1.8)$$

Условия существования функции Ляпунова, т.е. положительная определенность вектор-функции Ляпунова задаются системой неравенств:

$$\begin{cases}[b_{11}k_1^1 - a_{11} + b_{22}k_1^2 - a_{21} - a_{31} - \cdots - a_{n1}] > 0 \\ [b_{11}k_2^1 - a_{12} + b_{22}k_2^2 - a_{22} - a_{32} - \cdots - a_{n2}] > 0 \\ [-a_{1n} - a_{2n} - a_{3n} - \cdots + b_{n-1n-1}k_n^1 - a_{n-1,n} + b_{nn}k_n^2 - a_{nn}] > 0\end{cases} \qquad (1.9)$$

1.2. Исследуется апериодическая робастная устойчивость стационарного состояния (1.5) системы (1.3). Для этого систему (1.3) записываем в отклонениях относительно стационарного состояния (1.5):

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt} = b_{11}x_1^3 + b_{11}x_2^3 + b_{11}k_{12}x_1x_2 + 3b_{11}\sqrt{k_1^1 + \frac{a_{12}}{b_{11}}}\,x_1^2 + 3b_{11}\sqrt{k_1^2 + \frac{a_{12}}{b_{11}}}\,x_2^2 + b_{11}\left(k_1^1 + \frac{a_{11}}{b_{11}}\right)x_1 \\ -b_{11}\left(k_1^2 + \frac{a_{12}}{b_{11}}\right)x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = b_{22}x_1^3 + b_{22}x_2^3 + b_{22}k_{12}x_1x_2 + 3b_{22}\sqrt{k_2^1 + \frac{a_{21}}{b_{22}}}\,x_1^2 + 3b_{22}\sqrt{k_2^2 + \frac{a_{22}}{b_{22}}}\,x_2^2 + b_{22}\left(k_2^1 + \frac{a_{21}}{b_{22}}\right)x_1 \\ +b_{22}\left(k_2^2 + \frac{a_{22}}{b_{22}}\right)x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_{n-1}^3 + b_{nn}x_n^3 + b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}x_n + 3b_{nn}\sqrt{k_n^1 + \frac{a_{n,n-1}}{b_{n-1,n}}}\,x_{n-1}^2 \\ +3b_{nn}\sqrt{k_n^2 + \frac{a_{nn}}{b_{nn}}}\,x_n^2 - b_{nn}\left(k_n^1 + \frac{a_{n,n-1}}{b_{nn}}\right)x_{n-1} - b_{nn}\left(k_n^2 + \frac{a_{nn}}{b_{nn}}\right)x_n\end{cases} \qquad (1.10)$$

Из уравнения состояния (1.10) определяются компоненты векторов градиентов от вектор-функции Ляпунова $V(x) = (V_1(x), \ldots, V_n(x))$:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_i(x)}{dx_j} = -b_{ii}x_i^3 - \frac{1}{2}b_{ii}k_{i,i+1}x_i x_{i+1} - 3b_{ii}\sqrt{k_i^1 - \frac{a_{ij}}{b_{ii}}}\,x_i^2 - b_{ii}\left(k_i^1 - \frac{a_{ij}}{b_{ii}}\right)x_i \\ \text{при } j = i;\, i = 1,\dots,n;\, j = 1,\dots,n \\ \frac{\partial V_i(x)}{dx_j} = -b_{ii}x_{i+1}^3 - \frac{1}{2}b_{ii}k_{i,i+1}x_i x_{i+1} - 3b_{ii}\sqrt{k_i^2 - \frac{a_{ij}}{b_{ii}}}\,x_{i+1}^2 - b_{ii}\left(k_i^2 - \frac{a_{ij}}{b_{ii}}\right)x_j \\ \text{при } j = i+1;\, i = 1,\dots,n;\, j = 1,\dots,n \\ \frac{\partial V_i(x)}{dx_j} = -a_{ij}x_j, \quad \text{при } j \neq i; \quad j \neq i+1,\dots,n;\, j = 1,\dots,n \end{cases} \tag{1.11}$$

