УДК 519.3
https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.187

***Х. ХОМПЫШ***

*Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық универистеті,*
*Алматы, Қазақстан*
*Konat_k@mail.ru*

# БІРТЕКТІ ЕМЕС НЬЮТОНДЫҚ ЕМЕС СҰЙЫҚТАРДЫҢ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ТЕҢДЕУІНЕН ҚЫСЫМДЫ АНЫҚТАУ

*Бұл мақалада біртекті емес (тығыздығы белгісіз әрі тұрақты емес) сығылмайтын тұтқыр серпімді ньютондық емес сұйығының қозғалысын сипаттайтын бейсызықты p-лапласианды диффузиялы және сызықты емес дәрежелі мүшелі теңдеулер жүйесі үшін қойылған бастапқы-шеттік есебі қарастырылады. Әдетте, сығылмайтын сұйықтар үшін гидродинамика теңдеулерінің жалпылама әлсіз шешімі сығылмайтындық (үзіліссіздік) теңдеуіне байланысты соленойдалды кеңістікте қарастырылатындықтан, сұйық қысымы жалпылама әлсіз шешім анықтамасында қарастырылмайды. Классикалық гидродинамика теңдеулері үшін сұйықтың қысымы оның жылдамдығы мен тығыздығы анықтағаннан кейін көпжағдайларды **$L^2$(Ω)** кеңістігінің ортогонал екі ішкі кеңістіктің тіке қосындыға жіктелу теоремасы арқылы анықталады. Ал p-лапласианды және де сызықты емес демпирлеуші мүшелер арқылы жаңартылған теңдеулер кезінде қысымды анықтау жаңаша әдістерді талап етеді. Есептің берілгендері сәйкес қажетті шарттарды қанағаттандырған кезде, жоғарыдағы аталған біртекті емес (тығыздығы белгісіз әрі тұрақты емес) сығылмайтын тұтқыр серпімді ньютондық емес сұйығының қозғалысын сипаттайтын бейсызықты p-лапласианды диффузиялы және сызықты емес дәрежелі мүшелі теңдеулер жүйесі үшін қойылған бастапқы-шеттік есептен сұйықтың қысымы бірмәнді анықталуы дәлелденді. Негізгі қолданылған кеңістіктер мен қажетті тұжырымдар енгізілді. Жалпылама әлсіз шешім кеңістігі анықталынды. Қысымды бірмәнді анықтау белгілі де-Рам леммасын қолдану арқылы орнатылды.*

***Түйін сөздер**: Кельвин-фойгт, біртекті емес сұйықтар, қысымды табу, p-Лапласиан, де-Раам леммасы.*

**Кіріспе.** Бұл мақалада біртекті емес (тығыздығы белгісіз әрі тұрақты емес) сығылмайтын тұтқыр серпімді ньютондық емес сұйығының қозғалысын сипаттайтын бейсызықты p-лапласианды диффузиялы және сызықты емес дәрежелі мүшелі теңдеулер жүйесі үшін қойылған бастапқы-шеттік есебінен сұйықтың қысымын бірмәнді анықтау мәселесі қарастырылады.

**Есептің қойылымы.** Айталық $\Omega - R^d$, $d \geq 2$ евклидтік кеңістігіндегі шенелген, шекарасы $\partial\Omega$ жеткілікті жатық облыс болсын. Бекітілген ақырлы $T > 0$ саны үшін $Q_T$: $= \mathbf{\Omega} \times (0,T)$ арқылы шенелген цилидрлік облысын, ал $\Gamma_T$: $= \partial\mathbf{\Omega} \times (0,T)$ арқылы оның бүйір бетін белгілейік. Осы $Q_T$ цилиндрінде біртекті емес (тығыздығы белгісіз әрі тұрақты емес) сығылмайтын тұтқыр серпімді Кельвин-Фойгт сұйығының қозғалысын сипаттайтын [1-3] келесі сызықты емес, p-лапласианды диффузиялы және сызықты емес дәрежелі мүшелі

$$\rho(\mathbf{v}_{\mathrm{t}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = \rho\mathbf{f} - \nabla\pi + \mathbf{div}(\mu\left|\mathbf{D}(\mathbf{v})\right|^{p-2}\mathbf{D}(\mathbf{v}) + \kappa\mathbf{D}(\mathbf{v}_t)) + \gamma\left|\mathbf{v}\right|^{m2}\mathbf{v}, \tag{1}$$

$$\mathbf{div}\,\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \mathbf{0},\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \in Q_T \tag{2}$$

$$\rho_t + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho = 0 \tag{3}$$

теңдеулер жүйесін,

$$\mathbf{v}\rho = \mathbf{v}_0\rho_0,\ \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \rho_0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega,\ t = 0 \tag{4}$$

