УДК 631.362.36:57.087.3
https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.210

Д. О. ТАМАБАЙ[1], Н. М. ТЕМИРБЕКОВ[2], С. И. КАБАНИХИН[3], Н. Д. АРЫСТАНБЕК[1]*

[1]*Казахский национальный университет имени аль-Фараби,*
[2]*Национальная инженерная академия РК, Алматы, Казахстан*
[3]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА МЕТОДОМ БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА С БАЗИСАМИ В ВИДЕ ВЕЙВЛЕТОВ ЛЕЖАНДРА

В данной работе проведен обзор новых работ по приближенным методам решения нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Вейвлеты Лежандра использованы для численного решения нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода проекционным методом Галеркина-Бубнова. Рассмотрен метод Ньютона-Канторовича для системы нелинейных алгебраических уравнений и проведены численные расчеты. Проведенный сравнительный анализ показывает, что метод Бубнова-Галеркина с базисными функциями в виде вейвлетов Лежандра является эффективным в отношении точности и удобным в реализации.

***Ключевые слова**: нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, вейвлеты Лежандра, метод Галеркина-Бубнова, метод Ньютона.*

Введение. Исследование рудообразования является одной из важных проблем геологии. Концентрация химических элементов геологической среды позволяет прогнозировать среду рудных объектов, объединяя многие металлогенические гипотезы [13]. Базовые модели рудообразования приводят к важности перехода к 3-х мерным геохимическим полям, т. е. к решению квазитомографических и обратных задач.

Также в магниторазведке, электроразведке с постоянным током ключевую роль занимает задача продолжения потенциальных полей с поверхности Земли вглубь. Может рассматриваться задача продолжения гравитационного потенциала от возмущающихся масс, что также сводится к решению обратных задач.

Обратные задачи математической геофизики приводят к решению интегральных уравнений Фредгольма первого или второго рода. Решение подобных интегральных уравнений усложняется, если уравнение является нелинейным. В некоторых случаях эти уравнения могут не иметь аналитического решения. Помимо аналитического решения, известны численные методы решения интегральных уравнений.

Для численного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода можно применить ряд проекционных методов, таких как Галеркина – Петрова, метод Бубнова – Галеркина, метод моментов, метод коллокации. Данные методы дают качественное приближение, в отличии от других известных методов.

При применении вейвлетов в качестве базисных функций для проекционных методов можно заметить более качественный результат. Применение вейвлетов дает

* E- mail: корреспондирующего автора: dtamabay@gmail.com

возможность создавать более эффективные и результативные алгоритмы по сравнению с известными регуляризующими алгоритмами. Известен ряд таких вейвлетов, как вейвлеты Чебышева, вейвлеты Лежандра, вейвлеты Альперта, вейвлеты Хаара, т.д. В работе [1] для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода применен метод, в котором используется вейвлет Лежандра в качестве базисных функции.

В работе [2] рассмотрено нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна, другими словами, нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, где в качестве базисных функций подобраны мультивейвлеты Альперта. При применении данных вейвлетов при методе Петрова – Галеркина получаются хорошие результаты, показывающие высокую сходимость к точному решению.

Нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна можно решить, применяя вейвлеты Чебышева [3] в качестве базисов, которые показывают эффективный результат и сходимость.

В последние несколько лет часто публикуются работы, посвященные приближенному решению интегральных уравнений Фредгольма [4,5,6]. В статье [4] для численного решения двумерного интегрального уравнения Фредгольма рассматриваются двумерные вейвлет базисы Лежандра. В работе [5] рассмотрен ряд методов для численного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Регуляризация, вейвлет анализ и методы многоуровневых итераций рассмотрены в рамках вышеуказанной работы.

В работе [7] для численного решения нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна применяются вейвлеты Вильсона, что также показывает эффективный результат.

K.Maleknejad, T.Lofti, K.Mahdiani [9] используют ортогональные вейвлеты в качестве базиса, в проекционных методах для численного решения. Показано, что если базис обладает свойством наилучшего приближения, то вейвлет метод Галеркина сходится.

