

А. Н. ТЕМИРБЕКОВ^{1*}, С. Е. КАСЕНОВ¹

¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби,

Алматы, Казахстан

e-mail: almas_tem@mail.ru, syrym.kasenov@mail.ru

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В работе рассматривается уравнение эллиптического типа с сильно меняющимися коэффициентами. Данная задача изучается в рамках исследований, выполняемых по проекту, финансируемому МОН РК, грант AP09058430. Интерес к исследованию таких уравнений вызван тем, что уравнения данного вида получаются при использовании метода фиктивных областей. Уравнения данного типа возникают при решении многих прикладных задач, включая задачи гидродинамики, теории многофазной фильтрации и многих других. В данной работе предлагается специальный метод для численного решения эллиптического уравнения с сильно меняющимися коэффициентами. Доказана теорема для оценки скорости сходимости разработанного итерационного процесса. Разработан вычислительный алгоритм и проведены численные расчеты для иллюстрации эффективности предлагаемого метода.

Ключевые слова: метод фиктивных областей, эллиптическое уравнение, задача Дирихле, уравнение с быстроменяющимися коэффициентами, вычислительный алгоритм, итерационный процесс, граничные условия.

Введение. Для численного решения уравнений эллиптического типа в областях сложной формы эффективно использовать метод фиктивных областей. В работе [1] предлагается экономичная (по числу действий) разностная схема второго порядка точности попеременно-треугольная схема для численного решения эллиптического уравнения. В работе [2] построен модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод с чебышевскими параметрами решения разностной задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка точности. В монографии В.И. Лебедева [3] рассмотрены применения метода композиции для нахождения решений задач на собственные значения, нестационарных задач, задачи Дирихле для бигармонического уравнения и сеточных задач. В работе [4] рассматривается стационарная разностная задача для уравнения Пуассона с кусочно-постоянными коэффициентами в подобластях. Уравнение Пуассона на границе раздела сред аппроксимируется специальным образом, т.е. коэффициенты разностного уравнения выбираются как частное в знаменателе, которого сумма коэффициентов в подобластях. Построен двухступенчатый итерационный процесс основанный на методе деления области.

Метод фиктивных областей применяется для решения многих задач вычислительной гидродинамики [5-16].

Для численного решения вспомогательной задачи МФО для уравнений Навье-Стокса используется метод расщепления по физическим процессам [17-18]. Второй этап алгоритма численной реализации данного метода приводит к решению эллипти-

* E-mail корреспондирующего автора: almas_tem@mail.ru

ческого уравнения для нахождения давления с сильно меняющимися коэффициентами.

Данная работа является продолжением работы [19-20], в которых описывается данный метод, без вычислительных экспериментов. Интерес к исследованию таких уравнений вызван тем, что уравнения данного вида получаются при использовании метода фиктивных областей.

В настоящей работе предлагается специальный метод для численного решения эллиптического уравнения с сильно меняющимися коэффициентами. В основе предлагаемого метода заложена специальная замена переменных, которая приводит задачу с разрывными коэффициентами второго рода к задаче с разрывными коэффициентами первого рода. Построен итерационный процесс с двумя параметрами и учитывающий отношение коэффициентов уравнения в подобластях. Доказана теорема для оценки скорости сходимости разработанного итерационного процесса. Разработан вычислительный алгоритм и проведены численные расчеты для иллюстрации эффективности предлагаемого метода.

Постановка задачи. Пусть Ω -ограниченная область из R^2 с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Для определенности положим $\Omega = Q_1 \cup Q_2, Q_1 \cap Q_2 = \Gamma, Q_2$ -строго внутренней подобласть. В Ω рассмотрим эллиптическое уравнение

$$-\operatorname{div}(k\nabla u) = f(\bar{x}), \bar{x} \in \Omega \tag{1}$$

с граничным условием

$$u(\bar{x}) = 0, \bar{x} \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где

$$k(\bar{x}) = \begin{cases} k_1 = \text{const}, \bar{x} \in Q_1, \\ k_2 = \text{const}, (\bar{x}), x \in Q_2 \end{cases}$$

Функция $f(\bar{x})$ предполагается принадлежащей гильбертовому пространству вещественных функций $L_2(\Omega)$ и в подобластях определяется следующим образом

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f^{(1)}(x), x \in Q_2, \\ 0, x \in Q_1 \end{cases}$$

Сделаем в (1) замену переменных $u = 2v/k_1$, несложные преобразования и получим

$$\Delta v + \operatorname{div}(\omega\nabla v) = -f(\bar{x}) \tag{3}$$

где $\omega = \frac{2k(x)}{k_1} - 1$. Обозначим $\theta = \frac{2k_2}{k_1} - 1$.

