УДК 539.3
https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.208

М. Ж. СЕРГАЗИЕВ

Astana IT University, Астана, Казахстан
muslim.sergaziyev@astanait.edu.kz

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ОСТАТОЧНЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ КОНТАКТНОГО СУХОГО ТРЕНИЯ

Изучены волновые процессы в упругом стержне, взаимодействующим с окружающей его средой по закону сухого трения, под воздействием остаточных напряжений при мгновенной разгрузке системы. Полученные аналитические решения уравнений в частных производных гиперболического типа с нелинейным механизмом диссипации энергии позволяют описать колебательный процесс для произвольного сечения стержня при различных параметрах нагружения системы. Также показано, что для рассматриваемого класса задач сухое трение не меняет частоту собственных колебаний системы.

Задачу можно рассматривать как модель для описания динамических процессов в горных породах, находящихся под воздействием внутренних напряжений. Из результатов модельной задачи видно, что если учесть, что горные породы по – разному сопротивляются на растяжение и сжатие и сопротивление на растяжение меньше, чем на сжатие, то очевидно, что значительные остаточные напряжения сжатия при относительно быстрой организации свободной поверхности создадут напряжения, соответствующие первому максимальному смещению кромки и, превышающие предел прочности на растяжение. В этом случае начнется хрупкое разрушение с кромки, которое может поддерживаться и далее растягивающими напряжениями последующих максимальных смещений.

Ключевые слова: *упругий стержень, контактное сухое трение, нелинейные волновые процессы.*

Введение. Проблема квазистатического и динамического деформирования механических систем при наличии нелинейного механизма диссипации энергии, каким является контактное сухое трение, представляет значительный интерес для теории и практики нелинейной механики. В общем случае системы с контактным сухим трением – это слоистые среды, в которых в процессах нагружения появляется частичное или полное проскальзывание между слоями.

В качестве примеров деформируемых систем, для которых фрикционный контакт играет важную роль можно указать на взаимодействие бурильных колонн с грунтом в нефтепромысловом деле; различных подземных сооружений в строительном деле; оползание горных пород и снежных массивов; взаимодействие при соударении различных тел с мембранами и нитями; работу композитных материалов и др. Подобные ситуации возникают в сейсмогенных процессах, стабилизаторах ракет, электротехнике, авторегулировании и т.д. В таком классе задач сила сухого трения является распределенной. Достаточно широк круг задач о взаимодействии деформируемых тел, для которых область контакта локализована или сосредоточена. Примерами могут служить панели, соединенные внахлест в самолетостроении, ленточные и пластинчатые конвейеры на роликоопорах, система вал - втулка, шарнирные и другие соединения в робототехнике. Задачи с сухим трением также появляются при изучении поведения подземных трубопроводов под воздействием ударной волны, появляющейся в связи с сейсмическим или атомным ударом в грунте.

Большой вклад в развитие данного направления внесли Л.В.Никитин и А.Н.Тюреходжаев [1 - 3]. Ряд интересных результатов по установлению закономерностей распространения плоских волн под воздействием нагрузок в виде «прямоугольных косинусов» с частотой в кратное число раз меньшей или в кратное число раз большей частоты собственных колебаний системы, приводящих к распространению в системе субгармонических и ультрагармонических волн получен в работах [4 - 6].

В данной работе изучены динамические процессы в упругом стержне с контактным сухим трением по боковой поверхности, под воздействием остаточных напряжений при быстрой разгрузке свободного конца стержня.

Такого рода задачи сводятся к рассмотрению нелинейной системы уравнений гиперболического типа, описывающей нелинейный волновой процесс в двухмерной механической системе:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial t} + \aleph(v/|v|, \partial v/\partial t/|\partial v/\partial t|)\cdot q,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = E\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1}$$

где $\kappa = \mathrm{sing}(\vartheta)$, если $\vartheta \neq 0$ и $\kappa \in [-1; 1]$, если движение происходит с остановками; q – предельное значение силы трения, ρ – плотность материала, E – модуль упругости стержня.