бастапқы шарттарын және

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \mathbf{0},\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \in \Gamma_T \tag{5}$$

шекаралық шарттарын қанағаттандыратын ($\mathbf{v}$, $\nabla\pi$, $\rho$) функцияларын анықтау есебін қарастырайық. Мұндағы $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$ - вектормәнді фнукция сұйықтың жылдамдығын, ал скаляр мәнді $\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t)$ және $\pi = \pi(\boldsymbol{x}, t)$ функциялары сәйкес сұйықтың тығыздығы мен қысымын белгілейді. Сонымен қатар бастапқы жылдамдық $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$, сыртқы күштердің тығыздығы $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x}, t)$ және бастапқы тығыздық $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{x})$ берілген функциялар болса, тұтқырлықтың кинематикалық және релаксациялық коэффициенттері болатын $\mu$, $\kappa > 0$ және көрсеткіштер $p > 1$ және $m > 1$ сандары берілген оң белгілі тұрақтылар. Теңдеудегі $\gamma$ коэффициенті оң да теріс те болуы мүмкін және ол оң болса онда $\gamma|\mathbf{v}|^{m-2}\,\mathbf{v}$ мүшесі сызықты емес сыртқы күш, ал теріс болса абсорбциялық әсер етеді [1]. Сонымен қатар, $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$, $\nabla\mathbf{v} = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right]$, жылдамдықтың деформация тензоры.

Жалпы біртекті емес сұйықтар үшін гидродинамика теңдеулеріне, оның ішінде ньютондық сұйықтар, атап айтқанда Навье-стокс теңдеулері үшін қойылған әртүрлі қойылымдағы бастапқы-шеттік есептер көптеген жұмыстарда зерттелініп келеді. Олардың негізгі және алғашқылары ретінде [4] -[7] жұмыстарды айтуға болады.

Соңғы жылдары ғылым мен техниканың қарқынды әрі жан жақты зерттеулеріне байланысты сұйықтың серпімділік, релаксациялық және т.б. біршама қасиеттері ескерілуінен туындаған жаңартылған сызықты емес гидродинамика теңдеулері зерттеліне бастады. Мұндай сұйықтарға ньютондық сұйықтардан өзгеше, «ньютондық емес» деп аталатын сұйықтар жатады. Мұндай ньютондық емес сұйықтардың теңдеуінің қарапайым бір түрі Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі және тығыздығы тұрақты болған кездегі қойылған әртүрлі тура есептер көбінде Осколковтың [8]-[10] жұмыстарында көптеп зерттелінді. Ал біртекті емес сұйықтар үшін p-лапласиан және демпирлеуші мүшелер арқылы модификацияланған сызықты емес Кельвин-Фойгт теңдеулері үшін қойылған тура есептер автордың [11]-[12] жұмыстарында қарастырылды. Атап айтқанда, жоғарыдағы (1)-(5) жүйенің $p = 2$ және $\gamma = 2$ болған кездегі бірмәнді шешімділігі, шешімнің регулярлығы автордың [12] бірлескен мақаласында жарық көрген. Ал [11] бірлескен мақалада (1)-(5) жүйенің жалпылама әлсіз шешімінің және $\gamma$ коэффициентінің таңбасына байланысты локальды және глобальды бар болуы орнатылған. Алайда, гидродинамика теңдеулерінің жалпылама әлсіз шешімі (2) теңдеу бойынша соленойдалды кеңістікте қарастырылатындықтан, қысым шешім ретінде қарастырылмайды. Әдетте, қысым сұйықтың жылдамдығы мен тығыздығы анықтағаннан кейін классикалық жағдайда $\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) \otimes \mathbf{G}(\Omega)$

кеңістігінің тіке ортогонал кеңістікке жіктелу теоремасы арқылы анықталады. Ал р-лапласианды және де сызықты емес демпирлеуші мүшелердің болған кезде бұл классикалық әдіс қолданыныс таппайды. Жоғарыдағы [11] жұмыста қысымды анықтау мәселесі ашық сұрақ ретінде қалды. Міне бұл жұмыста осы сұраққа жауап берілетін болады, сұйықтар механикасының математикалық теориясында жиі қолданылатын [13-14] төмендегі кеңістіктер мен олардың белгілеулері қолданылады:

Есептегі берілген сыртқы күштердің тығыздығы

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(Q_T) \tag{6}$$

кеңістігінде болсын деп қабылдайық.