В работе [10] используются вейвлеты как базисные функции, а в качестве проекционного используется метод моментов. В качестве ядра интегрального оператора рассматриваются специальные радиальные функции и доказана устойчивость численного решения [11].

В работе [12] Temirbekov N., Temirbekova L. используют метод сопряженных уравнений для решения задач математической геофизики и математической эпидемиологии.

В работе [13] вейвлеты Лежандра использованы для численного решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода проекционным методом Галеркина-Бубнова. Численные расчеты и представленная теорема показывают очень сильную чувствительность решения от точности вычисления двойных интегралов для определения элементов матрицы и правой части системы линейных алгебраических уравнений.

В статье [14] рассматривается численное моделирование обратных задач геохимии с помощью регуляризирующих алгоритмов.

В работе [8] рассмотрен метод Ньютона-Канторовича для решения системы нелинейных алгебраических уравнений, которые получаются после применения метода Галеркина. Описаны условия сходимости и оценка погрешности данного метода.

В вышеуказанных работах рассмотрены методы с базисами в виде вейвлетов, гибридных блочно-импульсных функций, но нет анализа ошибки аппроксимации невязки, оценки погрешности на полуинтервалах. Нет подробного описания решения, полученных в результате применения метода Галеркина, системы нелинейных алгебраических уравнений. Не рассмотрены выбор начального приближения при применении метода Ньютона для решения системы, условия сходимости, оценка погрешности.

В данной работе рассматривается теорема о сходимости метода Ньютона и разрабатывается универсальная оценка погрешности приближенного решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

Метод Галеркина для нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x)-(K\psi y)(x)=f(x), \quad x\in[a,b] \tag{1.1}$$

где

$$(K\psi y)(x)=\int_a^b K(x,s)\varphi(s,y(s))ds \tag{1.1a}$$

$K(x,s)$ и $\varphi(s,y(s))$ непрерывны в области $G=\{a\le x\le b,\ a\le s\le b\}$, $f(x),\ y(s)\in L_2[a,b]$.

Для решения уравнения положим

$$z(s)=\varphi(s,y(s)) , \tag{1.2}$$

тогда подставив (1.2), будем иметь

$$z(x)=\varphi(x, f(x)+\int_a^b K(x,s)\varphi(s,z(s))ds) . \tag{1.3}$$

Аппроксимируя, имеем

$$z_n(x)=\varphi(x, f(x)+\int_a^b K(x,s)\varphi(s,z_n(s))ds) , \tag{1.4}$$

где

$$z_n(x)=\sum_{j=1}^n c_j b_j(x) , \tag{1.5}$$

$b_j(x)$ – ортонормальная система в $X_n\subset X$, X – Банахово пространство. Приближенное решение находим из следующего выражения

$$(z_n(x),b_i(x))=\left(\varphi\left(x, f(x)+\int_a^b K(x,s)\varphi(s,z_n(s))ds\right),b_i(x)\right), \quad i=1,\dots,n. \tag{1.6}$$

Подставляя разложения решения в виде (1.5), имеем

$$\left(\sum_{j=1}^n c_j b_j(x),b_i(x)\right)=\left(\varphi\left(x, f(x)+\int_0^1 K(x,s)\varphi(s, f(x)+\sum_{j=1}^n c_j b_j(s))ds\right),b_i(x)\right), \tag{1.7}$$

$$i=1,\dots,n.$$

Введем обозначения

$$a_{ij} = \int_0^1 b_j(x) b_i(x) dx, d_j(x) = \int_0^1 k(x,s) b_j(x) dx.$$

Тогда уравнение (1.6) эквивалентно

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} c_j a_{ij} = \int_0^1 \varphi(s, f(x) + \sum\nolimits_{j=1}^{n} c_j d_j(x)) b_i(x) dx, \quad i = 1,...,n. \qquad (1.8)$$

Ортонормированная система вейвлетов Лежандра. Вейвлеты Лежандра определяются с помощью аналитической формулы