Первая сложность состоит в определении формы нелинейного диссипативного члена к, связанного с сухим трением и представляющего нелинейную разрывную функцию, претерпевающую разрывы в областях, где скорость обращается в ноль. При этом само значение силы трения в этих областях подлежит определению и решению отдельной задачи. Диссипативный член также существенно зависит от граничных и начальных условий, самого закона сухого трения. Решение такого рода задач связано с определением совокупности областей зависимости решения, на границах которых решения терпят скачок.

В данной работе изучены динамические процессы в упругом стержне с контактным сухим трением по боковой поверхности, под воздействием остаточных напряжений при быстрой разгрузке свободного конца стержня.

Нелинейные колебания стержня с остаточным напряжением при распределенном сухом трении. Для стержня с сухим трением, колебания которого описываются системой (1), выберем граничные и начальные условия. Положим, что стержень длины ℓ сжат равномерным напряжением – σ_0, а мгновенная разгрузка происходит на конце $x = 0$; конец $x = \ell$ жестко заделан. Тогда начальные и граничные условия соответственно будут

$$\vartheta = 0,\ \sigma = -\sigma_0,\ 0 \le x \le \ell,\ t < 0$$

$$\sigma(t, 0) = -\sigma_0 H(t),\ x = 0,$$

где $\sigma(t, x)$ – нормальное в сечении x напряжение; $H(z)$ – единичная функция Хевисайда.

Учитывая, что в задачах рассматриваемого вида сила трения является пассивной и не может изменить знак скорости, удается установить совокупность областей зависимости решения и записать нелинейный член к в виде бесконечных сумм функций Хевисайда со сдвинутыми аргументами. В рассматриваемой задаче функция имеет к выражение

$$\kappa = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} H(at - x - 2k\ell) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} H(at + x - 2k\ell) \ .$$

Подстановка к в уравнение (1) сводит исходную нелинейную задачу к решению линейного уравнения

$$E\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + q\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} H(at - x - 2k\ell) + q\cdot\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} H(at + x - 2k\ell), \quad (2)$$

где $U(x, t)$ – смещение; a – скорость распространения волны в стержне.

Применив к уравнению (2) преобразование Лапласа – Карсона, получим

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2}\bar{U} = \frac{q}{E}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-p(x+2k\ell)/a} + \\ + \frac{q}{E}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{p(x-2k\ell)/a} - \frac{p^2}{a^2}\frac{\sigma_0}{E}(\ell - x) \quad (3)$$

Граничные условия примут вид

$$\bar{\sigma}(p,0) = 0, \quad \bar{\vartheta}(p,\ell) = 0. \quad (4)$$

Общим решением уравнения (3) будет

$$\bar{U}(p,x) = Ae^{-px/a} + Be^{px/a} + \frac{\sigma_0}{E}(\ell - x) + \frac{aq}{2pE}\frac{\left(x + \dfrac{a}{2p}\right)e^{-px/a}}{1 + e^{-2p\ell/a}} - \\ - \frac{aq}{2pE}\frac{\left(x - \dfrac{a}{2p}\right)e^{p(x-2\ell)/a}}{1 + e^{-2p\ell/a}}.$$

Пользуясь граничными условиями (4), получим

$$\bar{U}(p,x) = \frac{aq\ell}{pE}\frac{e^{-2p\ell/a}}{(1 + e^{-2p\ell/a})^2}\left(e^{-px/a} + e^{px/a}\right) + \frac{\sigma_0}{E}(\ell - x) + \\ + \frac{aq}{2pE}\frac{1}{1 + e^{-2p\ell/a}}\left[\left(x + \frac{a}{p}\right)e^{-px/a} + \left(x - \frac{a}{p}\right)e^{p(x-2\ell)/a}\right] - \\ - \frac{a\sigma_0}{pE}\frac{1}{1 + e^{-2p\ell/a}}\left[e^{-px/a} - e^{p(x-2\ell)/a}\right]; \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}(p,x)=q\ell\frac{e^{-2p\ell/a}}{1+e^{-2p\ell/a}}\left(e^{-px/a}-e^{px/a}\right)-\sigma_0-\frac{qx}{2}\frac{1}{1+e^{-2p\ell/a}}\left[e^{-px/a}-e^{p(x-2\ell)/a}\right]-$$

$$-\sigma_0\frac{1}{1+e^{-2p\ell/a}}\left[e^{-px/a}-e^{p(x-2\ell)/a}\right]. \qquad (6)$$