**Анықтама 1.** *Айталық $d \geq 2$ және $1 < p,\ m < \infty$ болсын, бұларға қоса (1.4) шарты орындалсын. ($\mathbf{v}$, ρ) жұбы (1)-(4) бастапқы шеттік есебінің жалпылама әлсіз шешімі деп аталады, егер бұл функциялар келесі шарттар орындалса:*

1. $\mathbf{v} \in L^\infty(0,T;\mathbf{V}(\Omega)) \cap L^p(0,T;\mathbf{V}_p(\Omega)) \cap \mathbf{L}^m(Q_T)$;
2. $\rho > 0$ б.д. $Q_T$, $\rho \in C([0,T];L^\lambda(\Omega))\ \forall\lambda \in [1,\infty)$ және $\rho|\mathbf{v}|^2 \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$;
3. $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \rho(0) = \rho_0, \rho_0 \geq 0$ б.д. $\Omega$ облысында;
4. Кез келген $\varphi \in V$ тест функциясы және барлық дерлік (б.д.) $t \in [0,T]$ үшін

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \rho(t)\mathbf{v}(t)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,d\mathbf{x} + 2\kappa\int_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{v}(t)):\nabla\boldsymbol{\varphi}\,d\mathbf{x}\right) +$$
$$2\mu\int_\Omega |\mathbf{D}(\mathbf{v}(t))|^{p-2}\mathbf{D}(\mathbf{v}(t)):\nabla\boldsymbol{\varphi}\,d\mathbf{x}red - \int_\Omega \rho(t)\mathbf{v}(t)\otimes\mathbf{v}(t):\nabla\boldsymbol{\varphi}\,d\mathbf{x} = \tag{7}$$
$$\int_\Omega \rho(t)\mathbf{f}(t)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,d\mathbf{x} + \gamma\int_\Omega |\mathbf{v}(t)|^{m-2}\mathbf{v}(t)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,d\mathbf{x};$$

және кез келген $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы және барлық дерлік (б.д.) $t \in [0,T]$ үшін

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(t)\phi\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \rho(t)\mathbf{v}(t)\cdot\nabla\phi\,d\mathbf{x} = 0. \tag{8}$$

**Қосымша қажетті мәліметтер.**

Бұған дейінгі жарық көрген автордың мақаласында жоғардағы (1)-(4) есебінің жалпылама әлсіз шешімінің бар болуы дәлелдеген, яғни келесі теоремалар алынған:

**Теорема 1** ([11]). Айталық есептің бастапқы берілгендері (7) және келесі шарттарды қанағаттандырсын:

$$\exists M_1, M_2,\ M_1 \leq M_2: 0 < M_1 := \inf_{\mathbf{x}\in\Omega}\rho_0(\mathbf{x}) \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{x}\in\Omega}\rho_0(\mathbf{x}) =: M_2 < \infty, \quad \forall\ \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \tag{9}$$

$$\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{V}_p(\Omega) \cap \mathbf{L}^m(\Omega). \tag{10}$$

Бұларға қоса, $\gamma \leq 0$ кезде келесі шарттардың бірі орындалсын:

$$2 \leq d \leq 4 \text{ және } p > 1, \tag{11}$$

$$d \geq 4 \text{ және } p \geq \frac{d}{2}\ , \tag{12}$$

$$d \leq m \text{ және } \gamma \neq 0, \tag{13}$$

Егер,

$$\max\{2, p\} > \frac{4d}{d+4} \tag{14}$$

болса, онда (1)-(5) есебінің ең болмағанда бір (**v**, ρ) шешімі табылады және ол үшін келесі бағалаулар орынды болады

$$0 < M_1 \leq \rho(\mathbf{x}, t) \leq M_2 < \infty \qquad \forall\ (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \tag{15}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\| \mathbf{v}(t) \|_{2,\Omega}^2 + \| \nabla\mathbf{v}(t) \|_{2,\Omega}^2\right) + \| \nabla\mathbf{v} \|_{p,Q_T}^p + \| \mathbf{v} \|_{m,Q_T}^m \leq C_1, \tag{16}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\| \nabla\mathbf{v}(t) \|_{p,\Omega}^p + \| \mathbf{v}(t) \|_{m,\Omega}^m\right) + \| \mathbf{v}_t \|_{2,Q_T}^2 + \| \nabla\mathbf{v}_t \|_{2,Q_T}^2 \leq C_2 \tag{17}$$

мұндағы $C_1$ және $C_2$ есептің берілгендерінен ғана тәуелді оң тұрақты сандар.

**Теорема 2** ([11]). Айталық, γ > 0 болсын. Бұл кезде де жоғарыдағы (6), (9)-(10) және (14) ұйғарымдарына қоса (11)-(13) шарттарының бірі орындалсын. Егер бұлармен қатар

$$m \leq\ 2 \text{ және } 2(m - 1) \leq p^* \tag{18}$$

немесе

$$2 < m < p, \tag{19}$$

шарттарының бірі орындалса, онда (1)-(5) есебінің ең болмағанда бір (**v**, ρ) шешімі табылады және ол үшін (15)-(17) бағалаулары орынды болады.

