

МРНТИ 27.21.21; 27.41.23

<https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.202>

**С. Н. БАЙБЕКОВ<sup>1\*</sup>, С. А. АЛТЫНБЕК<sup>2</sup>, А. С. ТУРГИНБАЕВА<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>ТОО «R&D центр «Казахстан инжиниринг», Астана, Казахстан

<sup>2</sup>Казахский университет экономики, финансов и международной торговли,  
Астана, Казахстан

<sup>3</sup>Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

### РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ТРИСЕКЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

*В данной работе сначала предлагается упрощенная методика трисекции произвольного угла с заданной точностью. Трисекция осуществляется при помощи линейки и циркуля. Данная методика, несмотря на свою упрощенность, позволяет осуществление трисекции с достаточно высокой точностью. В этой же работе предлагается улучшенный и усовершенствованный вариант данной методики, который позволяет осуществление трисекции угла с точностью  $10^{-12}$  %. Это очень высокая точность. При необходимости данную точность можно увеличить до очень высокого желаемого значения. Следует сказать, что предлагаемые методики не противоречат теореме Ванцеля о невозможности трисекции угла в общем виде. Наоборот, они очень хорошо согласуются с этой знаменитой теоремой. Предлагаемые методики применимы для деления угла на произвольное количество равных частей, например, на 5, 7, 11, и т.д.*

**Ключевые слова:** трисекция, линейка, циркуль, теорема Ванцеля, угол, точность.

**Введение.** Известно, что при помощи линейки и циркуля всегда можно построить углы, равные на  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ , и  $90^\circ$ , а также другие углы, которые получаются как комбинации этих углов, например, углы в  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$  и  $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$  и т.д. Также известно, что при помощи этих инструментов всегда можно разделить любой произвольный угол на равные две части. Это означает, что используя только линейку и циркуль, всегда можно построить углы, значение которых в кратный раз больше и/или меньше углов  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ , ...

Если рассмотрим деление угла на равные три части, то известно, что при помощи линейки и циркуля трисекция угла осуществима для углов, значение которых равно  $\frac{2\pi}{n}$ , если целое число  $n$  не делится на 3. Также известно, что трисекция осуществима для углов, значения которых определяются следующим выражением [1]-[5]:

---

\* E-mail корреспондирующего автора: e-mail: [baibekovsn@mail.ru](mailto:baibekovsn@mail.ru)

$$\alpha = \frac{\pi}{2^n}, \quad (1)$$

где  $n$  – целое положительное число. Это означает, что, трисекция, в частности, возможна для углов  $360^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $22.5^\circ$ ,  $11.25^\circ$ ,  $5.625^\circ$  и т.д.

Но также следует сказать, что трисекция угла неразрешима в общем виде. Трисекция угла является одной из классических неразрешимых задач на построение, известных со времён Древней Греции. Невозможность построения трисекции была доказана П.Ванцелем в 1837 году.

Теперь вкратце об актуальности трисекции угла.

Очевидно, что любой произвольный угол можно разделить на три равные части при помощи транспортира или других специальных инструментов и устройств. Естественно, каждое средство измерений имеет свойственный только ему рабочий диапазон измерения и класс точности, за пределы которых данный прибор дает искаженные результаты. Покажем это на простом примере. Предположим, что потребуется посылать радио или лазерный сигнал в космос под углом, значение которого равно третьей части заданного угла. Пусть при этом цель, на которую посылается сигнал, находится на расстоянии 10 световых лет. Также предположим, что имеющийся при этом прибор, используемый для определения значения данного угла, является очень совершенным и имеет миллионную точность ( $10^{-6}$ ). Тогда с учетом данной точности этого угломера, сигналы, посылаемые в космос (распространяется со скоростью света в 300 000 км/сек), при достижении цели, например, через 10 лет могут отклоняться от заданной цели более чем на  $10 \cdot 10^6$  км. Из этого простого примера видно, что практическая реализация трисекции углов является одной из важных, а также сложных инженерных задач. При этом нужно обратить особое внимание не только на совершенство и точность измерительных приборов, но и на точность методики измерения. Поэтому в данной работе, зная невозможность осуществления трисекции угла в общем виде, предлагается методика деления произвольного угла на равных три части с необходимой высокой точностью с помощью только линейки и циркуля.

Для наглядности разработку предлагаемой методики разделим на несколько частей.

**Оптимизация процесса трисекции угла.** Если заданный угол имеет значение  $180^\circ > \alpha > 90^\circ$ , то достаточно делить угол  $\beta_1$  на три части (рис. 1, а). Так как, как было сказано выше, угол в  $90^\circ$  всегда можно разделить на три равные части с помощью линейки и циркуля. Аналогично, если значение угла лежит в пределах  $90^\circ > \alpha > 45^\circ$ , то достаточно делить угол  $\beta_2$  на три части (рис. 1, в). Так как угол в  $45^\circ$  всегда можно разделить на три равные части. А если значение угла лежит в пределах  $45^\circ > \alpha > 22,5^\circ$ , то достаточно делить угол  $\beta_3$  на три части (рис. 1, с). Так как угол в  $22,5^\circ$  также можно разделить на три равные части. В дальнейшем будем пользоваться трисекцией угла в  $22,5^\circ$ .