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} (2m+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k-1}{2}} L_m\left(2^k t - \hat{n}\right), & \frac{\hat{n}-1}{2^k} \le t < \frac{\hat{n}+1}{2^k}, \\ 0, & \text{для других } t. \end{cases} \qquad (1.9)$$

где $k = 2,3,...; \quad n = 1,2,3,...,2^{k-1}; \quad \hat{n} = 2n-1; \quad m = 0,1,2,...,M-1.$

Многочлены Лежандра $L_0(t) = 1,$ порядка l на интервале [-1;1] определяется из следующей рекуррентной формулы

$$L_0(t) = 1,$$

$$L_1(t) = t,$$

$$L_{l+1}(t) = \frac{2l+1}{l+1} t L_l(t) - \frac{l}{l+1} L_{l-1}(t), \quad l = 1,2,3,... \qquad (1.10)$$

Множество $\{L_l(t): \quad l = 1,2,3,...\}$ – полное ортогональное множество в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$. Кроме того, полиномы Лежандра ограничены, т.е. $\left|L_l(t)\right| \le 1, \; -1 \le t \le 1, \; l = 0,1,2,...$.

Метод Ньютона-Канторовича для системы нелинейных алгебраических уравнений. Нелинейную систему (1.8) можно решить методом Ньютона. Для этого запишем

$$g_i(c_1, c_2, ..., c_n) = \sum\nolimits_{j=1}^{n} c_j a_{ij} - \int_0^1 \varphi(s, f(x) + \sum\nolimits_{j=1}^{n} c_j d_j(x)) b_i(x) dx, \quad i = 1,...,n. \qquad (1.9)$$

Матрица Якоби строится через производные

$$\frac{\partial g_i}{\partial c_l} = a_{ij} - \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial c_l}(s, f(x) + \sum\nolimits_{j=1}^{n} c_j d_j(x)) d_i(x) dx, \quad i = 1,...,n. \qquad (1.10)$$

Пусть $\left(\vec{c}^{(m)}\right) = \left(c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, ..., c_n^{(m)}\right)^T$ – значение коэффициентов на m–ой итераций. Тогда

$$G\left(\vec{c}^{(m)}\right)=\left(g_1\left(\vec{c}^{(m)}\right),g_2\left(\vec{c}^{(m)}\right),...,g_n\left(\vec{c}^{(m)}\right)\right)^T \tag{1.11}$$

и матрица Якоби имеет вид

$$\frac{\partial G\left(\vec{c}^{(m)}\right)}{\partial c}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1\left(\vec{c}^{(m)}\right)}{\partial c_1^{(m)}} & \cdots & \dfrac{\partial g_1\left(\vec{c}^{(m)}\right)}{\partial c_n^{(m)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n\left(\vec{c}^{(m)}\right)}{\partial c_1^{(m)}} & \cdots & \dfrac{\partial g_n\left(\vec{c}^{(m)}\right)}{\partial c_n^{(m)}} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Каноническая форма метода Ньютона для решения системы нелинейных уравнений с заданным начальным приближением $\vec{G}^{(0)}\in R^n$

$$\frac{\partial G\left(\vec{c}^{(m)}\right)}{\partial c}\left(\vec{c}^{(m-1)}-\vec{c}^{(m)}\right)=-G\left(\vec{c}^{(m)}\right). \tag{1.13}$$

Итеративный процесс можно завершить, если будет выполнено условие

$$\left\|\vec{c}^{(m+1)}-\vec{c}^{(m)}\right\|<\varepsilon.$$

Для сходимости метода Ньютона для систем нелинейных уравнений имеет место теорема Л.В.Канторовича [8], которая формулируется следующим образом:

Теорема. Пусть для системы уравнений (1.13) и начального приближения $\vec{c}^{(0)}$ выполнены условия:

1. Матрица Якоби $\dfrac{\partial G\left(\vec{c}^{(0)}\right)}{\partial c}$ невырождена и $\left\|\left[\dfrac{\partial G\left(\vec{c}^{(0)}\right)}{\partial c}\right]^{-1}\right\|\le B$;