Қысымды анықтау келесі де-Раам леммасын қолану арқылы дәлелденеді және бұл лемманың дәлелдеуін Боговскийдің [15], Пилескастың [16] және Галдидің [17] (мәселен, Theorems III.3.1 and III.5.3) жұмыстарынан табуға болады.

**Лемма 1 (де-Раам)** *Айталық 1 < η < ∞ және* $\boldsymbol{\varphi}^* \in \left(\boldsymbol{W}_0^{1,\eta}(\Omega)\right)' = \boldsymbol{W}^{-1,\eta'}(\Omega)$ *болсын. Егер кез келген* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{\eta}$ *үшін*

$$\langle \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathbf{W}^{-1,\eta'}(\Omega)\times\mathbf{W}_0^{1,\eta}(\Omega)} = 0, \quad \forall\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{\eta}, \tag{20}$$

теңдігі орындалса, мұндағы $\mathbf{V}^{\eta} := \overline{\mathcal{V}}^{\mathbf{W}^{1,\eta}(\Omega)}$ $\mathcal{V}$ кеңістігінің $\mathbf{W}^{1,\eta}(\Omega)$ кеңістігіндегі тұйықтауы. Онда $\int_\Omega u dx = 0$ шарты орындалатындай бір $u \in L^{\eta}(\Omega)$ , функциясы табылып, келесі теңдік орынды болады

$$\langle \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathbf{W}^{-1,\eta'}(\Omega)\times\mathbf{W}_0^{1,\eta}(\Omega)} = \int_\Omega u\ div\boldsymbol{\varphi}\ d\mathbf{x} \quad \forall\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_0^{1,\eta}(\Omega).$$

және ол үшін келесі бағалау орынды

$$\| u \|_{L^{\eta}(\Omega)} \leq C \, \| \boldsymbol{\varphi}^* \|_{\mathbf{W}^{-1,\eta'}(\Omega)}.$$

**Негізгі нәтиже.** Бұл бөлімде (1)-(5) есебінің қойылымынан, яғни (7) теңдіктен $\pi$ қысымды бірмәнді анықтау зерттелінеді.

**Теорема 3.** Айталық $\Omega - R^d, d \geq 2$ *, кеңістігіндегі шенелген және $\partial\Omega$ шекарасы Липщиц-үзіліссіз болатын облыс, ал* ($\mathbf{v}$, $\rho$) *жұбы (1)-(5) есебінің Теорема 1 және 2 дәлелденген жалпылама әлсіз шешімі болсын. Онда, барлық $t \in [0,T]$ үшін қандай да бір r саны (төменде (25) формуласымен анықталған) саны және $\int_\Omega \pi(t)dx = 0$ теңдігі орындалатындай бір ғана $\pi \in C_w([0,T]; L^{r'}(\Omega))$ функциясы табылып*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left[\rho(t)\mathbf{v}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} + 2\kappa \mathbf{D}\big(\mathbf{v}(t)\big) : \nabla\boldsymbol{\varphi}\right] d\mathbf{x} +$$

$$\int_\Omega \left[2\mu|\mathbf{D}\mathbf{v}|^{p-2}\mathbf{D}\mathbf{v} - \rho(t)\mathbf{v}(t) \otimes \mathbf{v}(t)\right] : \nabla\boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} - \tag{21}$$

$$\int_\Omega \left[\rho(t)\mathbf{f}(t) + \gamma|\mathbf{v}(t)|^{m-2}\mathbf{v}(t)\right] \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \pi(t) div\boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x}, \qquad \forall \, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_0^{1,r}(\Omega)$$

тепе-теңдігін $[0,T]$ аралығында үлестіру (әлсіз) мағынасында қанағаттандырады. Сонымен қоса, $C = C(M_2, d, p, r, m, \kappa, \mu, \boldsymbol{\Omega}, \mathrm{T})$ оң саны табылып, келесі бағалау орынды болады

$$\begin{gathered} \| \pi \|_{L^\infty(0,T;L^{r'}(\Omega))} \leq \\ C\left(\| \mathbf{v}_0 \|_{\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)} + \| \mathbf{v} \|_{L^\infty(0,T;\mathbf{W}^{1,2}(\Omega))} + \| \nabla\mathbf{v} \|_{\mathbf{L}^p(Q_T)}^{p-1} + |\gamma| \, \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}^m(Q_T)}^{m-1} + \| \mathbf{f} \|_{\mathbf{L}^2(Q_T)}\right). \end{gathered} \tag{22}$$

