

**С. Е. КАСЕНОВ¹*, Б. А. УРМАШЕВ¹, А. Е. САРСЕНБАЕВА²,
А. М. ТЛЕУЛЕСОВА¹, А. Н. ТЕМИРБЕКОВ¹**

¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

²Южно-Казахстанский университет имени М. Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В статье рассматривается начально-краевая задача для уравнения Гельмгольца. Исследуется корректность задачи Коши для уравнения Гельмгольца и доказано единственность решения исходной задачи в классе функций, представленных в виде рядов Фурье. Для прямой задачи представлено доказательство теоремы устойчивости обобщенного решения, а также получена оценка устойчивости обобщенного решения. Для решения задачи исходная задача сводится к обратной задаче и записывается в операторном виде. Данную задачу приводим к задаче минимизации функционала, где используется метод итераций Ландвебера. Проведено численное исследование устойчивости прямой и исходной задач. Результаты исследования показаны в виде таблиц и рисунок.

Ключевые слова: обратная задача, задача Коши для уравнения Гельмгольца, корректность, устойчивость, численное решение.

Введение. Задача Коши для уравнения Гельмгольца сильно-некорректна, т.к. нет устойчивости решения к погрешности данных. Имеется немало работ, посвященных этому вопросу. Например, в работе N.H. Tuan and P.H. Quan [1], используя метод разделения переменных, предлагают регуляризацию, которая позволяет строить устойчивое решение в двумерной области в случае, когда волновое число $0 < k < 1$. T. Reginska and K. Reginski [2] приводят условие на k , при котором решение рассматриваемой задачи Коши для уравнения Гельмгольца устойчиво в трехмерной области. V. Isakov and S. Kindermann [3], используя сингулярное разложение, показывают аналитически для простой области и численно в общем случае, что рассматриваемая задача становится более устойчивой с ростом волнового числа k . Единственность решения исследуемой задачи доказывается, например, в работе W. Arendt and T. Reginska [4], где вводится специальное понятие «слабой нормальной производной» в самой постановке задачи.

Обратная задача Коши для уравнения Гельмгольца решалась различными численными методами: итерационными, регуляризационными, методами с применением метода конечных элементов или сингулярного разложения. Например, в работах [5-6] исследуется вопрос сходимости итерационных методов решения рассматриваемой задачи (методы Ландвебера и сопряженных градиентов, соответственно, с применением метода конечных элементов). В работе [7] приводятся численные результаты применения А.Н. Тихоновской регуляризации для решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца. Однако большинству численных методов не хватает анализа устойчивости и оценок ошибок приближенного решения.

И хотя существует обширная литература, посвященная исследованию задачи Коши для уравнения Гельмгольца, работ, изучающих оценки погрешности приближенных решений, немного.

* E-mail корреспондирующего автора: sygm.kassenov@kaznu.kz

Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Гельмгольца в области $\Omega = (0, l) \times (0, \pi)$:

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \quad (2)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in [0, \pi], \quad (3)$$

$$u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (4)$$

где k – заданная константа. Требуется найти функцию $u(x, y)$ в области Ω по данным $f(y)$.

Исследование корректности задачи.

Теорема 1. Решение задачи (1)–(4) единственно в классе функций, представимых в виде ряда Фурье

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x) \cos(my), \quad (5)$$

с коэффициентами $u_m(x) \in C^2[0, l]$.

Доказательство. Подставляя (5) в (1)–(4), получаем

$$u_m'' + (k^2 - m^2)u_m = 0, \quad (6)$$

$$u_m'(0) = 0, \quad (7)$$

$$u_m(0) = f_m, \quad (8)$$

где f_m – коэффициенты Фурье функции $f(y)$.

Интегрируем (6) дважды от 0 до x

$$u_m(x) = f_m + (k^2 - m^2) \int_0^x \int_0^{\xi} u_m(\zeta) d\zeta d\xi. \quad (9)$$