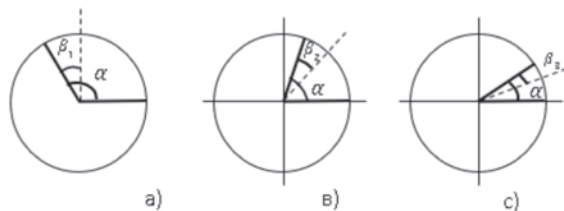
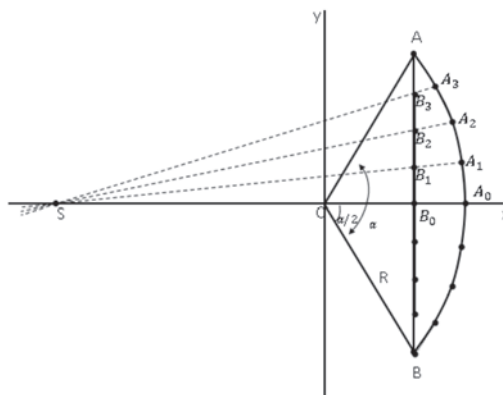


Рисунок 1 – Варианты оптимизации трисекции угла

**Разработка упрощенной методики, обеспечивающий достаточно высокую точность трисекции угла.** Суть предлагаемой методики заключается в следующем.

Пусть дается произвольный угол  $\alpha = AOB$  (рис.2). Цель данной работы – разработка нового метода трисекции угла  $\alpha$  с достаточно высокой точностью при помощи линейки и циркуля. Как было сказано выше, при помощи линейки и циркуля любой угол можно разделить на равные две части. Следовательно, разделив каждый из полученных углов еще на два угла, исходный угол можно разделить на равные 4 части. Продолжая эту процедуру, исходный угол можно разделить на равные  $2^n$  частей, где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ .



**Рисунок 2** – Разделение дуги и хорды на 8 равных частей

В дальнейшем для наглядности рассмотрим вариант разделения исходного угла  $\alpha$  на 8 равных частей (рис.2), половина из которых находятся выше оси  $OX$ . Верхняя и нижняя половины рисунка 2 являются абсолютно симметричными, поэтому здесь и в дальнейшем рассмотрим только верхнюю половину.

На рис.2 точки разделения дуги угла  $\alpha$  обозначены как  $A_i$ , где  $i$  – порядковый номер разделенных углов. Аналогичным образом при помощи циркуля и линейки разделим хорду  $AB$  также на 8 равных частей, которые на рис.2 обозначены как  $B_i$ , где  $i$  – порядковый номер разделенных частей хорды.

После этого, проводя прямую линию через соответствующие две точки  $A_i$  и  $B_j$ , найдем точку пересечения данной прямой с осью  $OX$ . Как видно из рис.2, все прямые линии, проходящие через пару соответствующих точек  $A_i$  и  $B_j$ , пересекаются с осью  $OX$  на очень маленьком отрезке вблизи точки  $S$ . Это означает, что если сможем делить угол  $AOB$  на равные три части, то прямая, проходящая через соответствующие точки разделения (т.е. через пары точек разделения дуги и хорды на равные три части), также будет пересекаться с осью  $OX$  вблизи точки  $S$ . Однако, как следует из теоремы Ванцеля, дугу  $AB$  разделить на три части в общем виде нельзя. Но, при помощи линейки и циркуля хорду  $AB$  всегда можно разделить на равные три части. Поэтому сначала разделим хорду  $AB$  на три равные части, конец одной из которых на рис.3 обозначен буквой  $E$ . Затем, проводя прямую из точки  $S$  через точку  $E$ , найдем ее пересечение с дугой  $AB$ . Данная точка пересечения на рис.3 показана буквой  $D$ .

После этого из точки  $D$  проведем прямую до точки  $O$ , т.е. до начала системы координат. Полученный угол  $\angle AOD$  будет равен (почти равен) третьей части исходного угла  $\angle AOB$ , т.е.:

$$\angle AOD \cong \frac{\angle AOB}{3} = \frac{\alpha}{3}$$

Следует сказать, при помощи этой методики нами была осуществлена трисекция различных углов при помощи графического редактора векторной графики CorelDRAW. При этом строго соблюдались все принципы применения линейки и циркуля. В результате этого практического эксперимента графический редактор векторной графики CorelDRAW все углы делил на равных три части, причем CorelDRAW показывал, что деление осуществлялось с «абсолютной» точностью, погрешность была равна нулю.

Полагаем, что такая «абсолютная» точность является следствием того, что погрешность предлагаемой методики трисекции «выходила» за пределы возможностей редактора CorelDRAW. Тем менее это позволяет говорить о том, что данная методика - достаточно точна. Чтобы убедиться в этом проведем более подробный численный анализ пересечения прямых  $A_i B_i$ , с осью  $OX$  вблизи точки  $S$ .