*Дәлелдеуі.* Жоғарыдағы (7) теңдігін $\xi \in C_0^\infty(0,T)$ функциясына көбейтіп нәтижесін $[0,T]$ аралығында интегралдасақ

$$-\int_0^T \alpha\xi' \, dt = \int_0^T \beta\xi \, dt,$$

аламыз, мұндағы $\xi' - \xi$ функциясының туындысы және

$$\alpha(t) := \int_\Omega \rho(t)\mathbf{v}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} + 2\kappa \int_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) : \nabla\boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x}, \qquad 23)$$

$$\beta(t) := -\int_\Omega \mathbf{Q}(t) : \nabla\boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x}, \tag{24}$$

$$\mathbf{Q}(t) := 2\mu|\mathbf{D}(\mathbf{v}(t))|^{p-2}\mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) - \rho(t)\mathbf{v}(t) \otimes \mathbf{v}(t) + \mathbf{F}(t), \qquad t \in [0,T],$$

мұндағы $\mathbf{F}(t)$ келесідей екінші ретті тензор мәнді функция

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F}(t) = \rho(t)\mathbf{f}(t) + \gamma|\mathbf{v}(t)|^{m-2}\mathbf{v}(t), \qquad t \in [0,T].$$

Біз алда

$$\mathbf{Q} \in \mathbf{L}^{r'}(Q_T), \qquad r \geq \max\{2,\ p, r_1,\ r_2\} \ \text{ егер } \ d > 2\,, \tag{25}$$

орындалатынын талап етеміз, яғни көрсетеміз, мұндағы

$$2r_1 = \min\left\{\frac{pd}{pd-2(d-2)}, \frac{m}{m-2}\right\} \quad if \quad \gamma \neq 0 \ \text{ және } \ m > 2,$$

немесе

$$r_1 = \frac{pd}{pd-2(d-2)} \quad \text{егер} \quad \gamma = 0 \ \text{ немесе } m \leq 2;$$

немесе

$$r_2 = \min\left\{\frac{pd}{pd-(m-1)(d-2)}, m\right\} \ \text{егер } \gamma \neq 0,$$

$$r_2 = 1 \text{ егер } \gamma = 0$$

Егер $d = 2$ болса, онда (25) енгізуі барлық $r \geq \max\{2, p\}$ үшін орындалады.

Бұл (25) енгізуін көрсету үшін параболалық интерполяциядан шығатын

$$L^{\infty}(0,T; \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)) \cap L^{p}(0,T; \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow \mathbf{L}^{\lambda}(Q_T), \quad \lambda := \frac{pd}{d-2}, \quad d > 2. \tag{26}$$

үзіліссіз енгізуінің орындалатынын ескереміз. Бұл (25) енгізуі $d = 2$ жағдайда кез келген $\lambda \geq$ үшін орынды болады. Енді (26) және (15) мәліметтерін ескере отырып, Гельдер теңсіздігі арқылы келесі теңсіздіктерді аламыз

$$\| \, |\mathbf{Dv}|^{p-2}\mathbf{Dv} \, \|_{\mathbf{L}^{r'}(Q_T)} \leq \| \, \mathbf{Dv} \, \|^{p-1}_{\mathbf{L}^{(p-1)r'}(Q_T)} \leq C_1 \, \| \, \mathbf{Dv} \, \|^{p-1}_{\mathbf{L}^{p}(Q_T)}\,, \quad r \geq p, \tag{27}$$

$$\| \, \rho \, \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \, \|_{\mathbf{L}^{r'}(Q_T)} \leq M_2 \, \| \, \mathbf{v} \, \|^{2}_{\mathbf{L}^{2r'}(Q_T)} \leq \begin{cases} C_2 \, \| \, \mathbf{v} \, \|^{2}_{\mathbf{L}^{\rho}(Q_T)}, & r \geq \dfrac{pd}{pd-2(d-2)}, \quad \text{немесе} \\ C_{2'} \, \| \, \mathbf{v} \, \|^{2}_{\mathbf{L}^{m}(Q_T)}, & r \geq \dfrac{m}{m-2}, \quad m > 2, \end{cases} \tag{28}$$

$$\| \, \rho\mathbf{f} \, \|_{\mathbf{L}^{r'}(Q_T)} \leq M_2 \, \| \, \mathbf{f} \, \|_{\mathbf{L}^{r'}(Q_T)} \leq C_3 \, \| \, \mathbf{f} \, \|_{\mathbf{L}^{2}(Q_T)}\,, \quad r \geq 2, \tag{29}$$

$$\| \, |\mathbf{v}|^{m-2}\mathbf{v} \, \|_{\mathbf{L}^{r'}(Q_T)} \leq \| \, \mathbf{v} \, \|^{m-1}_{\mathbf{L}^{(m-1)r'}(Q_T)} \leq \begin{cases} C_4 \, \| \, \mathbf{v} \, \|^{m-1}_{\mathbf{L}^{\rho}(Q_T)}, & r \geq \dfrac{pd}{pd-(m-1)(d-2)}, \\ C_{4'} \, \| \, \mathbf{v} \, \|^{m-1}_{\mathbf{L}^{m}(Q_T)}, & r \geq m, \end{cases} \tag{30}$$