Введем обозначение $\bar{p} = \left(\omega \frac{\partial v}{\partial x_1}, \omega \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)$ и уравнение (3) запишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta v + \nabla \bar{p} = -f(\bar{x}), \\ p_1 / \omega - \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \\ p_2 / \omega - \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

3. Вычислительный алгоритм

Для численного решения системы уравнений (4) с граничными условиями $v|_{\partial\Omega} = 0$ рассмотрим итерационный метод

$$Bv_i^{n+1} + \Delta_h v^{n+1} + \nabla_h \bar{p}^{n+1} = -f(\bar{x}), \quad (5)$$

$$\beta(\bar{p}^{n+1} - \bar{p}^n) + \frac{\bar{p}^{n+1}}{\omega} - \nabla_h v^{n+1} = 0$$

где B оператор итерационного метода, β – итерационный параметр, индекс h означает разностный аналог дифференциального оператора.

Оператор B в итерационном методе (5) выберем следующим образом

$$B = (1 - \tau)\Delta_h - \tau \operatorname{div}_h(\rho \nabla_h), \quad (6)$$

где $\rho = (\beta + 1/\omega)^{-1}$.

Предположим, что $v^0 \in \overset{0}{W}_2(\Omega)$ и $p^0 = \nabla q$, где $q \in \overset{0}{W}_2$. Это условие, в частности выполнено, если $(v^0, p^0) = 0$.

В дальнейшем будем считать, что $B > 0$ на $\overset{0}{W}_2$. Для этого достаточно выполнение неравенства

$$1 - \tau - \frac{\tau}{\beta} > 0. \quad (7)$$

В этом случае B на $\overset{0}{W}_2$ удовлетворяет операторному неравенству

$$-\chi_1 \Delta \leq B \leq -\chi_2 \Delta \quad (8)$$

постоянные χ_1 и χ_2 можно выбрать не зависящими от $\theta \geq 1$. Подставляя оператор B определенной в виде (6) в (5), получим

$$\Delta_h v^{n+1} = F(x), \quad (9)$$

$$\bar{p}^{n+1} = \beta \rho \bar{p}^n + \rho \nabla_h v^{n+1}, \quad (10)$$

где

$$F(\bar{x}) = (1 - \tau)\Delta_h v^n - \tau \operatorname{div}_h(\beta \rho \nabla_h v^n) - \tau \operatorname{div}_h(\beta \rho \bar{p}^n) \quad (11)$$

Приведем алгоритм численной реализации метода (9), (10). Один шаг итерационного метода (9), (10) состоит в нахождении значения v^{n+1} по известным v^n, \bar{p}^n . Для этого требуется решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона (9) в Ω . После этого значение \bar{p}^{n+1} по известным \bar{p}^n и v^{n+1} пересчитывается по формуле (10).

4. Исследование сходимости. Докажем некоторые вспомогательные оценки, которые потребуются при исследовании итерационного метода. Пусть $H(Q_2)$ – замыкание в $W_2^1(Q_2)$ множество гладких функций, ортогональных единице на Γ , а $H(Q_1)$ – замыкание в $W_2^1(Q_1)$ множества гладких функции, обращающихся в нуль на Γ . Норму в $H(Q_i)$ введем следующим образом

$$\|v\|_{H(Q_i)} = \|\nabla v\|_{Q_i} = \left(\int_{Q_i} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

Пусть φ определена на Γ и $(\varphi, 1)_\Gamma = \int_\Gamma \varphi ds = 0$.

Обозначим

$$\|\varphi\|_{-1/2Q_i} = \sup_{\eta \in H(Q_i)} (\varphi, \eta)_\Gamma / \|\nabla \eta\|_{Q_i} \quad (12)$$

Лемма 1. Пусть $v_2 \in W_2^1(Q_2)$ – обобщенное решение задачи

$$\Delta v_2 = 0, \quad \bar{x} \in Q_2 \quad (13)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0$$

а v_1 – обобщенное решение задачи

$$\Delta v_1 = 0, \quad \bar{x} \in Q_1 \quad (14)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0, \quad v_1 \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

тогда

$$\|\nabla v_2\|_{Q_2}^2 \leq C_3 \|\nabla v_1\|_{Q_1}^2 \quad (15)$$

где C_3 не зависит от φ

Доказательство. Введем норму

$$\|\varphi\|_{-1/2\Gamma} = \sup_{\psi \in W_2^{1/2}(\Gamma)} (\varphi, \psi)_\Gamma / \|\psi\|_{-1/2\Gamma} \quad (16)$$

Обобщенное решение задачи (13), это функция из $H(Q_2)$ которая удовлетворяет соотношению

$$(\nabla v_2, \nabla \eta) = (\varphi, \eta)_\Gamma, \quad \forall \eta \in H(Q_2) \quad (17)$$

В силу теоремы вложения правая часть (17) представляет собой линейный ограниченный функционал на $H(Q_i)$. По теореме Рисса существует функция $v_0 \in H(Q_2)$ такая, что

$$(\varphi, \eta)_\Gamma = (\nabla v_0, \nabla \eta)_{Q_2}$$

и

$$\|\nabla v_0\| = \sup_{\eta \in H(Q_2)} \frac{(\varphi, \eta)_\Gamma}{\|\nabla \eta\|_{Q_2}} \tag{18}$$