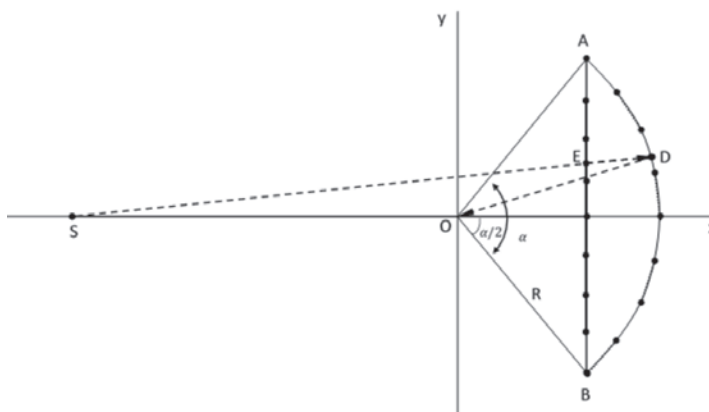


Рисунок 3 – Трисекция угла

Для наглядности берем конкретный пример, пусть угол  $\alpha = 22,5^\circ$  и радиус дуги  $R = 1$ . Этот угол, т.е. соответственно дугу, делим на 8 равных частей, как это было показано на рис.2. Аналогичным образом хорду данной дуги также делим на 8 равных частей. Пересечение полученных прямых  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$  и  $A_3 B_3$  с осью  $OX$  показаны на рис.4 в тысячекратном увеличенном масштабе и обозначены соответственно как  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Значения координат точек  $S_1$  и  $S_2$ , для наглядности, показаны в табл.1. Как видно из табл.1, координаты точек  $S_1$  и  $S_2$  почти совпадают друг с другом.

Если радиус дуги брать равным  $R = 10$  м, то расположение точек  $S_1$  и  $S_2$  будет отличаться друг от друга всего на несколько миллиметров (табл. 1). Именно поэтому, как было сказано выше, графический редактор векторной графики CorelDRAW не смог различать эти точки друг от друга и принимал их за одну точку  $S$ , так, как это показано на рис.2 и рис.3.

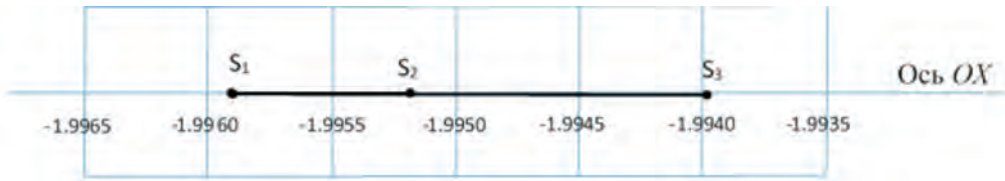


Рисунок 4 – Пересечение прямых  $A_i B_i$  с осью  $OX$  вблизи точки  $S$  при  $R = 1$ ,  $\alpha = 22,5^\circ$

Таблица 1 – Уточненные координаты точек  $S_1$  и  $S_2$  при  $R = 1$ ,  $\alpha = 22,5^\circ$

Координаты точек	x	y
$S_1$	-1,99591...	0
$S_2$	-1,99519...	0

Теперь для точек  $S_1$  и  $S_2$  осуществляем процедуру, показанную на рис.3. Для этого сначала проведем прямую из точки  $S_1$  через точку  $E$ , т.е. через трети части хорды, до рассматриваемой дуги и найдем угол  $\angle DOX$ , затем эту процедуру повторяем для точки  $S_2$ . Компьютерное вычисление, проведенное по этой процедуре, дало следующие результаты:

$$\text{Для точек } S_1 \text{ и } E: \quad \text{угол } \angle DOX = 3,749998^\circ \quad (2-1)$$

$$\text{Для точек } S_2 \text{ и } E: \quad \text{угол } \angle DOX = 3,750004^\circ \quad (2-2)$$

Очевидно, что истинное значение  $\angle DOX$  должна быть равна  $\frac{22,5^\circ}{3 * 2} = 3,75^\circ$ . Из этого следует, что полученные результаты (2) являются весьма точными, погрешность при этом составляет 0,00016%. Теперь становится понятным, почему графический редактор векторной графики CorelDRAW показал «абсолютную» точность трисекции угла. Причем, CorelDRAW такую точность дала и для всех рассматриваемых произвольных углов.

Это очень хороший результат, но, нам нужна более высокая точность.

#### **Разработка методики, обеспечивающий высокую точность трисекции угла.**

Итак, цель данной работы заключается в достижении высокой (очень высокой) точности предлагаемой методики, чтобы она была почти «абсолютно» совершенной.

Для повышения точности предлагаемой методики рассмотрим трисекцию различных углов, например,  $22,5^\circ$ ,  $20^\circ$  и  $10^\circ$ . При этом обратим внимание, что при помощи линейки и циркуля нельзя разделить углы в  $20^\circ$  и  $10^\circ$  на три равные части [1]-[5]. Но, как было показано выше, трисекция угла в  $22,5^\circ$  осуществима<sup>1</sup>. При этом из рис.2 и

<sup>1</sup> Трисекция угла в  $22,5^\circ$  осуществляется без особого труда. Для этого сверху угла в  $22,5^\circ$  нужно откладывать угол в  $30^\circ$  примерно так, как это показано на рис.1,с. Разность этих углов равна  $\beta = 30^\circ - 22,5^\circ = 7,5^\circ$ . С другой стороны  $\frac{22,5^\circ}{3} = 7,5^\circ$ . Следовательно, при помощи циркуля сначала определим длину хорды между углами  $30^\circ$  и  $22,5^\circ$ , затем откладывая эту «длину» на дугу угла  $22,5^\circ$ , делим его на три равные части, каждая из которых равна  $7,5^\circ$ .