мұндағы $C_1 = C(p, r, \boldsymbol{\Omega}, T)$, $C_2 = C(M_2, d, p, r, \boldsymbol{\Omega}, T)$, $C_{2'} = C(M_2, r, m, \boldsymbol{\Omega}, T)$, $C_{3'} = C(M_2, r, \boldsymbol{\Omega}, T)$, $C_{4'} = C(d, p, r, \boldsymbol{\Omega}, T)$ және $C_{4'} = C(r, m, \boldsymbol{\Omega}, T)$ тұрақтылары оң және есептің берілгендерінен ғана тәуелді сандар. Екіншіден, (26), (15)-(17) бойынша (1)-

(5) есебінің кез келген **v** әлсіз шешімі $\gamma = 0$ болса $\mathbf{L}^{\lambda}(Q_T)$ кеңістігінде, ал $\gamma \neq 0$ болғанда $\mathbf{L}^{\lambda_*}(Q_T)$ $\lambda_* = \max\{\lambda, m\}$, кеңістігінде шенелген болады.

Сондай ақ, Соболевтің енгізуін (29) және (30) теңсіздіктерімен біріктіріп, **F** функциясының $\mathbf{L}^{r'}(Q_T)$-де шенелгенін көруге болады. Бұдан жоғарыдағы (25) талабымыз орындалғаны шығады және де $\beta \in L^{r'}(0, T)$. Демек, $\alpha \in W^{1,r'}(0, T)$ және $\alpha' = \beta$. Дербес жағдайында, $\alpha$- Соболевтің ену теоремасы бойынша қайтадан $\alpha$ арқылы белгіленген үзіліссіз функциямен өрнектеуге болады, яғни $\alpha' = \beta$ теңдігін интегралдасақ

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \beta(s)\,ds \quad \forall t \in (0,T) \tag{31}$$

аламыз. Келесі функцияны қарастырайық

$$\mathbf{R}(t) := \int_0^t \mathbf{Q}(s)\,ds, \quad t \in [0,T].$$

Кез келген таңдап алынған $t$ үшін бұл функцияны (23)-(24) бірге қолданып, (31) қайта жазатын болсақ, онда

$$\int_{\Omega} [\rho(t)\mathbf{v}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} + 2\kappa\mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) : \nabla\boldsymbol{\varphi} - (\rho(0)\mathbf{v}(0) \cdot \boldsymbol{\varphi} + 2\kappa\mathbf{D}(\mathbf{v}(0)) : \nabla\boldsymbol{\varphi}) +$$

$$+ \mathbf{R}(t) : \nabla\boldsymbol{\varphi}]\,d\mathbf{x} = 0.$$

теңдігіне келеміз. Бұған $\eta = r'$, мұнда $r$ жоғарыда (25) формуламен анықталған сан, және

$$\boldsymbol{\varphi}^* := \rho(t)\mathbf{v}(t) - \rho(0)\mathbf{v}(0) - 2\kappa\,\mathbf{div}(\mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) - \mathbf{D}(\mathbf{v}(0))) - \mathbf{div}(\mathbf{R}(t)),$$

үшін де-Раам леммасын қолдансақ, онда Лемма 1 тұжырымы бойынша $\int_{\Omega} \pi(t)\,d\mathbf{x} = 0$ және

$$\int_{\Omega} [\rho(t)\mathbf{v}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} + 2\kappa\mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) : \nabla\boldsymbol{\varphi} - (\rho(0)\mathbf{v}(0) \cdot \boldsymbol{\varphi} + 2\kappa\mathbf{D}(\mathbf{v}(0)) : \nabla\boldsymbol{\varphi}) +$$

$$+ \mathbf{R}(t) : \nabla\boldsymbol{\varphi}]d\mathbf{x} =$$

$$\int_{\Omega} \pi div\boldsymbol{\varphi}\,d\mathbf{x} \qquad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_0^{1,r'}(\Omega). \tag{32}$$

теңдігі орындалатындай бір ғана $\pi(t) \in L^{r'}(\Omega)$ функциясы табылады. Сонымен қатар ол үшін

$$\| \pi(t) \|_{L^{r'}(\Omega)} \leq$$
$$C\big(\| \rho(t)\mathbf{v}(t) - \rho(0)\mathbf{v}(0) \|_{\mathbf{L}^{r'}(\Omega)} + \| \mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) - \mathbf{D}(\mathbf{v}(0)) \|_{\mathbf{L}^{r'}(\Omega)} + \| \mathbf{R}(t) \|_{\mathbf{L}^{r'}(\Omega)}\big). \tag{33}$$

Бағалауы орынадалады.