Тогда из (17) и (18) имеем

$$v_2 = v_0 \text{ и } \|\nabla v_2\|_{Q_2} = \|\varphi\|_{-1/2 Q_2}.$$

Аналогичным образом доказываются, что

$$\|\nabla v_1\|_{Q_1} = \|\varphi\|_{-1/2 Q_1}.$$

Нормы (12) при $i = 1, 2$ эквивалентны между собой. Действительно, из теорем вложения имеем цепочку неравенств

$$\frac{|(\varphi, \psi)_\Gamma|}{\|\nabla \eta\|_{Q_i}} \leq \frac{\|\varphi\|_{-1/2 \Gamma} \|\psi\|_{-1/2 \Gamma}}{\|\nabla \eta\|_{Q_i}} \leq c \|\varphi\|_{-1/2, \Gamma}$$

С другой стороны, всякая функция $\psi \in W_1^{1/2}(\Gamma)$ (в случае $i = 2$ функция ψ удовлетворяет условию $(\psi, 1)_\Gamma = 0$) может быть продолжена на Q_i таким образом, чтобы продолженная функция $\tilde{\psi}$ принадлежала $H(Q_i)$ и

$$\|\nabla \tilde{\psi}\|_{Q_i} \leq c \|\psi\|_{-1/2 \Gamma}$$

Таким образом,

$$\frac{|(\varphi, \psi)_\Gamma|}{\|\psi\|_{-1/2 \Gamma}} \leq c \frac{|(\varphi, \psi)_\Gamma|}{\|\nabla \tilde{\psi}\|_{Q_i}}$$

Отсюда следует, что нормы $\|\varphi\|_{-1/2 Q_i}$ эквивалентны между собой. В силу равенств $\|\nabla v_i\|_{Q_i} = \|\varphi\|_{-1/2 Q_i}$ получаем оценку (15).

Лемма доказана.

Оценим скорость сходимости метода (9), (10). Обозначим

$$\begin{aligned} \{y, r\} &= \{y^n, r^n\} = \{v - v^n, p - p^n\}, \\ \{\hat{y}, \hat{r}\} &= \{y^{n+1}, r^{n+1}\} \end{aligned}$$

Тогда уравнения (5) переписутся в виде

$$(By_i, v) + (\nabla_h \hat{y}, \nabla_h v) + (\nabla_h \hat{r}, v) = 0, \forall v \in W_2^{01}, \tag{19}$$

$$\beta \tau r_i + \hat{r}/\omega - \nabla_h \hat{y} = 0, \tag{20}$$

$$\{y^0, r^0\} \in W_2^{01} \times L_2, \text{ здесь } y_i = (\hat{y} - y)/\tau.$$

Назовем функцию ψ из L_2 кусочно-градиентной, если она представима в виде

$$\psi = \nabla g_i \text{ в } Q_i; \text{ где } g_i \in W_2^1(Q_i) \tag{21}$$

$$g_i|_{\partial Q_i \cap \partial \Omega} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

и назовем функцию ψ градиентной, если она имеет вид

$$\psi = \nabla g \text{ в } \Omega \text{ где } g \in W_2^{01}(\Omega).$$

Так как $p^0 = \nabla g, g \in W_2^{01}$ и ω – кусочно постоянная, то r^0 является кусочно-градиентной.

Умножим обе части уравнения (20) скалярно в L_2 на $2\tau \hat{r}$ и положим $v = 2\tau \hat{y}$ в соотношении (19). Складывая полученные равенства имеем

$$\|\hat{y}\|_B^2 - \|y\|_B^2 + \tau^2 \|y_i\|_B^2 + 2\tau \|\nabla_h \hat{y}\|^2 + \beta \tau \|\hat{r}\|^2 - \beta \tau \|r\|^2 + \beta \tau^3 \|r_i\|^2 + \frac{2\tau}{\omega} \|\hat{r}\|^2 = 0. \tag{22}$$

Исследуем вид r^n . Так как

$$\hat{\tau} = \frac{\beta}{\beta + 1/\omega} r + \frac{1}{\beta + 1/\omega} \nabla \hat{y}$$

и r является кусочно-градиентной функцией, то и $\hat{\tau}$ будет кусочно-градиентной. Таким образом, все r^n являются кусочно-градиентными.

Пусть G – пространство кусочно-градиентных, G_1 – пространство градиентных функций. Очевидно, что $G_1 \subseteq G$. Покажем, что имеет место строгое вложение $G_1 \subset G$ и найдем ортогональность в L_2 дополнения G_1 к G . Если ψ ортогонально в L_2 ко всем элементам G_1 , то для любого элемента $\nabla q \in G_1$ имеем $(\psi, \nabla q)_\Omega = 0$.

Если функция ∇g достаточно гладкая и имеет носитель в Q_1 то

$$(\psi, \nabla g)_\Omega = (\psi, \nabla g)_{Q_1} = -(\text{div} \psi, g)_{Q_1} = -(\Delta g_i, g)_{Q_1} = 0$$

Так как g – произвольная, то последнее соотношение означает, что

$$\Delta g_i = 0 \text{ в } Q_1 \tag{23}$$

Ясно, что соотношение выполнено в каждой $Q_i, i = 1, 2$. Таким образом, элемент $\psi \in G$, ортогональный всем элементам G_1 , представим в виде (21), где q_i – гармоническая в Q_i функция. Найдем условия, которым должна удовлетворять функция ψ , ортогональная G_1 на Γ .