Вводим вспомогательную норму

$$\|u_m\|_{m,n} = \max_{x \in (0,l)} \{u_m(x) e^{-\sqrt{|k^2 - m^2|}nx}\}.$$

Учитывая, что

$$\|u_m\|_{C(0,l)} = \|u_m\|_{m,n} \cdot e^{\sqrt{|k^2 - m^2|}nl} \quad (10)$$

из (9), имеем

$$\begin{aligned} |u_m(x)| &= |f_m| + |k^2 - m^2| \int_0^x \int_0^{\xi} |u_m(\zeta)| \cdot e^{-\sqrt{|k^2 - m^2|}n\zeta} \cdot e^{\sqrt{|k^2 - m^2|}n\xi} d\zeta d\xi \\ &\leq |f_m| + |k^2 - m^2| \cdot \|u_m\|_{m,n} \int_0^x \int_0^{\xi} e^{\sqrt{|k^2 - m^2|}n\xi} d\zeta d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |f_m| + |k^2 - m^2| \cdot \|u_m\|_{m,n} \int_0^x \frac{e^{\sqrt{|k^2 - m^2|}n\xi} - 1}{\sqrt{|k^2 - m^2|}n} d\xi \\
 &= |f_m| + |k^2 - m^2| \cdot \|u_m\|_{m,n} \frac{e^{\sqrt{|k^2 - m^2|}nx} - 1}{|k^2 - m^2|n^2} \\
 &= |f_m| + \|u_m\|_{m,n} \frac{e^{\sqrt{|k^2 - m^2|}nx} - 1}{n^2}.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|u_m(x)\| \leq |f_m| + \|u_m\|_{m,n} \frac{e^{\sqrt{|k^2 - m^2|}nx}}{n^2}. \tag{11}$$

Умножая (11) на $e^{-\sqrt{|k^2 - m^2|}nx}$ получаем

$$\|u_m\|_{m,n} \leq |f_m| + \frac{\|u_m\|_{m,n}}{n^2}, \tag{12}$$

$$\|u_m\|_{m,n} \leq \frac{n^2}{n^2 - 1} |f_m|.$$

Учитывая (10), из (12), получаем

$$\|u_m\|_{C(0,l)} \leq \frac{n^2}{n^2 - 1} |f_m| \cdot e^{\sqrt{|k^2 - m^2|}nl}, \tag{13}$$

откуда и следует единственность решения задачи (1)–(4).

Прямая и обратная задачи. Решение исследуемой задачи (1)–(4) сводим к решению обратной задачи, по отношению к следующей – прямой (корректной) задаче

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{14}$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \tag{15}$$

$$u(l, y) = q(y), \quad y \in [0, \pi], \tag{16}$$

$$u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0, \quad x \in [0, l]. \tag{17}$$

Тогда обратную задачу сформулируем следующим образом: нужно найти $q(y) = u(l, y)$ из соотношений (14), (15), (17) по дополнительной информации о решении прямой задачи

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in [0, \pi]. \tag{18}$$

Определение 2.1. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ будем называть обобщенным решением прямой задачи (14)–(17), если для любых $\omega \in H^2(\Omega)$ таких, что

$$\omega_x(0, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \tag{19}$$

$$\omega(l, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \tag{20}$$

$$\omega_y(x, 0) = \omega_y(x, \pi) = 0, \quad x \in [0, l], \tag{21}$$

имеет место равенство

$$\int_0^l \int_0^\pi u \cdot (\omega_{xx} + \omega_{yy} + k^2 \omega) dy dx - \int_0^\pi q(y) \omega_x(l, y) dy = 0. \tag{22}$$

Теорема 2. Если $q \in L_2(0, \pi)$ и $k^2 l^2 < 1$, то прямая задача (14)–(17) имеет единственное обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$ и верна оценка

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \|q\|_{L_2(0, \pi)} \frac{\sqrt{l}}{1 - k^2 l^2}. \tag{23}$$

Доказательство. Вводим вспомогательную задачу

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} = \bar{u}, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{24}$$

$$\omega_x(0, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \tag{25}$$

$$\omega(l, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \tag{26}$$

$$\omega_y(x, 0) = \omega_y(x, \pi) = 0, \quad x \in [0, l]. \tag{27}$$

Интегрируя тождество,

$$\omega \bar{u} = \omega(\omega_{xx} + \omega_{yy}) = (\omega_x \omega)_x - \omega_x^2 + (\omega_y \omega)_y - \omega_y^2$$

по области Ω и учитывая (2.26)–(2.29), получаем

$$\int_0^l \int_0^\pi \omega \bar{u} dy dx = \int_0^\pi \omega_x \omega \Big|_{0,y}^{l,y} dy + \int_0^l \omega_y \omega \Big|_{x,0}^{x,\pi} dx - \int_0^l \int_0^\pi (\omega_x^2 + \omega_y^2) dy dx,$$