рис.3 следует, что прямая  $ED$ , которая соответствует третьей части рассматриваемого угла в  $22,5^\circ$  (т.е. третьей части дуги и хорды), также пересекает ось  $OX$  вблизи точки  $S$ . Обозначим эту точку как  $S_E$ .

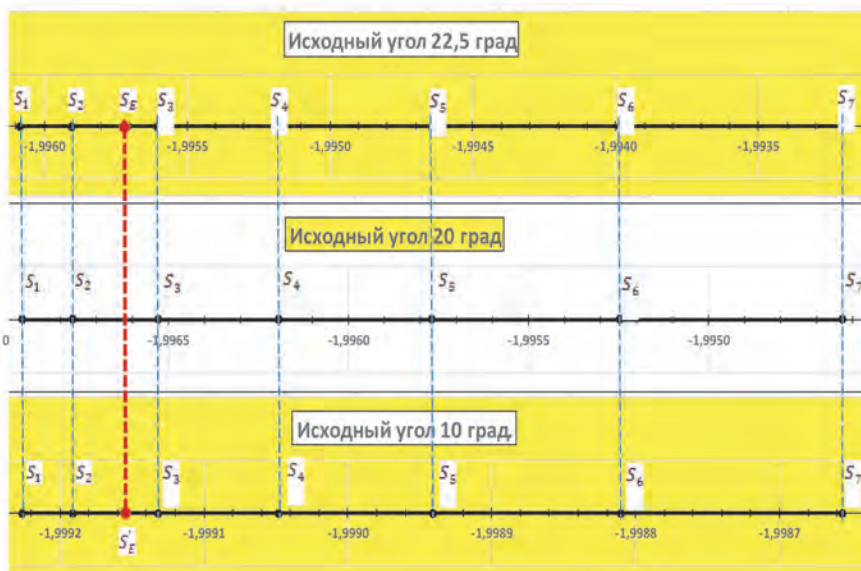
Забегая вперед, скажем, что если произвольный угол, а также его хорду делим на  $N = 2^n$  равных частей, где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , то точка  $S_E$  должна находиться между двумя точками  $S_i$  и  $S_{i+1}$ , где

$$i = \left[ \frac{N}{6} \right] \tag{3}$$

Квадратная скобка означает целую часть дробного числа<sup>2</sup>. Из (3) следует, что если рассматриваемый угол делим на 8 равных частей, то искомая точка  $S_E$  должна находиться между точками  $S_1$  и  $S_2$ . А если этот угол делим на 16 частей, то искомая точка должна находиться между точками  $S_2$  и  $S_3$ . В случае разделения угла на 32 частей, точка  $S_E$  должна находиться между точками  $S_5$  и  $S_6$  и т.д.

В дальнейшем для примера берем, чтобы  $N = 2^4 = 16$ , т.е. делим углы  $22,5^\circ$ ,  $20^\circ$  и  $10^\circ$  на 16 равных частей.

Результаты компьютерного вычисления показаны на рис.5. На этом рисунке точки пересечения прямых  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) с осью  $OX$  обозначены как  $S_1, S_2, \dots, S_7$ . Верхний рисунок соответствует углу в  $22,5^\circ$ . Средний рисунок соответствует углу  $20^\circ$ , а нижний – углу в  $10^\circ$ .



**Рисунок 5** – Относительное расположение точек  $S_i$  и  $S_E$  вдоль оси  $OX$  для разных углов в  $22,5^\circ$ ,  $20^\circ$  и  $10^\circ$

Следует сказать, что по сравнению с рис.2 расположение точек  $S_1, S_2, \dots, S_7$  на рис.5 показаны в тысячекратном увеличенном масштабе. Если анализировать рас-

<sup>2</sup> Справедливость формулы (3) будет доказана ниже.



положение этих точек, полученных для одного выбранного угла, то, как следовало ожидать, они вдоль оси  $OX$  будут находиться на разных местах. Но, их расположение относительно друг друга почти ничем не отличается от относительного расположения таких же точек, полученных для других углов. Это хорошо видно из рис.5, где совпадение относительного расположения соответствующих точек наглядно показаны вертикальными тонкими пунктирными линиями. При этом следует заметить, что масштабы верхних и нижних рисунков на рис.5 разные. Но, такая сопоставительная картина специально была выбрана, чтобы наглядно показать относительность месторасположения точек  $S_i$ .

Теперь обратим внимание на расположение точки  $S_E$ , которая была получена путем деления угла в  $22,5^\circ$  на три равные части. Эту точку, как было сказано выше, без особого труда можно определить с помощью линейки и циркуля.

Выше было показано, что относительное расположение точек  $S_1, S_2, \dots, S_7$ , полученные для углов в  $22,5^\circ, 20^\circ$  и  $10^\circ$ , ни чем не отличаются друг от друга. Это означает, что относительное расположение точек  $S_E$  также должны совпадать друг с другом. Но, точку  $S_E$  для углов в  $20^\circ$  и  $10^\circ$  невозможно определить с помощью линейки и циркуля, так как трисекция этих углов, согласно теореме Ванцеля, неосуществима. Но, есть косвенный способ определения месторасположения этих точек. Этот косвенный метод заключается в проектировании расположения точки  $S_E$ , полученное трисекцией угла в  $22,5^\circ$ , на картину, которая показывает расположения точек  $S_i$  для других углов, например, углов  $20^\circ$  и  $10^\circ$ . Это на рис.5 показано жирной (красной) пунктирной линией<sup>3</sup>.