2. $\max_{1\le i\le n}\left|g_i\left(\vec{c}^{(0)}\right)\right|\le\eta$;

3. Для точек n-мерной области $\left|\vec{c}_i-\vec{c}_i^{(0)}\right|\le 2B\eta,\quad i=1,...,m$, выполнены условия $\left|\dfrac{\partial^2 G\left(\vec{c}^{(m)}\right)}{\partial c_p\partial c_q}\right|\le L,\quad i,p,q-1,...,n.$

4. Постоянные B,η,L удовлетворяют условию $h=B^2\cdot\eta\cdot L\cdot n^2\le\dfrac{1}{2}$.

Тогда система (1.13) в n-мерной области:

а. имеет единственное решение $\left(\vec{c}^{(*)}\right)=\left(c_1^{(*)},c_2^{(*)},...,c_n^{(*)}\right)^T$ в n – мерной области, лежащее в окрестности точки $\vec{c}_i^{(0)}$, которая удовлетворяет неравенству $\left|\vec{c}_i-\vec{c}_i^{(0)}\right|\le\dfrac{1-\sqrt{1-2h}}{h}B\cdot\eta,\quad i=1,...,n;$

b. к нему сходятся последовательности метода Ньютона;

c. для погрешности приближенного решения $\vec{c}^{(n)}$ верна оценка:

$$\max_{1\le i\le n}\left|\vec{c}_i^{(n)}-\vec{c}_i^{(*)}\right|\le\frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n-1}\cdot\eta\cdot B.$$

Также надо учесть, что условия сходимости процесса зависят от нормировки пространства.

Подставляя начальное приближение $\left(\vec{c}^{(0)}\right)=\left(c_1^{(0)},c_2^{(0)},...,c_n^{(0)}\right)^T$ в уравнение метода Ньютона (1.13) и учитывая при этом выражение для производной $\frac{\partial G(\vec{c}^{(0)})}{\partial c}$, получим для поправки $\Delta\vec{c}=\left|\vec{c}^{(1)}-\vec{c}^{(0)}\right|=(\Delta\xi_1,\Delta\xi_2,...,\Delta\xi_m)$ систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_j(\Delta\xi_1^0,\Delta\xi_2^0,...,\Delta\xi_m^0)}{\partial\xi_k}\Delta\xi_k=-g_j\left(\Delta\xi_1^0,\Delta\xi_2^0,...,\Delta\xi_m^0\right),\quad j=1,...,m$$

из которого находим $\Delta\vec{c}^{(m)}$ и, следовательно, $\vec{c}^{(1)}$.Таким же образом находим $\vec{c}^{(2)}$ и т.д.

Результаты и их обсуждение. Для иллюстрации возможностей предложенного численного решения нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна рассмотрим следующий пример

$$u(x)-\int_0^1(2xs)e^{-(u(s))^2}ds=\frac{x}{e},\quad 0\le x\le 1$$

единственное точное решение которого $u(x)=x$.

При вычислении принималось $k=2$ и $M=2$. В таком случае количество базисных функции и размерность вектора неизвестных α будет $L=4$.

Результаты численных расчетов в 11 узлах приведены в виде следующей таблицы.

Таблица 1 *–* $\tilde{u}(x_i)$ – приближенное решение методом Бубнова-Галеркина, $u_T(x_i)$ – точное решение уравнения при значениях x_i

i	x_i	$\tilde{u}(x_i)$	$u_T(x_i)$	$\left\|\tilde{u}(x_i)-u_T(x_i)\right\|$
1	0	0	0	0
2	0.1	0.09233930743355837	0.1	0.00766069256644164
3	0.2	0.2382466195222646	0.2	0.0382466195222646
4	0.3	0.32778254377147115	0.3	0.027782543771471102
5	0.4	0.4010331134585235	0.4	0.0010331134585234714
6	0.5	0.49682655338762655	0.5	0.003173446612373454
7	0.6	0.6006212560864597	0.6	0.0006212560864595762
8	0.7	0.6995131717551173	0.7	0.00048682824488277543
9	0.8	0.7980575773689967	0.8	0.0019424226310033044
10	0.9	0.9000481117051394	0.9	4.811705139408656e-05
11	1	1.0097961797796495	1	0.009796179779649528