откуда имеем

$$\int_0^l \int_0^\pi (\omega_x^2 + \omega_y^2) dy dx \leq \|\omega\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}. \tag{28}$$

Учитывая (26) из равенства

$$\omega(l, y) = \omega(x, y) + \int_x^l \omega_\xi(\xi, y) d\xi,$$

$$|\omega(x, y)|^2 \leq l \cdot \int_0^l \omega_\xi^2(\xi, y) d\xi, \tag{29}$$

имеем

$$\|\omega\|_{L_2(\Omega)} \leq l^2 \cdot \|\omega_\xi\|_{L_2(\Omega)}.$$

Учитывая (28), из (29), получаем

$$\|\omega_x\|_{L_2(\Omega)} \leq l \cdot \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}, \tag{30}$$

$$\|\omega\|_{L_2(\Omega)} \leq l^2 \cdot \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}. \tag{31}$$

Из следующей цепочки тождеств

$$\omega_x \bar{u} = \omega_x (\omega_{xx} + \omega_{yy}) = \frac{1}{2} (\omega_x^2)_x + \omega_x \omega_{yy} = \frac{1}{2} (\omega_x^2)_x + (\omega_x \omega_y)_y - \frac{1}{2} (\omega_y^2)_x$$

имеем
$$\frac{1}{2} (\omega_x^2)_x + (\omega_x \omega_y)_y = \omega_x \bar{u} + \frac{1}{2} (\omega_y^2)_x. \tag{32}$$

Интегрируя (2.23) по Ω , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\pi \omega_x^2(l, y) dy &= \iint_{00}^{\pi\pi} \omega_x \bar{u} dy dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \omega_y^2(l, y) dy - \frac{1}{2} \int_0^\pi \omega_y^2(0, y) dy \\ &\leq \|\omega_x\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq l \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{33}$$

Из (22) имеем

$$\iint_{00}^{\pi\pi} (\bar{u}^2 + k^2 \omega \bar{u}) dy dx \leq \|q(y)\|_{L_2(0,\pi)} \cdot \|\omega_x(l, y)\|_{L_2(0,\pi)}. \tag{34}$$

Откуда вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \|q(y)\| \cdot \|\omega_x(l, y)\| + k^2 \|\omega\| \cdot \|\bar{u}\| \leq \|q(y)\| \cdot \sqrt{l} \|\bar{u}\| + k^2 \|\bar{u}\| \cdot l^2 \|\bar{u}\|, \\ \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|q(y)\| \cdot \frac{\sqrt{l}}{1 - k^2 l^2}. \end{aligned}$$

Решение задачи продолжения для уравнения Гельмгольца методом итераций Ландвебера. Вводим оператор A следующим образом:

$$A : q(y) \mapsto u(0, y),$$

где $u(x, y)$ – решение прямой задачи (14)–(17). Тогда обратная задача (14)–(18) записывается в операторной форме

$$Aq = f. \tag{35}$$

Решение задачи (2.37) ищем минимизацией целевого функционала

$$J(q_n) = \|Aq_n - f\|^2 = \int_0^\pi [u(0, y; q_n) - f(y)]^2 dy. \tag{36}$$

Минимизировать целевой функционал будем методом итераций Ландвебера

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \tag{37}$$

где $\alpha = \left(0, \frac{1}{\|A\|^2}\right)$ – параметр спуска [8].

Численное исследование устойчивости прямой и исходной задач. В теории вычислительных методов невырожденные матрицы подразделяют на две категории: «плохо обусловленные» и «хорошо обусловленные». Плохо обусловленными называются матрицы, для которых решение системы уравнений практически является неустойчивым. Одной из важных характеристик практической устойчивости решения системы линейных уравнений является число обусловленности $\mu = \sigma_{\max}/\sigma_{\min}$. Таким образом, исследуем число обусловленности матрицы исходной задачи и матрицы прямой задачи.

Построим в области Ω сетку ω_h с шагом $h_x = l/N_x$, $h_y = \pi/N_y$, где N_x, N_y – положительные целые числа, тогда получим $\omega_h = \{x = ih_x, y = jh_y; i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}\}$.