Разложение выражений (5), (6) по степеням бегущих волн, т.е. по степеням входящих туда экспонент, дает

$$\bar{\vartheta}(p,x)=-\frac{aq\ell}{E}\sum_{k=0}^{k=0}(-1)^k(k+1)\left(e^{-p(x+2(k+1)\ell)/a}-e^{p(x-2(k+1)\ell)/a}\right)+$$

$$+\frac{aq}{2E}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\left(x+\frac{a}{p}\right)e^{-p(x+2k\ell)/a}+\left(x-\frac{a}{p}\right)e^{p(x-2(k+1)\ell)/a}\right]+ \qquad (7)$$

$$+\frac{a\sigma_0}{E}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[e^{p(x-2(k+1)\ell)/a}-e^{-p(x+2k\ell)/a}\right];$$

$$\bar{\sigma}(p,x)=q\ell\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)\left(e^{-p(x+2(k+1)\ell)/a}-e^{p(x-2(k+1)\ell)/a}\right)-$$

$$-\frac{qx}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[e^{-p(x+2k\ell)/a}-e^{p(x-2(k+1)\ell)/a}\right]-\sigma_0+ \qquad (8)$$

$$+\sigma_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[e^{p(x-2(k+1)\ell)/a}+e^{-p(x+2k\ell)/a}\right]$$

При переходе к оригиналам решение существенно упрощается, если записать его по областям зависимости решений x, t. Рассмотрим сначала области вида

$$\frac{x}{a}+\frac{2n\ell}{a}<t<-\frac{x}{a}+\frac{2(n+1)\ell}{a}, \quad 0<x<\ell, \qquad (9)$$

где n – номер фронтов волн

$$t-\frac{x}{a}=\frac{2n\ell}{a}, \quad t+\frac{x}{a}=\frac{2(n+1)\ell}{a},$$

причем нумерация $n=0,1,2,...$ для фронтов прямых волн начинается с $t-\frac{x}{a}=0$, а обратных – с фронта $t+\frac{x}{a}=\frac{2\ell}{a}$.

При фиксированном бесконечные суммы в выражениях (7), (8) содержат лишь конечное число ненулевых членов, которые нетрудно просуммировать путем подсчета участвующих в образовании движения прямых и обратных волн. Так, для напряжения получим

$$\sigma=q\ell\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(k+1)H(t-x/a-2(k+1)\ell/a)-$$

$$-q\ell\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(k+1)\cdot H(t+x/a-2(k+1)\ell/a)-$$

$$-\frac{qx}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k H(t-x/a-2k\ell/a)+\frac{qx}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k H(t+x/a-2(k+1)\ell/a)+$$

$$+\sigma_0\sum_{k=0}^{n}(-1)^k H(t-x/a-2k\ell/a)-\sigma_0\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k H(t+x/a-2(k+1)\ell/a)-\sigma_0.$$

Отсюда окончательное выражение для напряжений имеет вид

$$\sigma=(-1)^{n+1}\frac{1}{2}qx.$$

Для скорости имеем

$$a\rho\vartheta=\frac{aq}{2}\sum\nolimits_{k=0}^{n}(-1)^k(t-2k\ell/a)H(t-x/a-2(k+1)\ell/a)-$$

$$-\frac{aq}{2}\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}(-1)^k(t-2(k+1)\ell/a)H(t+x/a-2(k+1)\ell/a)-$$

$$-q\ell\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}(-1)^k(k+1)\left[H(t-x/a-2(k+1)\ell/a)+H(t+x/a-2(k+1)\ell/a)\right]-$$

$$-\sigma_0\sum\nolimits_{k=0}^{n}(-1)^k H(t-x/a-2k\ell/a)+\sigma_0\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}(-1)^k H(t+x/a-2(k+1)\ell/a).$$