Определим вектор-функцию Ляпунова в скалярной форме по компонентам градиента (1.11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} V(x) = &\\ -\tfrac{1}{4}b_{11}x_1^4 &- \tfrac{1}{4}b_{11}k_{12}x_1^2x_2 - b_{11}\sqrt{k_1^1 + \tfrac{a_{11}}{b_{11}}}\,x_1^3 - b_{11}\left(k_1^1 + \tfrac{a_{11}}{b_{11}}\right)x_1^2 - \tfrac{1}{4}b_{11}x_2^4 - \tfrac{1}{4}b_{11}k_{12}x_1x_2^2 - b_{11}\sqrt{k_1^2 + \tfrac{a_{12}}{b_{11}}}\,x_2^3 - \\ b_{11}\left(k_1^2 + \tfrac{a_{12}}{b_{11}}\right)x_2^2 &- \tfrac{1}{2}a_{13}x_3^2 - \dots - \tfrac{1}{2}a_{1n}x_n^2 -, \dots, - \tfrac{1}{2}a_{n1}x_1^2 - \tfrac{1}{2}a_{n2}x_2^2 - \dots - \tfrac{1}{4}b_{nn}x_{n-1}^4 - \tfrac{1}{4}b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}^2x_n - \\ b_{nn}\sqrt{k_n^1 + \tfrac{a_{n,n-1}}{b_{nn}}}\,x_1^2 &\left(k_2^1 - \tfrac{a_{21}}{b_{22}}\right)x_1^2 - \tfrac{1}{4}b_{22}x_2^4 - \tfrac{1}{4}b_{22}k_{12}x_2^2x_2 + \tfrac{1}{2}b_{22}\left(k_2^2 - \tfrac{a_{22}}{b_{22}}\right)x_2^2 - \tfrac{1}{2}a_{23}x_3^2 - \dots - \tfrac{1}{2}a_{2n}x_n^2 - \dots - \\ \tfrac{1}{2}a_{n1}x_1^2 &- \tfrac{1}{2}a_{n2}x_2^2 - \dots - \tfrac{1}{4}b_{nn}x_{n-1}^4 - \tfrac{1}{4}b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}^2x_n - b_{nn}\sqrt{k_n^1 - \tfrac{a_{n,n-1}}{b_{nn}}}\,x_{n-1}^3 - b_{nn}\left(k_n^1 - \tfrac{a_{n,n-1}}{b_{nn}}\right)x_{n-1}^2 - \\ \tfrac{1}{4}b_{nn}x_n^4 &- \tfrac{1}{4}b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}x_n^2 - b_{nn}\sqrt{k_n^2 + \tfrac{a_{nn}}{b_{nn}}}\,x_n^3 - b_{nn}\left(k_n^2 - \tfrac{a_{nn}}{b_{nn}}\right)x_n^2 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Как видно из (1.12), условия положительной или отрицательной определенности функции Ляпунова не являются очевидными, вследствие чего применим лемму Морса. В этом случае функцию Ляпунова (1.12) локально, в окрестности стационарных состояний (1.5), запишем в виде квадратичной формы:

$$\begin{aligned} V(x) \approx &-[b_{11}k_1^1 + a_{11} + b_{22}k_1^2 + a_{21} + a_{31} + a_{41} + \dots + a_{n1}]x_1^2 + \\ &-[b_{11}k_2^1 + a_{12} + b_{22}k_2^2 + a_{22} + a_{32} + a_{42} + \dots + a_{n2}]x_2^2 + \dots \\ &-\left[a_{1,n-1} + a_{2,n-1} + a_{3,n-1} + \dots + b_{n-1,n-1}k_{n-1}^1 + b_{nn}k_{n-1}^2 + a_{n-1,n-1} + a_{n,n-1}\right]x_{n-1}^2 + \\ &-\left[a_{1n} + a_{2n} + a_{3n} + \dots + b_{n-1,n-1}k_n^1 + a_{n-1,n} + b_{nn}k_n^2 + a_{nn}\right]x_n^2 + \dots \end{aligned} \tag{1.13}$$