Одним словом, используя реализуемость трисекции угла в  $22,5^\circ$  при помощи линейки и циркуля, можно найти месторасположения точек  $S_E$  и для других углов.

Именно в этом заключается *главный способ* улучшения точности предлагаемой методики трисекции угла при помощи линейки и циркуля.

Дальнейшая реализация предлагаемой методики заключается в следующем.

Сначала для угла в  $22,5^\circ$  определим месторасположение точки  $S_E$ . Затем, проектируя расположения этой точки на картину месторасположения точек  $S_i$  для рассматриваемого угла, например, угла в  $10^\circ$ , найдем месторасположение точки  $S'_E$  (рис.5).

После этого проводим прямую из этой точки  $S'_E$  через точку  $E$  (т.е. через трети части хорды) до дуги угла  $10^\circ$  так, как это показано на рис.3. На этом рисунке точка ее пересечения с дугой обозначена буквой  $D$ . Далее, соединяя точку  $D$  с началом системы координат, делим данный угол на три равные части. На этом завершается процесс трисекции.

Теперь проанализируем, насколько точно получается трисекция.

Результаты компьютерного вычисления трисекции по предлагаемой улучшенной методике показаны в табл.2. Радиус дуги для всех углов  $R = 1$ . Во всех случаях исходный угол  $\angle AOB$  был разделен на  $N = 64 = 2^6$  равных частей. Следует отметить, что это не означает, что для каждого случая была проведена 64 операции. В данном случае нет необходимости определения координат всех точек  $S_i$ , их 64 точек. Достаточно определить координаты двух точек  $S_{10}$  и  $S_{11}$ . Это следует из (3), так как

<sup>3</sup> Способ проектирования рассматриваемых точек будет показано ниже.

$i = \left[ \frac{N}{6} \right] = \left[ \frac{64}{6} \right] = 10$ . Как видно, рассмотрение двух точек многократно упрощает процесс трисекции угла.

Таблица 2 – Результаты трисекции различных углов с точностью  $10^{-12}$  %

Исходн угол АОВ (град)	N	i	$x_{S_i}$	$y_{S_i}$	$x_{S_E}$	$y_{S_E}$	$x_E$	$y_E$	$x_D$	$y_D$	трисекция угол DOX(град)	Истинн. DOX	отклонение
22,5	64	10	-1,995769492	0									
		11	-1,995690774	0	-1,99571784647713	0	0,980785	0,065030	0,997859	0,065403	3,7500000000000000	3,75	0,0000000000000000
24	64	10	-1,995186826	0									
		11	-1,995097317	0	-1,99512810051406	0	0,978148	0,069304	0,997564	0,069756	4,0000000000000000	4,00	0,0000000000000000
21	64	10	-1,996314611	0									
		11	-1,996246001	0	-1,99626959684762	0	0,983255	0,060745	0,998135	0,061049	3,5000000000000000	3,50	0,0000000000000000
20	64	10	-1,996657160	0									
		11	-1,996594906	0	-1,99661631654820	0	0,984808	0,057883	0,998308	0,058145	3,3333333333333332	3,3333	-0,0000000000000007
18	64	10	-1,997292175	0									
		11	-1,997241716	0	-1,99725906951713	0	0,987688	0,052145	0,998630	0,052336	3,0000000000000000	3,00	0,0000000000000000
15	64	10	-1,998119453	0									
		11	-1,998084382	0	-1,99809644317217	0	0,991445	0,043509	0,999048	0,043619	2,5000000000000000	2,50	0,0000000000000000
13	64	10	-1,998587452	0									
		11	-1,998561097	0	-1,99857016085624	0	0,993572	0,037734	0,999285	0,037806	2,1666666666666664	2,1666	-0,0000000000000002
9	64	10	-1,999322944	0									
		11	-1,999310302	0	-1,99931464995587	0	0,996917	0,026153	0,999657	0,026177	1,5000000000000000	1,50	0,0000000000000000
8	64	10	-1,999465036	0									
		11	-1,999455047	0	-1,99945848236288	0	0,997564	0,023252	0,999729	0,023269	1,3333333333333332	1,3333	-0,0000000000000008
3,6	64	10	-1,999891667	0									
		11	-1,999889643	0	-1,99989033873320	0	0,999507	0,010470	0,999945	0,010472	0,5999999999999999	0,60	-0,0000000000000006
1,5	64	10	-1,999981192	0									
		11	-1,999980841	0	-1,99998096145501	0	0,999914	0,004363	0,999990	0,004363	0,2499999999999999	0,25	-0,0000000000000005

Из табл.2 видно, что результаты трисекции рассмотренных углов получились весьма точными. Среднее абсолютное отклонение определяемых величин угла  $\angle DOX$  от их истинных значений находятся в пределах  $10^{-14}$ , т.е. они отличаются друг от друга на 14 позиции после запятой. Это очень и очень высокая точность. Не исключено, что такая погрешность имеет место из-за погрешности компьютерного вычисления.

Следует сказать, что здесь может иметь место вопрос о том, что можно ли получить такую высокую точность при помощи линейки и циркуля?

Дело в том, что предлагаемая методика как бы состоит из двух частей.