Тогда,

$$a\rho\vartheta=-(-1)^n\left(\sigma_0-\frac{1}{2}aqt\right). \tag{10}$$

Для областей вида

$$-\frac{x}{a}+\frac{2n\ell}{a}<t<\frac{x}{a}+\frac{2n\ell}{a},\quad 0<x<\ell, \tag{11}$$

получаем соотношения

$$\vartheta=0;\quad \sigma=\sigma_0((-1)^n-1)-1nnq\ell,$$

Области вида (9) и (11) полностью исчерпывают область движения. Полученное решение справедливо до момента времени $t=2\sigma_0/aq$, в который, как видно из (10), движение прекращается одновременно во всем стержне. На рис.1 сплошной линией построена зависимость во времени смещений конца стержня $x = 0$. Пунктиром показана та же зависимость при вдвое меньшем остаточном напряжении. Как видно, конец стержня совершает затухающие колебания с характерным периодом $4\ell/a$.

Заключение. Рассмотренную задачу можно применить как модель для описания динамических процессов в горных породах, находящихся под воздействием внутренних напряжений. Из результатов модельной задачи видно, что если учесть, что горные породы по- разному сопротивляются на растяжение и сжатие и сопротивление на растяжение меньше, чем на сжатие, то очевидно, что значительные остаточные напряжения сжатия σ_0 полосы при относительно быстрой организации свободной поверх-

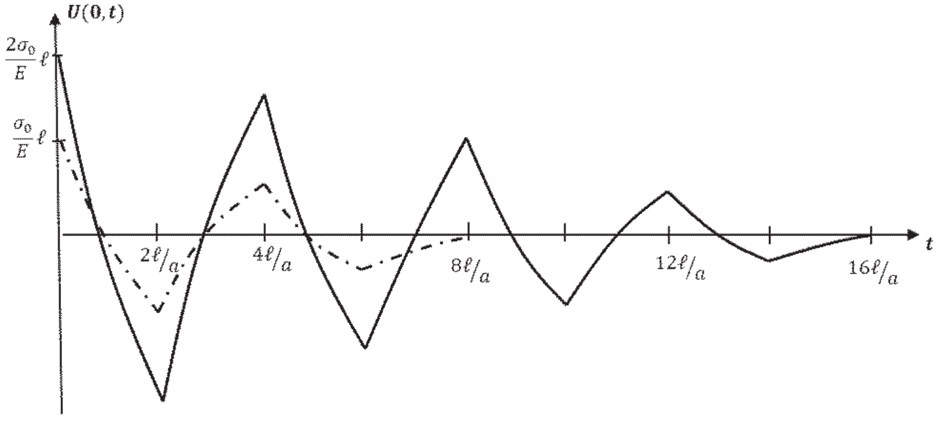

Рисунок 1 **–** колебания концевого сечения стержня

ности создадут напряжения, соответствующие первому максимальному смещению кромки и, превышающие предел прочности на растяжение. В этом случае начнется хрупкое разрушение с кромки, которое может поддерживаться и далее растягивающими напряжениями последующих максимальных смещений.

ЛИТЕРАТУРА

1 Nikitin L.V., Tyurekhodgaev A.N. Wave propagation and vibration of elastic rods with interfacial frictional slip // Wave Motion, 1990. V.12. P.513-526.

2 Tyurekhodgaev A.N. Action of a shock wave in a ground on the pipeline of final length // Works of the European conference on geomechanics (Amsterdam). 1999. Vol. III. P.139-144.

3 Никитин Л.В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. – М.: Московский лицей. – 1998 – 261с.

4 Никитин Л.В., Тюреходжаев А.Н. Демпфирование сухим трением динамических нагрузок в волокнистом композите // Механика композитных материалов. 1986. № 1. С.28-37.

5 Tjurekhodgaev A.N., Sergaziyev M.Zh. Distribution of Subharmonic and Ultraharmonic waves in the presence of Nonlinear Mechanism of the Energy Dissipation // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. 2006. P.23-30.

6 Tyurekhodjaev A.N., Sergaziyev M.Zh. Distribution of subharmonic waves with the nonlinear mechanism of dissipation of energy // Proceedings of the XXI International Scientific and Technical Conference “Trans&Motoauto. 2013. P.22-26.