Пусть $\nabla q \in G_1$, тогда

$$\begin{aligned} 0 &= (\psi, \nabla q)_\Omega = (\nabla q_1, \nabla q)_{Q_1} + (\nabla q_2, \nabla q)_{Q_2} = \\ &= \int_\Gamma g \frac{\partial q_1}{\partial n_1} ds + \int_\Gamma g \frac{\partial q_2}{\partial n_2} ds = \int_\Gamma g \left(\frac{\partial q_1}{\partial n_1} - \frac{\partial q_2}{\partial n_1} \right) ds. \end{aligned}$$

(здесь n_i – векторы внешней нормали на ∂Q_i); то есть значения нормальных составляющих $\psi_1 = \nabla q_1$ и $\psi_2 = \nabla q_2$ на Γ совпадают. Таким образом, нормальная составляющая вектор-функции ψ непрерывна (в интегральном смысле) при переходе через Γ . Отсюда следует, что ортогональное в L_2 дополнение G_2 пространства G_1 к G состоит из всех вектор-функции вида (21), нормальная составляющая которых непрерывна при переходе через смежные границы, а образующие их функции g_i являются гармоническими в Q_i .

Продолжим исследование сходимости итерационного метода (9), (10). Как было установлено, $\hat{r} \in G$. Представим \hat{r} в виде $\hat{r} = \hat{q} + \hat{h}$, где $\hat{q} \in G_1$, а $\hat{h} \in G_2$. Соотношение (19) в этом случае примет вид

$$(By_t, v) + (\nabla \hat{y}, \nabla v) + (\hat{q}, \nabla v) + (\hat{h}, \nabla v) = 0, \tag{24}$$

для $\forall v \in W_2^0$

Последнее скалярное произведение в (24) равно нулю, т.к. $\nabla v \in G_1$. Разделив обе части (24) на $\|\nabla v\|$ и оценив член содержащий q , получим

$$\frac{|(\hat{q}, \nabla v)|}{\|\nabla v\|} \leq \frac{|(By_t, v)|}{\|\Delta v\|} + \frac{|(\nabla \hat{y}, \nabla v)|}{\|\nabla v\|} \leq \sqrt{\chi_2} \|y_t\|_B + \|\nabla_h \hat{y}\|$$

Так как правая часть этого неравенства не зависит от $v \in W_2^0$, а $\hat{q} \in G_1$, т.е. представима в виде $\hat{q} = \nabla g$ ($g \in W_2^0$), то беря по в левой части неравенства, получим оценку

$$\|\hat{q}\| \leq \sqrt{\chi_2} \|y_t\|_B + \|\nabla_h \hat{y}\|$$

где $\|\nabla_h \hat{y}\| = \|\hat{y}\|_1$.

Возведем обе части этого неравенства в квадрат и оценим правую часть

$$\|\hat{q}\|^2 \leq 2(\chi_2 \|y_t\|_B^2 + \|\nabla_h \hat{y}\|^2)$$

Умножим последнее неравенство на $\beta \tau^2 \lambda$ ($\lambda > 0$ - произвольное) и сложим с (22). В результате имеем

$$\begin{aligned} & \|\hat{y}\|_B^2 + \tau^2(1 - 2\beta\lambda\chi_2)\|y_i\|_B^2 + 2\tau(1 - \beta\tau\lambda)\|\nabla_h \hat{y}\|_1^2 + \\ & + \beta\tau^2\lambda\|\hat{q}\|^2 + 2\tau\left(\hat{r}, \frac{\hat{r}}{\omega}\right) + \beta\tau\|\hat{r}\|^2 \leq \|y\|_B^2 + \beta\tau\|r\|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Оценим скалярное произведение $(\hat{r}, \hat{r}/\omega)$. При любом $\delta, 0 < \delta < 1$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\hat{r}}{\omega}, \hat{r}\right) \geq \left(\frac{\hat{q}}{\omega}, \hat{q}\right) + \left(\frac{\hat{h}}{\omega}, \hat{h}\right) - 2\left|\left(\frac{\hat{q}}{\omega}, \hat{h}\right)\right| \geq \\ & \geq (1 - \delta)\left(\frac{\hat{h}}{\omega}, \hat{h}\right) + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{\hat{q}}{\omega}, \hat{q}\right) \geq (1 - \delta)\left[\|\hat{h}\|_{Q_1}^2 + \frac{1}{\theta}\|\hat{h}\|_{Q_2}^2\right] + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\|\hat{q}\|^2 \end{aligned} \quad (26)$$

Так как $\hat{h} \in G$, то согласно лемме 1 имеет место оценка

$$\|\hat{h}\|_{Q_2} \leq c_3 \|\hat{h}\|_{Q_1}^2$$

Таким образом,

$$\|\hat{h}\|_{\Omega}^2 = \|\hat{h}\|_{Q_1}^2 + \|\hat{h}\|_{Q_2}^2 \leq (1 + c_3)\|\hat{h}\|_{Q_1}^2,$$