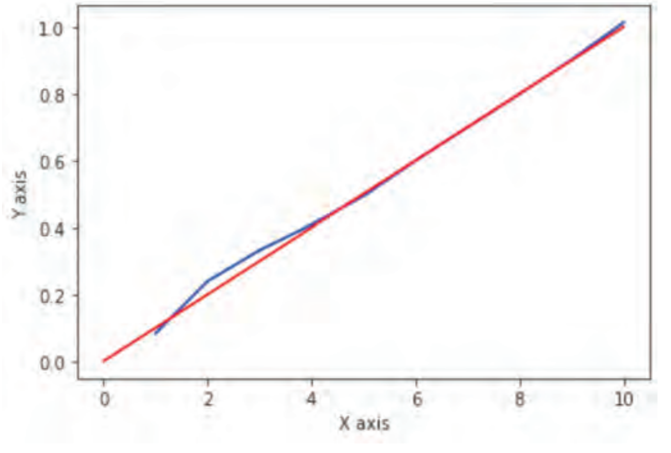

Рисунок 1 – Приближенное и точное решение

Заключение. Использование вейвлетов для решения нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна методом Бубнова-Галеркина, показало достаточно хорошую эффективность. Кроме того, численные расчеты показывают, что применение вейвлетов Лежандра в качестве базисных функций демонстрирует положительный эффект для численного или аналитического вычисления интегралов в вычислительной схеме.

Благодарности. «Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства высшего образования и науки Республики Казахстан (ИРН AP14871252 «Построение и исследование кватернионных преобразований Фурье и их применение в создании информационных систем для задач геофизики и геохимии»).

ЛИТЕРАТУРА

1 Maleknejad K., Sohrabi S. Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using Legendre wavelets // Applied Mathematics and Computation 186 (2007) 836- 843. Doi:10.1016/j/amc/2006.08.023

2 Maleknejad, K. and Karami, M. Numerical solution of non-linear Fredholm integral equations by using multiwavelets in the Petrov–Galerkin method// Appl. Math. Comput., 2005, 168, 102–110.

3 Iqbal J. and Abass R. Numerical Solution of Hammerstein Integral Equation Using Chebyshev Wavelet Method // Journal of Mathematical and Computational Science (2016)

4 Tahami M., AskariHemmat A., Yousefi S.A. Numerical solution of two-dimensional first kind Fredholm integral equations by using linear Legandre wavelet // International Journal of wavelets, Multiresolution and Information Processing. Vol. 14, No.1(2016) 1650004 (20 pages).

5 Di Yuan, Xinming Zhang. An overview of numerical methods for the first kind Fredholm integral equation // SN Applied Sciences (2019) 1:1178/https://doi.org/10.1007/s42452-019-1228-3

6 A. Krisch, An Introduction to the Mathematical Theory of inverse problems, 2nd edn.,Springer – Verlag, New York, 2013.

7 B. Kh. Mousavi, A. Askari Hemmat, and F. Abdollahi. Wilson wavelets based approximation method for solving nonlinear Fredholm-hammerstein integral equations // International Journal of Computer Mathematics, 96(1): 73–84, 2019.

8 L. V. Kantorovich, G. P. Akilov. Funktsionalnyi analiz // M: Nauka, 1977.

9 Maleknejad K, Lotfi T, Mahdiani K (2007) Numerical solution of first kind Fredholm integral equations with wavelets-Galerkin method (WGM) and wavelets precondition//Applied Mathematics and computation. 186 (2007), p. 794–800. Doi: 10.1016/j.amc.2006.08.027

10 Babolian E., Lotfi T., Paripour M. Wavelet moment method for solving Fredholm integral equations of the first kind // Applied Mathematics and Computation. 186(2007), p.1467-1471. doi: 10.1016/j.amc.2006.07.165

11 H.Hosseinzadeh, M.Dehghan, Z.Sedaghatjoo. The stability study of numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind with emphasis on its application in boundary elements method. Applied Numerical Mathematics. 158(2020). p.134-151. doi.org/10.1016/j.apnum.2020.07.011.