Отсюда условие положительной определенности функции Ляпунова, т.е. необходимое условие апериодической робастной устойчивости, будет определяться неравенствами:

$$\begin{cases} b_{11}k_1^1 + a_{11} + b_{22}k_1^2 + a_{21} + a_{31} + a_{41} + \dots + a_{n1} > 0 \\ b_{11}k_2^1 + a_{12} + b_{22}k_2^2 + a_{22} + a_{32} + a_{42} + \dots + a_{n2} > 0 \\ \qquad \dots \qquad\qquad \dots \qquad\qquad \dots \\ a_{1,n-1} + a_{2,n-1} + a_{3,n-1} + \dots + b_{n-1,n-1}k_{n-1}^1 + b_{nn}k_{n-1}^2 + a_{n-1,n-1} + a_{n,n-1} > 0 \\ a_{1n} + a_{2n} + a_{3n} + \dots + b_{n-1,n-1}k_n^1 + a_{n-1,n} + b_{nn}k_n^2 + a_{nn} > 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Отсюда очевидно, что устойчивость системы управления, построенной в классе катастрофы «гиперболическая омбилика» находится в неограниченно широких границах изменения неопределенных параметров системы управления. Существование и устойчивость стационарного состояния (1.4) возможны при изменении неопределенных параметров объекта управления в области (1.9). В случае же потери устойчивости этого стационарного состояния появляются иные стационарные состояния (1.5), при этом невозможно их существование одновременно. Последние стационарные состояния (1.5) будут устойчивы, когда выполняется система неравенств (1.14).

Исследование эталонной модели адаптивного управления. Пусть эталонная модель с желаемыми переходными характеристиками, полученные на основе имитационного эксперимента на модели, имеет вид при $z_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} \frac{dx_{M1}}{dt} = x_{M1}^3 + x_{M2}^3 + d_{12}x_{M1}x_{M2} - d_1^1 x_{M1} - d_1^2 x_{M2} + a_{13}^M x_{M3} +, \dots, + a_{1n}^M x_{Mn} \\ \frac{dx_{M2}}{dt} = x_{M1}^3 + x_{M2}^3 + d_{12}x_{M1}x_{M2} - d_2^1 x_{M1} - d_2^2 x_{M2} + a_{23}^M x_{M3} +, \dots, + a_{2n}^M x_{Mn} \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \frac{dx_{Mn}}{dt} = a_{n1}^M x_{M1} + a_{n2}^M x_{M2} + a_{n3}^M x_{M3} +, \dots, + x_{M,n-1}^3 + x_{Mn}^3 + d_{n-1,n} x_{M(n-1)} x_{Mn} - d_n^1 x_{M(n-1)} - d_n^2 x_{Mn} \end{cases} \tag{2.1}$$

Стационарные состояния системы (2.1) определяются:

$$x_{M1}^1 = 0, \quad x_{M2}^1 = 0, \quad x_{M3}^1 = 0, \dots, \quad x_{Mn}^1 = 0 \tag{2.2}$$

и

$$x_{Mi}^{2,3} = \pm\sqrt{d_i^1}, x_{m(i+1)} = 0, d_{i,i+1} = \sqrt{d_i^2}, i = 1, \dots, n \tag{2.3}$$

Исследуется робастная устойчивость стационарных состояний (2.2) и (2.3) градиентно скоростным методом вектор-функций Ляпунова [11].

Условия положительной определенности вектор функции Ляпунова квадратичной формы (2.12) (условия апериодической робастной устойчивости стационарного состояния (2.2)) определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} d_1^1 + d_2^1 - a_{31}^M - a_{41}^M -, \dots, - a_{(n-1),1}^M - a_{n1}^M > 0 \\ d_1^2 + d_2^2 - a_{32}^M - a_{42}^M -, \dots, - a_{(n-1),2}^M - a_{n2}^m > 0 \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ -a_{1,(n-1)}^M - a_{2,(n-1)}^M - a_{3,(n-1)}^M + d_{n-1}^1 + d_n^1 > 0 \\ -a_{1n}^M - a_{2n}^M - a_{3n}^M - a_{4n}^M -, \dots, + d_{n-1}^2 + d_n^2 > 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Таким образом, область апериодической робастной устойчивости стационарного состояния (2.2) определяется неравенствами (2.4).