**Ескерту.** *Жалпы сұйық механиканың негізгі қолданыстары үшін (1) теңдеуіндегі* $\gamma = 0$ *жағдайы маңыздырақ болып келеді. Бұл жағдайда Теорема 3 тұжырымы* $d >$ 2 *болғанда* $r \geq \max\left\{2, p, \dfrac{pd}{pd - 2(d-2)}\right\}$, *ал* $d = 2$ *болғанда* $r \geq max\{2, p\}$ *саны үшін орынды болып қалады.*

Бұл жұмыс ҚР БҒМ ҒК номері AP08052425 гранттық жобасы аясында қаржыландырылып, орындалды.

## ӘДЕБИЕТ

1 Павловский В.А. К теоретическому описанию слабых водных растворов полимеров // Докл. Акад. АН СССР, – № 200(4), – 1971, – С.: 809–812.

2 Осколков А.П. Единственность и разрешимость в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Зап. Наук. Сем. ЛОМИ, – №38, – 1973. – С.: 98–136.

3 Zvyagin V.G and Turbin M.V., Investigation of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids, J. Math. Sci., –№168(2), – 2010. – С.: 57–308.

4 Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / Наука, Новосибирск, – 1983.

5 Jacques Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure // SIAM J. Math. Anal. – V. 21(5), – P.: 1093–1117.

6 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Ч. 8, Зап. научн. Сем. ЛОМИ, – №52, – 1975, – С.: 52-109.

7 Lemoine J. On non-homogeneous viscous incompressible fluids. Existence of regular solutions // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, – №38(4), – 1997, – С.: 697-715.

8 Осколков А.П. Некоторые модельные нестационарные системы в теории неньютоновских жидкостей // Тр. Мат. Инст. Стеклова. – №127, – 1975. – С.: 32–57.

9 Oskolkov A.P. On the theory of unsteady flows of Kelvin–Voigt fluids // J. Math. Sci. – №28(5) – 1985, – P.: 751–758.

10 Oskolkov A.P. Nonlocal problems of motion for equations of the Kelvin–Voigt fluids // J. Math. Sci. – №75(6), – 1995. – P.: 2058 – 2078.

11 Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids // Comm. Math. Sci. – №17(7), – 2019, – P.: 1915-1948.

12 Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. The classical Kelvin-Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: Existence, uniqueness and regularity // Nonlinearity, –№34(5), – 2021, – P.: 3083–3111.

13 Ladyzhenskaya O.A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, – 2nd ed., Nauka, Moscow, -1970.

14 Lions J.-L. Quelques m´ethodes de r´esolution des probl`emes aux limites non lin´eaires / Dunod, Paris, – 1969.

15 Боговский М.Е. Решения некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad. Теория кубатурных формул и применение функционального анализа к задачам математической физики // Тр. сем. С. Л. Соболева, – №1, – 1980, – С.: 128-140.

16 Pileckas K. On spaces of solenoidal vectors // Trudy Mat. Inst. Steklov. – №159, – 1983), – P.: 137–149.

17 Galdi G.P. An introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady-State Problems / Springer, New York, – 2011.

## REFERENCES

1 Pavlovskiy V.A. K teoreticheskomu opisaniyu slabykh vodnykh rastvorov polimerov // Dokl. Akad. AN SSSR, – № 200(4), – 1971, – S.: 809–812.

2 Oskolkov A.P. Yedinstvennost' i razreshimost' v tselom krayevykh zadach dlya uravneniy dvizheniya vodnykh rastvorov polimerov // Zap. Nauk. Sem. LOMI, – №38, – 1973. – S.: 98–136.

3 Zvyagin V.G and Turbin M.V., Investigation of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids, J. Math. Sci., –№168(2), – 2010. – C.: 57–308.

4 Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. Krayevyye zadachi mekhaniki neodnorodnykh zhidkostey / Nauka, Novosibirsk, – 1983.

5 Jacques Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure // SIAM J. Math. Anal. – V. 21(5), – P.: 1093–1117.

6 Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ob odnoznachnoy razreshimosti nachal'no-krayevoy zadachi dlya vyazkikh neszhimayemykh neodnorodnykh zhidkostey // Krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki i smezhnyye voprosy teorii funktsiy. CH. 8, Zap. nauchn. Sem. LOMI, – №52, – 1975, – S.: 52-109.

7 Lemoine J. On non-homogeneous viscous incompressible fluids. Existence of regular solutions // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, – №38(4), – 1997, – C.: 697-715.