Первая часть, как было показано выше, предусматривает упрощенную методику. Она не претендует на высокую точность. Упрощенная методика проводится без определения координат точки  $S_E$ . В этом случае трисекция угла легко осуществима с помощью обычной линейки и циркуля и дает очень наглядную картину. Тем не менее, полученные результаты будут обладать достаточной точностью. Как было сказано выше, в этом случае даже графический редактор векторной графики CorelDRAW показывает «абсолютную» точность с нулевой погрешностью.

Вторая часть предлагаемой методики является улучшенным и усовершенствованным вариантом упрощенной методики и претендует на очень высокую точность. Высо-



кая точность, прежде всего, достигается косвенным определением месторасположения точки  $S'_E$ .

Вторая часть предлагаемой методики была разработана с целью, чтобы показать, что трисекция угла в принципе осуществима с очень и очень высокой точностью. Если предположить, что линейка и циркуль, применимые для трисекции угла, являются совершенными приборами, в частности, обладающие «микроскопическим зрением», то, как было показано выше, трисекция осуществима с очень высокой точностью.

Компьютерный численный анализ точности предлагаемой методики, результаты которого приведены на табл.2, подтверждает это. В самом деле, из табл.2 видно, что отклонение истинного значения от вычисленного является абсолютно ничтожным, погрешность при этом составляет всего  $10^{-120}\%$ . Это очень высокая точность.

Если требуется дальнейшее повышение точности предлагаемой методики, то это можно обеспечить, увеличивая  $N = 2^n$  – числа исходного деления рассматриваемого угла на равные части. Очевидно, что  $N$  можно увеличить сколь угодно, следовательно точность предлагаемой методики также можно улучшить сколь угодно.

**Доказательство формулы (3).** Рассмотрим случай деления угла,  $\alpha$  т.е. соответственно дуги и хорды,  $N = 2^n$  на равных частей. Пусть радиус дуги  $R = 1$ . Тогда координаты точек  $A_i$  верхней части дуги, которая находится выше оси  $OX$ , равны (рис.2):

$$x_{A_i} = \cos(i\Delta\alpha) = \cos\left(\frac{i\alpha}{N}\right) \quad (4-1)$$

$$y_{A_i} = \sin(i\Delta\alpha) = \sin\left(\frac{i\alpha}{N}\right) \quad (4-2)$$

где  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N/2$ ,  $\Delta\alpha = \frac{\alpha}{N}$

Координаты точек  $B_i$  верхней части хорды, которая находится выше оси  $OX$ , равны (рис.2):

$$x_{B_i} = \text{const} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (5-1)$$

$$y_{B_i} = i\Delta y = \frac{2i}{N} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (5-2)$$

где  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N/2$ ,  $\Delta y = \frac{y_{A_{N/2}}}{N/2} = \frac{\sin(\alpha/2)}{N/2}$

Уравнение прямой, проходящей через соответствующие две точки  $(x_{A_i}, y_{A_i})$  и  $(x_{B_i}, y_{B_i})$  :

$$\frac{x - x_{B_i}}{x_{A_i} - x_{B_i}} = \frac{y - y_{B_i}}{y_{A_i} - y_{B_i}} \quad (6)$$

Теперь определим координаты пересечения этой прямой с осью  $OX$ :

$$\frac{x_{S_i} - x_{B_i}}{x_{A_i} - x_{B_i}} = \frac{y_{S_i} - y_{B_i}}{y_{A_i} - y_{B_i}} \quad (7)$$

Здесь  $x_{S_i}$  и  $y_{S_i}$  – координаты точек  $S_i$ .

Так как в точке пересечения  $y_{S_i} = 0$ , то из (7) получим:

$$x_{S_i} = x_{B_i} - \frac{x_{A_i} - x_{B_i}}{y_{A_i} - y_{B_i}} y_{B_i} \quad (8)$$

Подставляя (4) и (5) в (7), имеем:

$$x_{S_i} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\cos\left(\frac{i\alpha}{N}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{i\alpha}{N}\right) - \frac{2i}{N}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} * \frac{2i}{N}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (9)$$

Теперь рассмотрим предполагаемое деление угла  $\alpha$  на равные три части. Для этого сначала доступным способом делим дугу на 3 равные части (рис.3). При этом координаты точки  $D$  равны:

$$x_D = \cos\left(\frac{\alpha}{6}\right) \quad (10-1)$$

$$y_D = \sin\left(\frac{\alpha}{6}\right) \quad (10-2)$$

Разделяя хорду на равных три части, определяем координаты точки  $E$ :

$$x_E = \cos\frac{\alpha}{2} \quad (11-1)$$

$$y_E = \frac{1}{3}\sin\frac{\alpha}{2} \quad (11-2)$$

Уравнение прямой, проходящей через соответствующие две точки ( $x_D, y_D$ ) и ( $x_E, y_E$ ):

$$\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B}$$

Определим точку пересечения этой прямой с осью  $OX$ :

$$\frac{x_{S_E} - x_E}{x_D - x_E} = \frac{y_{S_E} - y_E}{y_D - y_E}$$

Здесь  $x_{S_E}$  и  $y_{S_E}$  – координаты точки  $S_E$ .