поэтому из (26) следует оценка

$$\left(\frac{\hat{r}}{\omega}, \hat{r}\right) \geq c_4(1 - \delta)\|\hat{h}\|^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\|\hat{q}\|^2, \quad c_4 = (1 + c_3)^{-1}$$

Используя последнее неравенство, приведем (25) к виду

$$\begin{aligned} & \|\hat{y}\|_B^2 + \tau^2(1 - 2\beta\lambda\chi_2)\|y_i\|_B^2 + 2\tau(1 - \beta\tau\lambda)\|\hat{y}\|_1^2 + \\ & + \beta\tau\|\hat{r}\|^2 + \beta\tau^2\lambda\|\hat{q}\|^2 + 2\tau(1 - \delta)c_4\|\hat{h}\|^2 + \\ & + 2\tau\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\|\hat{q}\|^2 \leq \|y\|_B^2 + \beta\tau\|r\|^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Зафиксируем $\beta > 0$ и по нему выберем $\tau > 0$ так, чтобы для всех $\theta > 0$ выполнялось условие $\beta > 0$. Выберем λ , удовлетворяющее условиям

$$1 - 2\beta\lambda\chi_2 > 0, \quad 1 - \beta\tau\lambda > 0$$

и положим $\delta = \frac{4}{4 + \beta\tau\lambda} < 1$. Тогда $\beta\tau^2\lambda + 2\tau(1 - 1/\delta) = \beta\tau^2\lambda - 2\tau\frac{\beta\tau\lambda}{4} = \frac{\beta\tau^2\lambda}{2}, 1 - \delta = \frac{\beta\tau\lambda}{4 + \beta\tau\lambda}$

Неравенство (27) при таком δ имеет вид

$$\left(1 + \frac{A_5 \tau}{\chi_2}\right) \|\hat{y}\|_B^2 + \beta \tau (1 + c_6 \tau) \|\hat{r}\|^2 \leq \|y\|_B^2 + \beta \tau \|r\|^2 \quad (28)$$

где $c_5 = \tau(1 - 2\beta\lambda\chi_2)$, $c_6 = \min\left\{\frac{\lambda}{2}, \frac{2c_4\lambda}{4 + \beta\tau\lambda}\right\}$

Нетрудно видеть, что постоянные $\beta, \tau, \chi_2, \lambda$ можно выбрать одними и теми для всех θ , $1 \leq \theta \leq \infty$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для любого $\beta > 0$ существует $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\beta)$, не зависящее от $\omega \geq 1$, такое что $-\chi_1 \Delta \leq B \leq -\chi_2 \Delta$ при $\tau \leq \bar{\tau}$ постоянные χ_1, χ_2 не зависят от ω . В этом случае итерационный процесс (9), (10) сходится со скоростью геометрической прогрессии и скорость сходимости не зависит от ω .

Замечание. Нетрудно заметить, что теорема 1 имеет место и в том случае, когда $Q_2 = \bigcup_1^N \Omega'_i$ или же $Q_1 = \bigcup_1^N \Omega'_i$. При этом подобласти Ω'_i должны быть типологически отделимы с кусочно-гладкими границами. В первом случае, в подобластях Ω'_i и Ω'_j , совпадение параметра ω не обязательно.

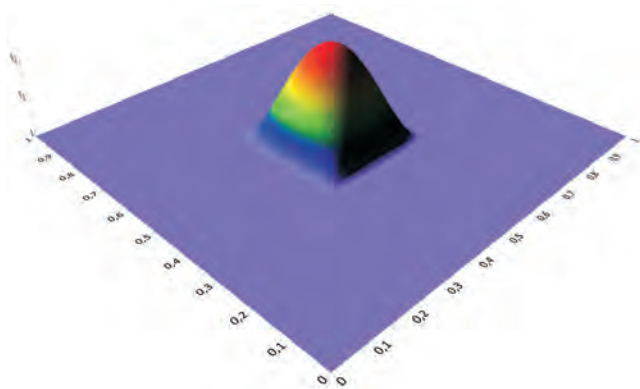
5. Численные расчеты. Вышеизложенным методом решена тестовая задача (1)-(2). Подобласть Q_2 выбиралась в виде квадрата $Q_2 = \{x_{1,k_1} \leq x_1 \leq x_{1,k_2}; x_{2,m_1} \leq x_2 \leq x_{2,m_2}\}$, где $x_{1,k_1} = 0,25$, $x_{1,k_2} = 0,75$, $x_{2,m_1} = 0,25$, $x_{2,m_2} = 0,75$. Область Ω покрывает подобласть $Q_2 \Omega = \{0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1\}$.