Тогда исходную задачу (1) – (4) запишем в конечно-разностном виде:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} + k^2 u_{i,j} = 0, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1},$$

$$\frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h_x} = 0, \quad j = \overline{1, N_y - 1},$$

$$u_{0,j} = f_j, \quad j = \overline{1, N_y - 1},$$

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h_y} = \frac{u_{i,N_y} - u_{i,N_y-1}}{h_y} = 0, \quad i = \overline{0, N_x}.$$

Сведем систему разностных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений.

$$AX = B, \quad (38)$$

где A – матрица $(N_x + 1)(N_y + 1)$, – вектор данных исходной задачи, граничных и дополнительного условий, X – неизвестный вектор, вида:

$$X = (u_{0,0}, u_{0,1}, u_{0,2}, \dots, u_{0,N_y}, u_{1,0}, u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,N_y}, \dots, u_{N_x,0}, u_{N_x,1}, u_{N_x,2}, \dots, u_{N_x,N_y}).$$

Проведем исследование матрицы A . Для исследования используем прямую задачу (14)–(17) с точными данными

$$au_{i-1,j} + bu_{i,j-1} + cu_{i,j} + bu_{i,j+1} + au_{i+1,j} = 0,$$

$$u_{1,j} - u_{0,j} = 0,$$

$$u_{N_x,j} = q_j,$$

$$u_{i,1} - u_{i,0} = u_{i,N_y} - u_{i,N_y-1} = 0.$$

Запишем систему разностных уравнений в виде системы линейных алгебраических уравнений, которая имеет порядок $(N_x + 1)(N_y + 1)$.

$$A_T X_T = B_T. \tag{39}$$

Получив систему линейных алгебраических уравнений можем, численно исследовать устойчивость исходной и прямой задач.

Проведем вычислительный эксперимент для $l = 1$, $N_x = N_y = N$, $k = 0.9$, зададим граничное условие прямой задачи $q(y) = 1 - \cos(2y)$.

Таблица 1 – Исследование матрицы – оператора исходной задачи

N	$\sigma_{max}(A)$	$\sigma_{min}(A)$	$\mu(A)$
20	7.9321	$3.07 \cdot 10^{-15}$	$2.58 \cdot 10^{15}$
50	7.9890	$1.38 \cdot 10^{-17}$	$5.75 \cdot 10^{17}$

Таблица 2 – Исследование матрицы – оператора прямой задачи

N	$\sigma_{max}(A_T)$	$\sigma_{min}(A_T)$	$\mu(A_T)$
20	7.9321	0.0103	768.171
50	7.9890	0.0017	4685.83