12 Temirbekov, N., Temirbekova, L. Using the conjugate equations method for solving inverse problems of mathematical geophysics and mathematical epidemiology// AIP Conference Proceedings, 2021, 2325, 020023

13 Temirbekov N.M., Temirbekova L.N., Nurmangaliyeva M.B. Numerical solution of the first kind Fredholm integral equations by projection methods with wavelets as basis functions // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. - 2022. - Vol. 13, No. 1. - pp. 105-118. URL: http://www.twmsj.az/Files/V.13%20N.1%202022/105-118.pdf

14 Temirbekov N., Imangaliyev Y., Baigereyev D., Temirbekova L., Nurmangaliyeva M. Numerical simulation of inverse geochemistry problems by regularizing algorithms // Cogent Engineering. - 2022. - Vol. 9, No. 1. DOI: 10.1080/23311916.2021.2003522

Д. О. ТАМАБАЙ[1], Н. М. ТЕМИРБЕКОВ[2], С. И. КАБАНИХИН[3], Н. Д. АРЫСТАНБЕК[1]

[1]әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан
[2]ҚР Ұлттық инженерлік академиясы, Алматы, Қазақстан
[3]РҒА СБ Есептеу математикасы және математикалық геофизика институты,Новосибирск, Ресей

ЕКІНШІ ТЕКТІ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ФРЕДГОЛЬМНІҢ ТЕҢДЕУІНІҢ БАЗИСІ ЛЕЖАНДР ВЕЙВЛЕТІ БОЛАТЫН БУБНОВ-ГАЛЕРКИН ӘДІСІМЕН ЖУЫҚТАЛҒАН ШЕШІМІ

Бұл жұмыста екінші текті сызықтық емес Фредгольмнің интегралдық теңдеулерін шешудің жуықталған әдістері бойынша жаңа жұмыстарға шолу жасалды. Лежандр вейвлеттері екінші текті сызықтық емес Фредгольмнің интегралдық теңдеулерін Галеркин-Бубновтың проекциялық әдісімен сандық түрде шешу үшін қолданылады. Сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесі үшін Ньютон-Канторович әдісі қарастырылып, сандық есептеулер жүргізілді.

Жүргізілген салыстырмалы талдау Лежандр вейвлеттері түріндегі негізгі функциялары бар Бубнов-Галеркин әдісі дәлдікке қатысты тиімді және іске асыруға ыңғайлы екенін көрсетеді.

***Түйін сөздер**: екінші текті сызықтық емес Фредгольмнің интегралдық теңдеулері, Лежандр вейвлеті, Галеркин-Бубнов әдісі, Ньютон әдісі.*

D. TAMABAY[1], N. TEMIRBEKOV[2], S. KABANIKHIN[3], N. ARYSTANBEK[1]

[1]al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[2]National engineering academy of RK, Almaty, Kazakhstan

[3]*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS*
Novosibirsk, Russia

APPROXIMATE SOLUTION OF THE NONLINEAR FREDHOLM EQUATION OF THE SECOND KIND BY THE BUBNOV-GALERKIN METHOD WITH BASES IN THE FORM OF LEGENDRE WAVELETS

In this paper, a review of new works on approximate methods for solving nonlinear Fredholm integral equations of the second kind is carried out. Legendre wavelets are used for the numerical solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind by the Galerkin-Bubnov projection method. The Newton-Kantorovich method for a system of nonlinear algebraic equations is considered and numerical calculations are carried out. The comparative analysis shows that the Bubnov-Galerkin method with basic functions in the form of Legendre wavelets is effective in terms of accuracy and convenient to implement.

Key words: *nonlinear Fredholm integral equations of the second kind, Legendre wavelets, Galerkin-Bubnov method, Newton's method.*