8 Oskolkov A.P. Nekotoryye model'nyye nestatsionarnyye sistemy v teorii nen'yutonovskikh zhidkostey // Tr. Mat. Inst. Steklova. – №127, – 1975. – S.: 32–57.

9 Oskolkov A.P. On the theory of unsteady flows of Kelvin–Voigt fluids // J. Math. Sci. – №28(5) – 1985, – P.: 751–758.

10 Oskolkov A.P. Nonlocal problems of motion for equations of the Kelvin–Voigt fluids // J. Math. Sci. – №75(6), – 1995. – P.: 2058 – 2078.

11 Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids // Comm. Math. Sci. – №17(7), – 2019, – P.: 1915-1948.

12 Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. The classical Kelvin-Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: Existence, uniqueness and regularity // Nonlinearity, –№34(5), – 2021, – P.: 3083–3111.

13 Ladyzhenskaya O.A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, – 2nd ed., Nauka, Moscow, -1970.

14 Lions J.-L. Quelques m´ethodes de r´esolution des probl`emes aux limites non lin´eaires / Dunod, Paris, – 1969.

15 Bogovskiy M.Ye. Resheniya nekotorykh zadach vektornogo analiza, svyazannykh s operatorami div i grad. Teoriya kubaturnykh formul i primeneniye funktsional'nogo analiza k zadacham matematicheskoy fiziki // Tr. sem. S. L. Soboleva, – №1, – 1980, – S.: 128-140.

16 Pileckas K. On spaces of solenoidal vectors // Trudy Mat. Inst. Steklov. – №159, – 1983), – P.: 137–149.

17 Galdi G.P. An introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady-State Problems / Springer, New York, – 2011.

***Х. ХОМПЫШ***

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

*Рассматривается начально-краевая задача для системы нелинейных модифицированных с p-лапласиан диффузией и нелинейным демпфирующим членом уравнений, описывающие движе-*

*ние неоднородной (с неизвестной и непостоянной плотностью) несжимаемой вязкоупругой неньютоновской жидкости. Обычно при определении слабых обобщенных решений уравнений гидродинамики для несжимаемой жидкости давление не включается в определение, поскольку слабые решения рассматриваются в соленоидальном пространстве в силу уравнения несжимаемости (неразрывности). В классических уравнениях гидродинамики после определения скорости и плотности давление определяется, используя теорему о представление пространства $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ на прямую сумму двух ортогональных подпространств. Однако восстановление давления из нелинейных уравнений гидродинамики, модифицированные р-лапласианом и нелинейным демпфирующим членом, требует новых подходов. Здесь, при подходящих условиях, на данные задачи давление однозначно определено из начально-краевой задачи для системы нелинейных модифицированных уравнений, описывающие движение неоднородной (с неизвестной и непостоянной плотностью) несжимаемой вязкоупругой неньютоновской жидкости. Описаны основные функциональные пространства и необходимые вспомогательные утверждения. Определено пространство слабых обобщенных решений. С помощью известной леммы де-Рама давление однозначно восстановлено.*

***Ключевые слова**: Кельвин-Фойгт, неоднородные жидкости, определение давления, р-лапласиан, лемма де Рама.*

***KH. KHOMPYSH***

*Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Kazakhstan*

## DETERMINATION OF PRESSURE FROM NONLINEAR EQUATIONS OF NONHOMOGENEOUS NON-NEWTONIAN FLUIDS

*In this paper, the initial-boundary problem for a system of nonlinear equations modified by p-laplacian diffusion and nonlinear damping term, in which describe the motion of a non-homogeneous (with unknown and non constant density ) incompressible viscoelastic non-Newtonian fluids is considered. Usually, a pressure does not include in the definition of weak generalized solution to equations of hydrodynamics for incompressible fluids, because weak solutions consider in the solenoidal space due to the incompressibility (continuity) equation. In the classical hydrodynamic equations, after determining a velocity and a density, a pressure can be determined by using the theorem of a representation of the space $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ into the direct sum of two orthogonal subspaces. The recovering of a pressure from the nonlinear equations of hydrodynamics modified by p-laplacian and nonlinear damping term requires a new approches. Here, under a suitable conditions on the data of the problem, a pressure has been uniquelly determined from the initial-boundary value problem for the system of nonlinear modified equations describing the motion of nonhomogeneous (with unknown and non constant density ) incompressible viscoelastic non-Newtonian fluids. The main functional spaces and necessary axuillary conclusions are introduced. A space of generalized weak solutions is identified. The pressure uniquelly recovered by using the known de-Ram lemma.*

***Key words**: Kelvin-Voigt, nonhomogeneous fluids, pressure, p-Laplacian, de Raam's lemma.*