Исследуется устойчивость стационарного состояния (2.3). Уровнения состояния (2.1) представляются в отклонениях относительно стационарного состояния (2.3):

$$\begin{cases} \frac{dx_{m1}}{dt} = x_{M1}^3 + x_{M2}^3 + 3\sqrt{d_1^1} x_{M1}^2 + d_{12}x_{M1}x_{M2} + d_1^1 x_{M1} - d_1^2 x_{M2} + a_{13}^M x_{M3} +, \dots, + a_{1n}^M x_{Mn} \\ \frac{dx_{m2}}{dt} = x_{M1}^3 + x_{M2}^3 + 3\sqrt{d_2^1} x_{M1}^2 + d_{12}x_{M1}x_{M2} + d_2^1 x_{M1} - d_2^2 x_{M2} + a_{23}^M x_{M3} +, \dots, + a_{2n}^M x_{Mn} \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \frac{dx_{mn}}{dt} = a_{n1}^M x_{M1} + a_{n2}^M x_{M2}, \dots, + x_{M(n-1)}^3 + x_{Mn}^3 + 3\sqrt{d_{n-1}^1}\, x_{M(n-1)}^2 + d_{(n-1),n} x_{M(n-1)} x_{Mn} + d_n^1 x_{M(n-1)} - d_n^2 x_{Mn} \end{cases} \tag{2.5}$$

Условия положительной определенности вектора функции Ляпунова (условия апериодической робастной устойчивости системы (2.5) определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} -d_1^1 + d_2^1 - a_{31}^M - a_{41}^M -, \dots, - a_{n-1,1}^M - a_{n1}^M > 0 \\ -d_1^2 + d_2^2 - a_{32}^M - a_{42}^M -, \dots, -a_{n-1,2}^M - a_{n2}^M > 0 \\ \quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ -a_{1,n-1}^M - a_{2,n-1}^M -, \dots, -d_{n-1}^1 + d_n^1 > 0 \\ -a_{1n}^M - a_{2n}^M -, \dots, -d_{n-1}^2 + d_n^2 > 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Таким образом, эталонная модель, построенная в классе катастроф «гиперболическая омбилика», является апериодической робастной устойчивой в неограниченно широких пределах изменения параметров модели. Стационарное состояние (2.2) существует и является робастной устойчивой при изменении неопределенных параметров в области (2.4), а стационарное состояние (2.3) появляется при потере робастной устойчивости стационарного состояния (2.2), и они одновременно не существуют. Стационарное состояние (2.3) существует и является апериодической устойчивой при выполнении системы неравенств (2.6).

Синтез регулятора основного контура управления. Для нахождения решения задачи синтеза основного контура MIMO системы адаптивного управления неустойчивыми и детерминированными хаотическими режимами в классе катастроф «гиперболическая омбилика» при предположении, что параметры объекта управления известны, сравнивается граничные значения параметров апериодической робастной устойчивости эталонной модели и заданной системы управления, т.е. неравенств (1.9) и (2.4) или (1.14) и (2.6) при фиксированных значениях параметров объекта управления $a_{i,j}^M = a_{ij}$, $i = 1,\dots,n;$ $j = 1,\dots,n.$

Получим:

$$\begin{cases} k_1^1 = \frac{1}{b_{11}}(d_1^1 + a_{11}), \quad k_1^2 = \frac{1}{b_{22}}(d_2^1 + a_{21}) \\ k_2^1 = \frac{1}{b_{11}}(d_1^2 + a_{12}), \quad k_2^2 = \frac{1}{b_{22}}(d_2^2 + a_{22}) \\ \quad \dots \qquad\qquad \dots \\ k_{n-1}^1 = \frac{1}{b_{n-1,n-1}}\left(d_{n-1}^1 + a_{n-1,n-1}\right), \quad k_{n-1}^2 = \frac{1}{b_{nn}}\left(d_n^1 + a_{n,n-1}\right) \\ k_n^1 = \frac{1}{b_{n-1,n-1}}\left(d_{n-1}^2 + a_{n-1,n}\right), \quad k_n^2 = \frac{1}{b_{n,n}}(d_n^2 + a_{nn}) \end{cases} \tag{3.1}$$