Так как  $y_{S_E}$ , то

$$x_{S_E} = x_E - \frac{x_D - x_E}{y_D - y_E} y_E \tag{12}$$

Подставляя (10) и (11) в (12), получим:

$$x_{S_E} = \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{6}\right) - \cos \frac{\alpha}{2}}{3 \sin\left(\frac{\alpha}{6}\right) - \sin \frac{\alpha}{2}} * \sin \frac{\alpha}{2} \tag{13}$$

Теперь определим, с какой точкой  $S_i$  совпадает точка  $S_E$ . Для этого случая должно выполняться равенство:

$$x_{S_E} = x_{S_i} \tag{14}$$

Подставляя (9) и (13) в (14) и упрощая полученное выражение, имеем:

$$\frac{\cos\left(\frac{i\alpha}{N}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{N}{2i} \sin\left(\frac{i\alpha}{N}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{6}\right) - \cos \frac{\alpha}{2}}{3 \sin\left(\frac{\alpha}{6}\right) - \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Данное равенство должно выполняться при условии, если выполняется следующее равенство:

$$\frac{i}{N} = \frac{1}{6} \text{ или } i = \frac{N}{6}$$

Однако,  $\frac{N}{6} = \frac{2^n}{6}$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , всегда является дробным числом. Это означает, что точка  $S_E$  не совпадает ни с одной из точек  $S_i$ . Из этого следует, что точка  $S_E$  располагается между точками  $S_i = S_{\left[\frac{N}{6}\right]}$  и  $S_{i+1} = S_{\left[\frac{N}{6}\right]+1}$ , где  $i = \left[\frac{N}{6}\right]$ , здесь квадратная скобка означает целую часть дробного числа. В частности, если  $N = 64$ , то точка  $S_E$  будет расположена между точками  $S_{10}$  и  $S_{11}$ .

Формула (3) доказана.

**Определение месторасположения точки  $S_E$ .** Рассмотрим трисекцию угла в  $22,5^\circ$ , затем рассмотрим трисекцию произвольного угла, например, угла в  $10^\circ$ . Сначала разделим дугу этих углов на равные 64 частей, как об этом было сказано выше.

Предположим, что при рассмотрении угла в  $22,5^\circ$  взаимное расположения точек  $S_{10}$  и  $S_{11}$ , а также точки  $S_E$  имеет вид, как это показано на верхней части рис.6.

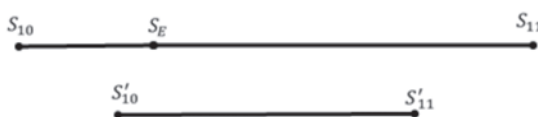


Рисунок 6 – Пример относительного расположения характерных точек трисекции угла

Также предположим, что взаимное расположения точек  $S'_{10}$  и  $S'_{11}$  для случая угла в  $10^\circ$  имеет вид, как это показано на нижней части рис.6. Теперь нужно определить месторасположения точки  $S'_E$  в нижней части рис.6. Для этого спроектируем точку  $S_E$  на линию, на которой расположены точки  $S'_{10}$  и  $S'_{11}$ . Это с помощью линейки и циркуля делается следующим образом (рис.7).

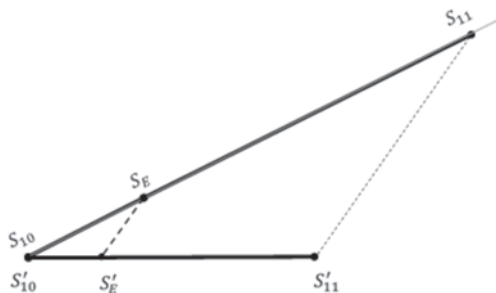


Рисунок 7 – Проекция точки  $S_E$  на прямую ( $S'_{10} - S'_{11}$ )

Сначала через один из концов прямой, где расположены точки  $S'_{10}$  и  $S'_{11}$ , проводится произвольная наклонная прямая линия. Затем при помощи циркуля на эту прямую накладываются отрезки длиной  $(S'_{10} - S'_{11})$  и  $(S'_{10} - S'_E)$ . После этого точки  $S'_{11}$  и  $S'_E$  соединяются прямой линией. Далее из точки  $S'_E$  проводится прямая, параллельная с прямой  $(S'_{10} - S'_{11})$ . Точка пересечение этой прямой с исходной прямой является месторасположением искомой точки  $S'_E$ .

**Заключение.** Очевидно, что предлагаемая упрощенная методика трисекции угла легко реализуема с помощью линейки и циркуля и она, несмотря на свою упрощенность, дает достаточно хорошую точность. Более улучшенный и усовершенствованный вариант этой методики обеспечивает трисекцию угла с очень высокой точностью.

Следует сказать, что данная работа не противоречит теореме Ванцеля о невозможности трисекции угла в общем виде. Наоборот, данная методика очень хорошо согласуется с этой знаменитой теоремой. В самом деле, как было сказано выше, невозможно осуществлять высокоточную трисекцию произвольного угла без вспомогательного определения месторасположения точки  $S'_E$  для «постороннего» угла в  $22,5^\circ$ .

Также следует сказать, что данная методика применима для разделения угла на произвольное количество равных частей, например, на 5, 7, 11, и т.д.

И, наконец, отметим, что предлагаемая методика может быть применима для послания радио и лазерных, а также других сигналов в дальний космос по заданному направлению, как об этом было сказано выше. Также не исключено, что предлагаемая методика может быть полезной для управления полетом по заданной траектории космической и ракетной техники на околоземных орбитах.