Подобласть Q_1 определяется так $Q_1 = \Omega \setminus Q_2$. Правая часть задана в Q_2 следующим образом

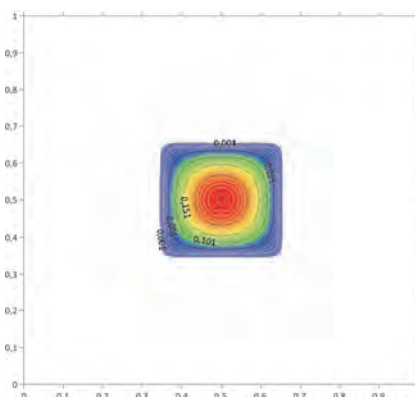
$$f(x_1, x_2) = 2(x_2^2 - (x_{2,m_1} + x_{2,m_2})x_2 + x_{2,m_1}x_{2,m_2}) + 2(x_1^2 - (x_{1,k_1} + x_{1,k_2})x_1 + x_{1,k_1}x_{1,k_2})$$

где $x_{1,k_1} = 0,25$, $x_{1,k_2} = 0,75$, $x_{2,m_1} = 0,25$, $x_{2,m_2} = 0,75$.

В подобласти Q_1 функция $f(x_1, x_2) = 0$. Итерационный параметр τ выбирался $\tau = 10^{-3} \div 10^{-5}$, параметр β определяется так, чтобы выполнялось условие (7). При этом необходимо следить за знаком параметра ω в подобластях, т.к. $-1 \leq \omega \leq 1$.

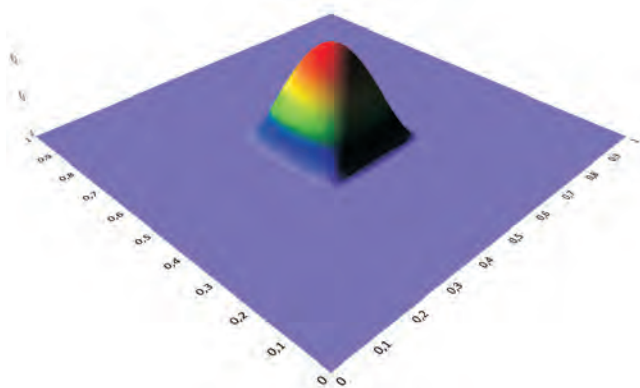


а) вид сбоку

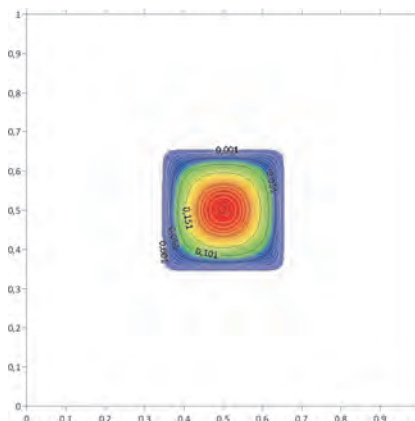


б) вид сверху

Рисунок 1 – График точного решения при узлах сетки 101x101.



а) вид сбоку



б) вид сверху

Рисунок 2 – График приближенного решения при узлах сетки 101x101.

Таблица 1 – Сравнительный анализ численного решения уравнения эллиптического типа с сильноменяющимися коэффициентами различными методами при количестве узлов сетки $n = 100 \times 100$, точность решения $\varepsilon = 10^{-11}$

Методы	Количество итераций	Норма погрешности	Количество машинного времени	Сходимость
Разработанный вычислительный алгоритм	5000	0, 0000000001	5,18 сек	сходится
Метод верхней релаксации	5000	0, 0004882813	6,40 сек	сходится
Метод нижней релаксации	5000	0, 0000000154	6,41 сек.	сходится
Метод Зейделя	5000	0, 0000000001	7,27 сек.	сходится

Поставленная задача эллиптического типа с сильноменяющимися коэффициентами была решена методом фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам. На рисунках 1-2 представлены соответственно результаты точного и приближенного решения при узлах сетки 101×101 . В расчетах использовалась равномерная сетка размерами 101×101 , 501×501 , 1001×1001 . Численный эксперимент был проведен на современном персональном компьютере следующими характеристиками Intel(R) Core(TM)i9-10900F CPU@2.80GHz, ОЗУ 32 Гб. Разработанный метод основан на построении вычислительного алгоритма для эллиптического уравнения с сильноменяющимися коэффициентами. Проведен сравнительный анализ численного решения уравнения эллиптического типа с сильноменяющимися коэффициентами различными методами. Разработанный алгоритм равномерно сходится при определенном количестве итерации и получаются результаты с точностью до 10^{-10} (таблица 1). Полученные результаты будут использованы при решении уравнений Навье-Стокса методом фиктивных областей.