Или при измеряемости всех параметров обьекта управления и $a_{i,j}^M \neq a_{ij}$, $i \neq j$, $i = 1,\dots,n;$ $j = 1,\dots,n.$ можно определить синтезируемые коэффициенты системы:

$$\begin{cases} k_1^1 = \frac{1}{b_{11}}[d_1^1 + a_{11} - \beta_1 (a_{31}^M - a_{31} +, \dots, + a_{n1}^M - a_{n1})] \\ k_1^2 = \frac{1}{b_{22}}[d_2^1 + a_{21} - (1 - \beta_1)(a_{31}^M - a_{31} +, \dots, + a_{n1}^M - a_{n1})] \\ k_2^1 = \frac{1}{b_{11}}[d_1^1 + a_{12} - \beta_2 (a_{32}^M - a_{32} +, \dots, + a_{n2}^M - a_{n2})] \\ k_2^2 = \frac{1}{b_{22}}[d_2^2 + a_{22} - (1 - \beta_2)(a_{32}^M - a_{32} +, \dots, + a_{n2}^M - a_{n2})] \\ \qquad\qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ k_n^1 = \frac{1}{b_{n-1,n-1}}\left[-\beta_n (a_{1n}^M - a_{1n} + a_{2n}^M - a_{2n}, \dots, + d_{n-1}^2 + a_{n-1,n})\right] \\ k_n^2 = \frac{1}{b_{nn}}[-(1 - \beta_n)(a_{1n}^M - a_{1n} + a_{2n}^M - a_{2n}, \dots, + d_n^2 + a_{nn})] \end{cases} \tag{3.2}$$

где, β_i, $i = 1, \dots, n$ – некоторые весовые коэффициенты ($\beta_i < 1$).

Таким образом, при фиксированной измеряемости значений неопределенных параметров системы управления неустойчивыми и детерминированными хаотическими системами с m-входами и с n-выходами в классе катастроф «гиперболическая омбилика», коэффициенты настройки основного контура адаптивной системы вычисляются по формуле (3.1) и (3.2) в зависимости измеряемости параметров системы.

Заключение. В настоящее время общепризнано, что реальные объекты управления являются нелинейными и детерминированный хаос с порождением «странного аттракторов» является внутренними свойством любой нелинейной детерминированной динамической системы. В линеаризованных динамических системах это проявляется как потеря робастной устойчивости.

В условиях неопределенности параметров объекта управления и внешних воздействий основной проблемой управления неустойчивыми и детерминированными хаотическими процессами является применение методов адаптации. В адаптивных системах внешние воздействия компенсируются, а построение эталонной модели и основного контура управления в классе катастроф «гиперболическая омбилика» позволяет управлять неустойчивыми и детерминированными хаотическими процессами.

Граничные условия апериодической робастной устойчивости эталонной модели с желаемой динамикой и основного контура управления адаптивной системы позволяет решить задачу синтеза основного контура адаптивной системы по комплексу показателей качества, таких как: устойчивость, робастность, колебательность, быстродействие, отсутствие перерегулирования, статическая точность, желаемый вид переходных процессов в системе и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1 Брок У. Теория хаоса.– М.: Наука, 2011-424с.

2 Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления. Гл.13, Управление нелинейными колебательными и хаотическими системами. Спб.: Наука,1999-475с.

3 Лоскутов А.Ю. Хаос и управление динамическими системами// Нелинейная динамика и управление / под ред. С.В.Емельянова, С.К.Емельянова, С.К.Коровина. – М.:Физ-мат.,2001.– Т.1. – С.163-216.

4 Meehan P.A., Asokanthan S.F. Control of chaotic instabilities in spinning spacecraft with dissipation using Lyapunov method//Chaos, Solitions and Fractals.-2002.13.– P.477-1869.

5 Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука,2002.– 303 с .

6 Dorato P., Vedavalli Recent Advanced in Robust Control – New York: IEEE press, 1990.

7 Методы классической и современной теории автоматического управления:

Учебник в 5-ти тт. Т5: Методы современной теории автоматического управления/под ред. К.А.Пупкова, Н.Д.Егунова. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана , 2004. – 784с.

8 Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. – М.: Машиностроение, 1972.- 260с.

9 Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах.– М.: Наука,1990.-292с.

10 Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. В 2-томах. Т.1.– М.: Мир,1984.-287 с.

11 Бейсенби М.А. Исследование робастной устойчивости систем автоматического управления методом функции А.М Ляпунова. - Астана ,2015-204с.

12 Малкин И.Г. Теория устойчивости движения – М.: Наука, 1966. 540 с.