Исследование финансировалось Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант № AP08856687).

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 В.Д. Чистяков. Три знаменитые задачи древности / В.Д.Чистяков. - М.: Государственное учебно- педагогическое изд-во, 1963, - 94 с.
- 2 Demaine Erik D., O'Rourke Joseph. Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedral. – Cambridge Univ. Press, 2007. – P. 31–33.
- 3 Щетников А. И. Как были найдены некоторые решения трёх классических задач древности?// Математическое образование.– 2008. – № 4 (48). – С. 3 –15.
- 4 История математики / Под ред.А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – Т.1. С древнейших времен до начала Нового времени.
- 5 Chang, Wen D.; Gordon, Russell A. Trisecting angles in Pythagorean triangles. Amer. Math. Monthly 121 (2014), №. 7, 625–631.

## REFERENCES

- 1 V.D. Chistyakov. Tri znamenitye zadachi drevnosti / V.D.Chistyakov. - M.: Gosudarstvennoe учебно- pedagogicheskoe izd-vo, 1963, - 94 s.
- 2 Demaine Erik D., O'Rourke Joseph. Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedral. – Cambridge Univ. Press, 2007. – P. 31–33.
- 3 SHCHetnikov A. I. Kak byli najdeny nekotorye resheniya tryoh klassicheskikh zadach drevnosti?// Matematicheskoe obrazovanie.– 2008. – № 4 (48). – S. 3 – 15.
- 4 Istoriya matematiki / Pod red.A. P. YUshkevicha. – M.: Nauka, 1970. – T.1. S drevnejshih vremen do nachala Novogo vremeni.
- 5 Chang, Wen D.; Gordon, Russell A. Trisecting angles in Pythagorean triangles. Amer. Math. Monthly 121 (2014), №. 7, 625–631.

**С. Н. БАЙБЕКОВ<sup>1</sup>, С. А. АЛТЫНБЕК<sup>2</sup>, А. С. ТУРГИНБАЕВА<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>«Қазақстан инжиниринг R&D орталығы» ЖШС, Нұр-Сұлтан қаласы, Қазақстан

<sup>2</sup>Қазақ экономика, қаржы және халықаралық сауда университеті,  
Нұр-Сұлтан, Қазақстан

<sup>3</sup>Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

### БЕРІЛГЕН ДӘЛДІКПЕН КЕЗ КЕЛГЕН БҰРЫШ ТРИСЕКЦИЯСЫН ЖАСАУДЫҢ МЕТОДИКАСЫН ЖАСАУ

Бұл жұмыста алдымен кез келген бұрышты теңдей үш бөлікке бөлудің (трисекцияның) жеңілдетілген қарапайым методикасы ұсынылады. Трисекция тек қана сызғыш пен циркульды қолдану арқылы атқарылады. Бұл методика өзінің қарапайымдылығына қарамастан бұрыштарды теңдей үш бөлікке үлкен дәлдікпен бөлуге мүмкіншілік береді.

Бұдан кейін осы методиканың жетілдірілген, яғни трисекцияны өте жоғары дәлдікпен атқаруға мүмкіншілік беретін нұсқасы ұсынылады. Осы нұсқаның арқасында кез келген бұрышты  $10^{-12}$  % дәлдікпен үшке бөлуге болады. Бұл өте жоғары дәлдік. Қажет болған жағдайда бұл дәлдікті бұдан да жоғары нәтижеге жеткізуге болады.

Ұсынылып отырған методикалар трисекцияны жалпы түрде атқару мүмкін емес деген Ванцель әйгілі теоремасына қарама-қайшы келмейді. Керісінше, олар осы атылмыш теоремамен жақсы ұштасып, бірін бірі толықтырады.

Ұсынылып отырған методикалар кез келген бұрышты теңдей 5, 7 және 11, сол сияқты кез келген бөлікке болу үшін қолдануға болады.

**Кілт сөздер:** трисекция, сызғыш, циркуль, Ванцель теоремасы, бұрыш, дәлдік.

**S. N. BAIBEKOV<sup>1</sup>, S. A. ALTYNBEK<sup>2</sup>, A. S. TURGINBAYEVA<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> LTD «R&D center «Kazakhstan Engineering», Nur-Sultan c., Kazakhstan

<sup>2</sup>Kazakh University of Economics, Finance and International Trade,  
Nur-Sultan, Kazakhstan

<sup>3</sup>L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

### **DEVELOPMENT OF A METHOD FOR TRISECTION OF AN ARBITRARY ANGLE WITH A GIVEN ACCURACY**

*In this paper, we first propose a simplified technique for trisection of an arbitrary angle with a given accuracy. Trisection is carried out using a ruler and a compass. This technique, despite its simplicity, allows the implementation of trisection with a sufficiently high accuracy.*

*Then, in the same work, an improved version of this technique is proposed, which allows the implementation of angle trisection with an accuracy of 10-12%. This is a very high precision. If necessary, this accuracy can be increased to a very high desired value.*

*It should be said that the proposed methods do not contradict Wanzel's theorem on the impossibility of trisection of an angle in general form. On the contrary, they agree very well with this famous theorem.*

*The proposed techniques are applicable for dividing an angle into an arbitrary number of equal parts, for example, 5, 7, 11, etc.*

**Key words:** trisection, ruler, compasses, Wanzel's theorem, angle, accuracy