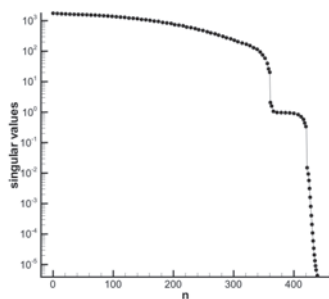


Рисунок 1 – График сингулярных чисел матрицы A , при $N = 20$

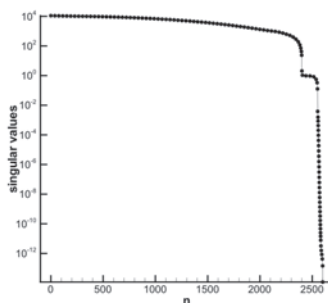


Рисунок 2 – График сингулярных чисел матрицы A , при $N = 50$

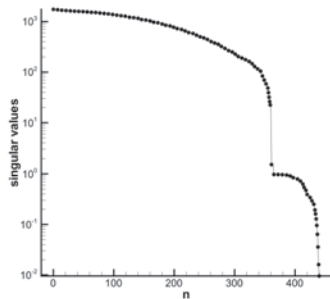


Рисунок 3 – График сингулярных чисел матрицы A_T , при $N = 20$

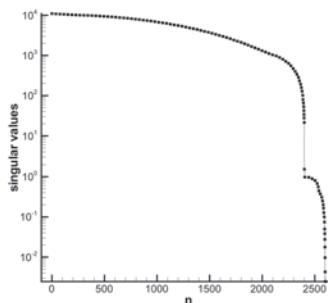


Рисунок 4 – График сингулярных чисел матрицы A_T , при $N = 50$

Вывод. В таблице 1 представлены результаты сингулярного разложения матрицы исходной задачи A для двух разных значений N . Матрица имеет плохую обусловленность [8], что подтверждается быстрым убыванием сингулярных чисел на рисунках 1 и 2. Сингулярное разложение прямой задачи представлено в таблице 2 и на рисунках 3, 4. Откуда видно, что прямая задача корректна ввиду плохой обусловленности матрицы A , т.е. некорректности исходной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Tuan N.H., Quan P.H. A Cauchy problem for Helmholtz equation: regularization and error estimates // *Acta Universitatis Apulensis*. – 2011. – №25. – P. 177-188.
- 2 Reginska T., Reginski K. Approximate solution of a Cauchy problem for the Helmholtz equation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2006. – Vol. 22, №3. – P. 975–989.
- 3 Isakov V., Kindermann S. Subspaces of stability in the Cauchy-Problem for the Helmholtz equation // *Methods and Applications of Analysis*. – 2011. – Vol.18, №1. – P. 1–30.
- 4 Arendt W., Reginska T. An ill-posed boundary value problem for the Helmholtz equation on Lipschitz domains // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. – 2009. – Vol.17, №7. – P. 703–711.
- 5 Marin L., Elliott L., Heggs P.J., Ingham D.B., Lesnic D., Wen X. An alternating iterative algorithm for the Cauchy problem associated the Helmholtz equation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2003. – Vol.192, №5–6. – P.709–722.,
- 6 Marin L., Elliott L., Heggs P.J., Ingham D.B., Lesnic D., Wen X. Conjugate gradient-boundary element solution to the Cauchy problem for Helmholtz-type equations // *Computational Mechanics*. – 2003. – Vol.31, №3–4. – P. 367–377.
- 7 Qin H.H., Wei T., Shi R. Modified Tikhonov regularization method for the Cauchy problem of the Helmholtz equation // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2009. – Vol.224, №1. – P. 39–53.
- 8 Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-posed problems: theory and applications. De Gruyter, 2012, pp. 476

**С. Е. КАСЕНОВ¹, Б. А. УРМАШЕВ¹, А. Е. САРСЕНБАЕВА²,
А. М. ТЛЕУЛЕСОВА¹, А. Н. ТЕМИРБЕКОВ¹**

¹*Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан*

²*М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент қ., Қазақстан*

ГЕЛЬМГОЛЬЦ ТЕҢДЕУІ ҮШІН КОШИ ЕСЕБІНІҢ ҚИСЫНДЫЛЫҒЫН ЗЕРТТЕУ

Мақалада Гельмгольц теңдеуінің бастапқы-шектік есебі қарастырылады. Коши есебінің Гельмгольц теңдеуі үшін қисындылығы зерттеледі және Фурье қатарлары түрінде ұсынылған функциялар класындағы бастапқы есепті шешудің жалғыздығы дәлелденді. Тура есеп үшін жалтыланған шешімнің орнықтылық теоремасының дәлелі ұсынылған, сонымен қатар жалтыланған шешімнің орнықтылығы бағаланады. Мәселені шешу үшін бастапқы есеп кері есепке келтіріледі және оператор түрінде жазылады. Берілген есепті функционалды минимизациялау есебіне келтіреді, минимизация есепке Ландвебер итерация әдісі пайдаланылады. Тура және бастапқы есептердің орнықтылығын сандық зерттеу жүргізілді. Зерттеу нәтижелері кестелер мен суреттерде көрсетілген.

Түйін сөздер: кері есеп, Гельмгольц теңдеуіне арналған Коши есебі, қисындылық, орнықтылық, сандық шешім.

**S. E. KASENOV¹, B. A. URMASHEV¹, A. E. SARSENBAEVA²,
A. M. TLEULESSOVA¹, A. N. TEMIRBEKOV¹**

¹*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

²*South Kazakhstan University named after M.Auezov, Shymkent, Kazakhstan*

INVESTIGATION OF THE WELL-POSEDNESS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE HELMHOLTZ EQUATION

In this paper we consider the the initial boundary value problem for the Helmholtz equation. The well-posedness of the Cauchy problem for the Helmholtz equation is investigated and the uniqueness of the solution of the original problem in the class of functions represented as Fourier series is proved. For a direct problem, a proof of the stability theorem of the generalized solution is presented, and an estimate of the stability of the generalized solution is obtained. To solve the problem, the original problem is reduced to the inverse problem and is written in operator form. We reduce this problem to the functional minimization problem, the Landweber iteration method is used in the minimization problem. A numerical study of the stability of the direct and initial problems is carried out. The results of the study are shown in tables and figures.

Key words: *inverse problem, Cauchy problem for Helmholtz equation, well-posedness, stability, numerical solution.*