13 Барбаршин Е.А. Введение в теорию устойчивости движения – М.: Наука, 1967.225с.

14 Della Rossa, M., Goebal, R., Tanwani, A. *et al.* Piecewise structure of Lyapunov functions and densely checked decrese conditions for hybrid systems. *Math. Control Signals Syst.* 33,123-149 (2021). https://doi.org/10.1007/s00498-020-00273-9

15 Chen, Horng-Giou& Han, Kuang-Wei.(1993). Stability-robustness analysis for linear systems with state-space models. Journal of The Franklin Institute-engineering and Applied Mathematics – J FRANKLIN INST-ENG APPL MATH. 330. 939-966.10.1016/0016-0032(93)90087-B.

16 F.N.Bailey. The Application of Lyapunov's Second Method to Interconnected Systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, 3(3), 443-462. (20 pages). https://doi.org/10.1137/0303030

17 Хуанг З., Чжу К. и Гао Дж. Анализ устойчивости неопределенного дифференциального уравнения вторым методом Ляпунова. *Принятие решений нечеткого оптимума 20,* 129-144 (2021). https://doi.org/10.1007/s10700-020-09336-7

18 Baukas EK., Liu ZK. (2002) Robust Stabilizability. In : Deterministic and Stochastic Time-Delay Systems. Control Engineering. Birkhäuser Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0077-2_4

19 Бейсенби М.А. Методы повышения потенциала робастной устойчивости систем управления. –Астана ,2011– 292с.

20 Бейсенби М.А., Ержанов Б.А. Системы управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости. – Астана,2002– 164с.

REFERENCES

1 Brok U. Teoriya haosa.– M.: Nauka, 2011-424s.

2 Andrievskij B.R., Fradkov A.L. Izbrannye glavy teorii avtomaticheskogo upravleniya. Gl.13, Upravlenie nelinejnymi kolebatel'nymi i haoticheskimi sistemami. Spb.: Nauka,1999-475s.

3 Loskutov A.YU. Haos i upravlenie dinamicheskimi sistemami// Nelinejnaya dinamika i upravlenie / pod red. S.V.Emel'yanova, S.K.Emel'yanova, S.K.Korovina. – M.:Fiz-mat.,2001.– T.1. – S.163-216.

4 Meehan P.A., Asokanthan S.F. Control of chaotic instabilities in spinning spacecraft with dissipation using Lyapunov method//Chaos, Solitions and Fractals.-2002.13.– P.477-1869.

5 Polyak B.T., SHCHerbakov P.S. Robastnaya ustojchivost' i upravlenie. – M.: Nauka,2002.– 303 s .

6 Dorato P., Vedavalli Recent Advanced in Robust Control – New York: IEEE press, 1990.

7 Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravleniya:

Uchebnik v 5-ti tt. T5: Metody sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravleniya/pod red. K.A.Pupkova, N.D.Egunova. – M.: izd-vo MGTU im. N.E.Baumana , 2004. – 784s.

8 Petrov B.N., Rutkovskij V.YU., Krutova I.N., Zemlyakov S.D. Principy postroeniya i proektirovaniya samonastraivayushchihsya sistem upravleniya. – M.: Mashinostroenie, 1972.-260s.

9 Fradkov A.L. Adaptivnoe upravlenie v slozhnyh sistemah.– M.: Nauka,1990.-292s.

10 Gilmor R. Prikladnaya teoriya katastrof. V 2-tomah. T.1.– M.: Mir,1984.-287 s.

11 Bejsenbi M.A. Issledovanie robastnoj ustojchivosti sistem avtomaticheskogo upravleniya metodom funkcii A.M Lyapunova. - Astana ,2015-204s.

12 Malkin I.G. Teoriya ustojchivosti dvizheniya – M.: Nauka, 1966. 540 s.

13 Barbarshin E.A. Vvedenie v teoriyu ustojchivosti dvizheniya – M.: Nauka, 1967.225s.

14 Della Rossa, M., Goebal, R., Tanwani, A. et al. Piecewise structure of Lyapunov functions and densely checked decrese conditions for hybrid systems. Math. Control Signals Syst. 33,123-149 (2021). https://doi.org/10.1007/s00498-020-00273-9

15 Chen, Horng-Giou& Han, Kuang-Wei.(1993). Stability-robustness analysis for linear systems with state-space models. Journal of The Franklin Institute-engineering and Applied Mathematics – J FRANKLIN INST-ENG APPL MATH. 330. 939-966.10.1016/0016-0032(93)90087-B.