Работа выполнена при поддержке проекта грантового финансирования молодых ученых по научным и (или) научно-техническим проектам на 2021-2023 годы Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP09058430).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Самарский А.А. Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений. – Журнал вычислительной математики и математической физики, Т.4, № 3, 1964, С 580-585.
- 2 Кучеров А.Б., Николаев Е.С. Попеременно-треугольный метод решения сеточных эллиптических уравнений в прямоугольнике. – Журнал вычислительной математики и математической физики, Т.16, № 5, 1976, С 1164-1174.
- 3 Лебедев В.Н. Метод композиции. – М. ОВМ. АН СССР, 1986
- 4 Волков Е.А. О методах решения разностных уравнений для кусочно-однородной среды и с правой частью заданной вдоль кривой. ДАН СССР 283, 1985, №2, с.274-277.
- 5 Бугров А.Н., Коновалов А.Н., Щербак В.А. Метод фиктивных областей в плоских статических задач теории упругости // Численные методы механики сплошной среды. –Новосибирск, 1974. – Т.5, №1.-С.20-30.
- 6 Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1973.-Т.4, №2.– С.109-115.
- 7 Смагулов Ш.С. Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнения Навье-Стокса // Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, Препринт. – 1979. – №68.– С.68-73.
- 8 Смагулов Ш.С., Орунханов М.К. Приближенный метод решения уравнений гидродинамики в многосвязных областях // ДАН СССР. – 1981. – Т.260, №5. – С.1078-1082.
- 9 Смагулов Ш.С., Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М. Моделирование краевых условий для давления и полного напора в задач гидродинамики с помощью метода фиктивных областей // Доклады Академии Наук России. – 2000. –Т.374, №3. – С. 333-335.
- 10 Danaev, N.T., Smagulov, S., Temirbekov, N.M. Numerical solution of Navier-Stokes equations for an incompressible liquid in channels with a porous insert. J Appl Mech Tech Phys 36, 658-665 (1995).
- 11 Орунханов М.К., Смагулов Ш.С. Метод фиктивных областей для уравнения Навье-Стокса в терминах функции тока и вихря скоростей с неоднородными граничными условиями // Вычислительные технологии. –Новосибирск: СО РАН, 2000. – Т.5, №3. – С.46-53.
- 12 Temirbekov A.N., Malgazhdarov Ye.A., Kassenov S.Ye., Urmashv B.A. Parallel Cuda implementation of the algorithm for solving the Navier-Stokes equations using the fictitious domain

method. Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия «математика, механика, информатика».- 2021. №1(109). - С. 63-75.

13 Temirbekov A., Baigereyev D., Temirbekov A., Baigereyev D., Temirbekov N., Urmashev B., Amantayeva A. Parallel CUDA implementation of a numerical algorithm for solving the Navier-Stokes equations using the pressure uniqueness condition. AIP Conference Proceedings Volume 2325, Article number 020063. - 2021. DOI: 10.1063/5.0041039.

14 Temirbekov A., Malgazhdarov Y., Tleulessova A., Temirbekova L. Fictitious domain method for the Navier-Stokes equations//Известия НАН РК, серия «физико-математическая». – 2021. №3(337). С.128-137.

15 Temirbekov A., Zhaksylykova Z., Malgazhdarov Y., Kasenov S. Application of the fictitious domain method for Navier-Stokes equations. Computers, Materials & Continua.-Vol. 73, Issue 1, p. 2035–2055. - 2022. DOI: 10.32604/cmc.2022.027830.

16 Temirbekov A., Altybay A., Temirbekova L., Kasenov S. Development of parallel implementation for the Navier-Stokes equation in doubly connected areas using the fictitious domain method. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.-Vol. 2, Issue 4 (116), p. 38–46.-2022. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.254261.

17 Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Of fluids. 1965.– vol.8, #12. – P.2182-2189.

18 Белоцерковский О.М., Гушин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости //ЖВМ и МФ. –1975.– Т.15, №1.– С.197-207.

19 Temirbekov A.N., Waldemar Wójcik. Numerical Implementation of the Fictitious Domain Method for Elliptic Equations// International Journal of Electronics and Telecommunications.– 2014.– Vol.60, № 3.– P. 219-223.

20 Temirbekov A.N. Numerical implementation of the method of fictitious domains for elliptic equations. AIP Conference Proceedings. Volume 1759, Article number 020053. – 2016.

REFERENCES

1 Samarskii A.A. On one economical algorithm for the numerical solution of systems of differential and algebraic equations. // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, V.4, No. 3, 1964, pp. 580-585.

2 Kucherov A.B., Nikolaev E.S. Alternating triangular method for solving grid elliptic equations in a rectangle. - Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, V.16, No. 5, 1976, pp. 1164-1174.

3 Lebedev V.N. Composition method. –М. DCM. AS SSR, 1986

4 Volkov E.A. On methods for solving difference equations for a piecewise-homogeneous medium and with the right side given along the curve. DAS USSR 283, 1985, No. 2, pp. 274-277.

5 Bugrov A.N., Konovalov A.N., Sherbak V.A. Method of fictitious domains in plane static problems of the theory of elasticity // Numerical methods of continuum mechanics. -Novosibirsk, 1974. -V.5, No.1, pp.20-30.

6 Konovalov A.N. Method of fictitious domains in problems of torsion // Numerical methods of continuum mechanics. - Novosibirsk, 1973.-V.4, No. 2, pp.109-115.

7 Smagulov Sh.S. Method of fictitious domains for the boundary value problem of the Navier-Stokes equation // Novosibirsk: Izd. Computing Center of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, Preprint.-1979. – No. 68, pp.68-73.

8 Smagulov Sh.S., Orunkhanov M.K. Approximate method for solving hydrodynamic equations in multiply connected domains // DAS USSR. - 1981. - V.260, No. 5, pp.1078-1082.

9 Smagulov Sh.S., Danaev N.T., Temirbekov N.M. Modeling of boundary conditions for pressure and total head in problems of hydrodynamics using the method of fictitious regions // Doklady Akademii Nauk Rossii. - 2000. -V.374, No. 3, pp. 333-335.