REFERENCES

1 Nikitin L.V., Tyurekhodgaev A.N. Wave propagation and vibration of elastic rods with interfacial frictional slip // Wave Motion, 1990. V.12. P.513-526.

2 Tyurekhodgaev A.N. Action of a shock wave in a ground on the pipeline of final length // Works of the European conference on geomechanics (Amsterdam). 1999. Vol. III. P.139-144.

3 Nikitin L.V. Statika i dinamika tverdyh tel s vneshnim suhim treniem. – M.: Moskovskij licej. – 1998 – 261s.

4 Nikitin L.V., Tyurekhodzhaev A.N. Dempfirovanie suhim treniem dinamicheskih nagruzok v voloknistom kompozite // Mekhanika kompozitnyh materialov. 1986. № 1. S.28-37.

М. Ж. СЕРҒАЗИЕВ

Astana IT University, Астана, Қазақстан

ҚҰРҒАҚ ҮЙКЕЛІСТЕГІ ЖҮЙЕНІҢ ҚАЛДЫҚ КЕРНЕУЛЕРДІҢ ӘСЕРІНЕН ТУЫНДАЙТЫН ТЕРБЕЛІСТЕРІ

Құрғақ үйкеліс заңы бойынша қоршаған ортасымен әрекеттесетін серпімді жүйені лезде босату кезінде қалдық кернеулердің әсерінен пайда болатын толқындық процестер зерттелген. Энергияның таралуының сызықты емес механизмі бар гиперболалық типті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық шешімдері табылған. Алынған шешімдер серпімді жүйенің әртүрлі жүктеу параметрлері үшін тербеліс процесін сипаттауға мүмкіндік береді. Сондай-ақ, қарастырылатын есептер класы үшін құрғақ үйкеліс күші жүйенің табиғи жиілігін өзгертпейтіні көрсетілген. Есепті ішкі кернеулердің әсерінен тау жыныстарындағы динамикалық процестерді сипаттау үлгісі ретінде қарастыруға болады. Бұл модельдік есептің нәтижелерінен көруге болатыны, егер тау жыныстарының созылу мен сығылуға қарсы әсері әртүрлі болса, жәнеде керілуге төзімділігі сығылуға қарағанда аз болатынын ескерсек, онда қалдық қысу кернеулері, еркін бөлікті жылдам ұйымдастыру әсерінен, жиектің бірінші максималды ығысуына сәйкес келетін және созылу беріктігінен асатын кернеулерді тудырады. Бұл жағдайда сынғыш жойылу жүйенің шекті бөлігінен басталады, жәнеде жойылу процесі кейінгі максималды жылжулардың созылу кернеулері әсерінен одан әрі сақталады.

***Түйін сөздер**: серпімді жүйе, құрғақ үйкеліс күші, сызықты емес толқындық процестер.*

M. SERGAZIYEV

Astana IT University, Astana, Kazakhstan

NONLINEAR OSCILLATIONS OF A ROD WITH RESIDUAL STRESS IN THE PRESENCE OF CONTACT DRY FRICTION

Wave processes are studied in an elastic rod interacting with its environment according to the law of dry friction. Oscillations of the system at residual stresses are emerged under the influence of instantaneous unloading. Analytical solution of the partial differential equation of hyperbolic type with a nonlinear mechanism of energy dissipation is obtained. Thus, it makes it possible to describe the oscillatory process at various loading parameters of the system for an arbitrary section of the rod. The property, that for the class of problems under consideration dry friction does not change the natural frequency of the system, is shown additionally. The problem can be considered as a model for describing dynamic processes in rocks under the effect of internal stresses. Results of the modeling problem allow us to conclude: if we consider that rocks resist differently to tension and compression, such as resistance to tension is less than compression' resistance, it is obvious that in the case of relatively rapid unloading of the system, the residual compressions will create stresses that correspond to the first maximal displacements of the end section, and that exceed the limit of tensile strength as well. In this case, the edge sections undergo the brittle fracture that can be sustained by the tensile stresses of the subsequent maximum displacements.

***Key words**: elastic rod, contact dry friction, nonlinear wave propagation.*