16 F.N.Bailey. The Application of Lyapunov’s Second Method to Interconnected Systems. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control, 3(3), 443-462. (20 pages). https://doi.org/10.1137/0303030

17 Huang Z., CHzhu K. i Gao Dzh. Analiz ustojchivosti neopredelennogo differencial'nogo uravneniya vtorym metodom Lyapunova. Prinyatie reshenij nechetkogo optimuma 20, 129-144 (2021). https://doi.org/10.1007/s10700-020-09336-7

18 Baukas EK., Liu ZK. (2002) Robust Stabilizability. In : Deterministic and Stochastic Time-Delay Systems. Control Engineering. Birkhäuser Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0077-2_4

19 Bejsenbi M.A. Metody povysheniya potenciala robastnoj ustojchivosti sistem upravleniya. – Astana ,2011– 292s.

20 Bejsenbi M.A., Erzhanov B.A. Sistemy upravleniya s povyshennym potencialom robastnoj ustojchivosti. – Astana,2002 – 164s.

М. А. БЕЙСЕНБИ, А. А. МАЙМҰРЫНОВА

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, жүйелік талдау және басқару кафедрасы, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

«ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ОМБИЛИКА» АПАТТАР КЛАСЫНДА M-КІРІСТЕР ЖӘНЕ N-ШЫҒУЛАР БАР ТҰРАҚСЫЗ ЖӘНЕ ДЕТЕРМИЛЕНГЕН ХАОСТЫҚ ҮРДІСТЕРДІ АДАПТИВТІ БАСҚАРУ ЖҮЙЕСІНІҢ НЕГІЗГІ ТІЗБЕГІН СИНТЕЗДЕУ МӘСЕЛЕСІН ШЕШУ

Басқару объектісі параметрлерінің белгісіздігі және сыртқы әсерлер жағдайында тұрақсыз және детерминирленген хаостық үрдістерді басқару үшін бейімделу әдістерін қолдану өзекті мәселе болып табылады. Бұл жағдайда қажетті динамикаға ие эталондық модель және бейімделу жүйесінің негізгі басқару контуры «гиперболалық омбилика» апат класында берік орнықтылық потенциалы жоғары өздігінен ұйымдастырылатын адаптивті жүйе Ляпунов векторлық функциясының градиент-жылдамдық әдісімен зерттеледі, ал қажетті динамикамен және негізгі басқару циклімен эталондық модельдің апериодтық сенімді тұрақтылығымен құрастырылады.

***Түйін сөздер**: гиперболалық омбилика, детерминделген хаостық үдерістер, градиент-жылдамдық әдісі, робуасты тұрақтылық, адаптивті жүйе, Морсе леммасы, Ляпунов функциясы.*

M. A. BEYSENBI, A. A. MAIMURYNOVA

L.N. Gumilyov Eurasian National University,Department of System Analysis and Management, Nur-Sultan, Kazakhstan

SOLUTION OF THE PROBLEM OF SYNTHESIS OF THE MAIN CONTOUR OF THE ADAPTIVE CONTROL SYSTEM FOR UNSTABLE AND DETERMINISTIC CHAOTIC PROCESSES WITH M-INPUTS AND N-OUTPUTS IN THE «HYPERBOLIC UMBILIC» CATASTROPHE CLASS

An urgent problem in the conditions of uncertainty of the parameters of the control object and external influences, for the control of unstable and deterministic chaotic processes, is the use of adaptation methods. In this case, the reference model with the desired dynamics and the main control loop of the adaptive system are constructed in the catastrophe class "hyperbolic umbilic", and the aperiodic robust stability of the reference model with the desired dynamics and the main control loop of the self-organizing adaptive system with an increased potential for robust stability is studied by the gradient-velocity method of the vector function Lyapunov.

***Key words**: hyperbolic umbilic, deterministic chaotic processes, velocity-gradient method, robust stability, adaptive system, Morse lemma, Lyapunov function.*