10 Danaev, N.T., Smagulov, S., Temirbekov, N.M. Numerical solution of Navier-Stokes equations for an incompressible liquid in channels with a porous insert. J Appl Mech Tech Phys 36, 658-665 (1995).

11 Orunkhanov M.K., Smagulov Sh.S. The method of fictitious domains for the Navier-Stokes equation in terms of the stream function and the velocity vortex with inhomogeneous boundary conditions // Computational technologies. -Novosibirsk: SB RAN, 2000. -V.5, No.3, pp.46-53.

12 Temirbekov A.N., Malgazhdarov Ye.A., Kassenov S.Ye., Urmashov B.A. Parallel Cuda implementation of the algorithm for solving the Navier-Stokes equations using the fictitious domain method. Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия «математика, механика, информатика».-2021. №1(109). -С. 63-75.

13 Temirbekov A., Baigereyev D., Temirbekov A., Baigereyev D., Temirbekov N., Urmashov B., Amantayeva A. Parallel CUDA implementation of a numerical algorithm for solving the Navier-Stokes equations using the pressure uniqueness condition. AIP Conference Proceedings Volume 2325, Article number 020063. -2021. DOI: 10.1063/5.0041039.

14 Temirbekov A., Malgazhdarov Y., Tleulessova A., Temirbekova L. Fictitious domain method for the Navier-Stokes equations//Известия НАН РК, серия «физико-математическая». – 2021. №3(337). С.128-137.

15 Temirbekov A., Zhaksylykova Z., Malgazhdarov Y., Kasenov S. Application of the fictitious domain method for Navier-Stokes equations. Computers, Materials & Continua.-Vol. 73, Issue 1, p. 2035–2055. - 2022. DOI: 10.32604/cmc.2022.027830.

16 Temirbekov A., Altybay A., Temirbekova L., Kasenov S. Development of parallel implementation for the Navier-Stokes equation in doubly connected areas using the fictitious domain method. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.-Vol. 2, Issue 4 (116), p. 38–46.-2022. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.254261.

17 Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Of fluids. 1965.– vol.8, #12. – P.2182-2189.

18 Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости //ЖВМ и МФ. -1975.-Т.15, №1.- С.197-207.

19 Temirbekov A.N., Waldemar Wójcik. Numerical Implementation of the Fictitious Domain Method for Elliptic Equations// International Journal of Electronics and Telecommunications.-2014.- Vol.60, № 3.-P. 219-223.

20 Temirbekov A.N. Numerical implementation of the method of fictitious domains for elliptic equations. AIP Conference Proceedings. Volume 1759, Article number 020053. – 2016.

A. Н. ТЕМИРБЕКОВ, С. Е. КАСЕНОВ

*Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы, Қазақстан*

ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ЖАЛҒАН АЙМАҚТАР ӘДІСІН САНДЫҚ ЖҮЗЕГЕ АСЫРУ

Жұмыста жылдам өзгеретін коэффициенттері бар эллиптикалық типтегі теңдеу қарастырылады. Бұл есеп АР09058430 грантын ҚР БҒМ қаржыландыратын жоба бойынша орындалатын зерттеулер аясында зерттеледі. Мұндай теңдеулерді зерттеуге деген қызығушылық осы типтегі теңдеулер жалған аймақтар әдісін қолдану арқылы алынатындығымен байланысты. Бұл типтегі теңдеулер көптеген қолданбалы есептерді, соның ішінде гидродинамик, көп

фазалы сүзу теориясы және тағы басқа есептерді шешу кезінде пайда болады. Бұл жұмыста жылдам өзгеретін коэффициенттері бар эллиптикалық теңдеуді сандық шешудің арнайы әдісі ұсынылады. Өзірленген итерациялық үрдістің жинақталу жылдамдығын бағалау үшін теорема дәлелденді. Ұсынылған әдістің тиімділігін көрсету үшін есептеу алгоритмі жасалып, сандық есептеулер жүргізілді.

Түйін сөздер: жалған аймақтар әдісі, эллиптикалық теңдеу, Дирихле есебі, жылдам өзгеретін коэффициенттері бар теңдеулер, есептеу алгоритмі, итерация үрдісі, шекаралық шарттар.

A. N. TEMIRBEKOV, S. E. KASENOV

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE FICTITIOUS DOMAIN METHOD FOR AN ELLIPTIC TYPE EQUATION

The paper considers an elliptic type equation with strongly varying coefficients. This problem is being studied within the framework of research carried out under a project funded by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant AP09058430. Interest in the study of such equations is caused by the fact that equations of this type are obtained using the method of fictitious domains. Equations of this type arise when solving many applied problems, including problems of hydrodynamics, the theory of multiphase filtration and many others. In this paper, a special method is proposed for the numerical solution of an elliptic equation with strongly varying coefficients. A theorem for estimating the convergence rate of the developed iterative process is proved. A computational algorithm has been developed and numerical calculations have been performed to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: *fictitious domain method, elliptic equation, Dirichlet problem, equations with rapidly changing coefficients, computational algorithm, iterative process, boundary conditions.*