УДК 517.957
https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.220

Г. У. УРАЗБОЕВ[1], А. Т. БАЙМАНКУЛОВ[2]*, М. М. ХАСАНОВ[1], Т. А. ЖУАСПАЕВ[3]

[1]Ургенчский государственный университет, Узбекистан,
[2]Костанайский региональный университет им. А.Байтурсынова,
[3]Костанайский инженерно-экономический университет имени М. Дулатова
e-mail: gayrat71@mail.ru, bat_56@ mail.ru, hmuzaffar@mail.ru, g_talgat_a@mail.ru

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА - ДЕ ФРИЗА В ГЕМОДИНАМИКЕ.

В данной работе рассматривается периодическое решение модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза, применяемое для исследований процессов гемодинамики. Показано, что модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза может быть проинтегрировано методом обратной спектральной задачи. Определена эволюция спектральных данных оператора Дирака с периодическим потенциалом, связанного с решением модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. Полученные результаты дают обоснование применимости метода обратной задачи для решения модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза для изучений законов гемодинамики.

Ключевые слова: *нагруженное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, оператор Дирака, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина-Трубовица, формулы следов.*

Введение. Одним из представителей класса, вполне интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, имеющих большое прикладное значение, является модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКдФ). Полная интегрируемость этого уравнения методом обратной задачи, в классе быстроубывающих функций, впервые была установлена в работе М.Вадати [1]. Исследованию уравнения мКдФ в классе конечнозонных функций посвящены работы [2], [3].

В гемодинамике широко применяется модель, в которой артерия описывается в виде тонкостенной, предварительно напряженной упругой трубки с варьируемым радиусом (со стенозом), а кровь рассматривается идеальной жидкостью [4]. Основу модели, реализующую слабые нелинейные волновые процессы в вышеуказанных, заполненных жидкостью упругих трубках, составляет модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза с переменным коэффициентом

$$q_t + \mu_2 q^2 q_x + \mu_3 q_{xxx} + h(t) q_x = 0,$$

где μ_2, μ_3 – коэффициенты, характеризующие параметры материала трубки. t является отмасштабированной координатой вдоль оси сосуда после статической деформации, характеризующей осесимметричный стеноз на поверхности артериальной стенки, x является переменной, зависящей от времени и координаты вдоль оси сосуда, $h(t)$ является формой стеноза, и q характеризует усредненную осевую скорость жидкости.

* E-mail корреспондирующего автора: bat_56@ mail.ru

Постановка задачи. Рассматривается уравнение мКдФ с нагруженным членом

$$q_t = 6q^2 q_x - q_{xxx} + h(t) q_x, \quad t > 0, \quad x \in R, \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x), \tag{2}$$

в классе π - периодических по x функций, с действительными значениями

$$q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \tag{3}$$

здесь $h(t)$ – действительная непрерывная функция. При изучении задачи (1)-(3) используется следующий оператор Дирака

$$Ly \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x) y = \lambda y, \quad x \in R, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Требуется показать процедуру построения решения $q(x, t)$ задачи (1)-(3), в рамках обратной спектральной задачи для уравнения Дирака (4).

Методы и результаты исследования. Обозначим через $c(x,\lambda) = \left(c_1(x,\lambda), c_2(x,\lambda)\right)^T$ и $s(x,\lambda) = \left(s_1(x,\lambda), s_2(x,\lambda)\right)^T$ решения уравнения (4), удовлетворяющие начальным условиям

$$c(0,\lambda) = (1, 0)^T \text{ и } s(0,\lambda) = (0,1)^T .$$

Функцию $\Delta(\lambda) = c_1(\pi,\lambda) + s_2(\pi,\lambda)$ называют функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла для оператора Дирака (4).

Спектр оператора (4) состоит из следующего множества

$$E = \{\lambda \in R: \, -2 \leq \Delta(\lambda) \leq 2\} = R \setminus \left\{ \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\} .$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in Z$ называются лакунами.

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda) = 0$ обозначим через ξ_n , $n \in Z$. Числа ξ_n , $n \in Z$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ для системы (4) и выполняются соотношения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$.

Числа $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$. и знаки $\sigma_n = sign\left\{s_2(\pi,\xi_n) - c_1(\pi,\xi_n)\right\}$, $n \in Z$. называются спектральными параметрами задачи (4). Спектральные параметры ξ_n, σ_n , $n \in Z$. и границы спектра λ_n, $n \in Z$ называются спектральными данными задачи (4). Нахождение спектральных данных задачи (4) называется прямой задачей, а восстановление коэффициентов $q(x)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Если в задаче (4), вместо $q(x)$ рассмотреть $q(x+\tau)$, то спектр полученной задачи не зависит от параметра τ : $\lambda_n(\tau)\equiv\lambda_n$, $n\in Z$, а спектральные параметры зависят от параметра τ : $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n\in Z$. Эти спектральные параметры удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau}=(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},\quad n\in Z.$$

При каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ знак $\sigma_n(\tau)$ – меняется на противоположный.

Система уравнений Дубровина-Трубовица, а также следующие формулы следов

$$q(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n\left(\xi(\tau)\right)$$

дают метод решения обратной спектральной задачи.

Основной результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Пусть $q(x, t)$ решение задачи (1)-(3).Тогда спектр оператора

$$L(t)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\begin{pmatrix}0 & q(x,t)\\ q(x,t) & 0\end{pmatrix}=\lambda y$$

не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t),\ n\in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\dot{\xi}_n(t)=2(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi)\xi_n\{-2[q^2(0,t)+q_x(0,t)]-4\xi_n^2-h(t)\},\ n\in Z, \tag{5}$$

где

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}.$$

Знаки $\sigma_n(t)=\pm1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)\big|_{t=0}=\xi_n^0,\ \ \sigma_n(t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0,\ n\in Z, \tag{6}$$

где ξ_n^0,σ_n^0, $n\in Z$ – спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентом $q_0(x)$.

Доказательство. Обозначим через $\xi_n(t)$, $n\in Z$ собственные значения задачи Дирихле

$$y_1(0)=0,\quad y_1(\pi)=0 \tag{7}$$

для уравнения (4). Пусть $y_n(x,t) = \left(y_{n,1}(x,t),\, y_{n,2}(x,t)\right)^T$, $n \in Z$ ортонормированные собственные вектор-функции задачи Дирихле (4), (7), соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n \in Z$. Не ограничивая общность, можно считать, что собственные вектор-функции $y_n(x,t)$, $n \in Z$ принимают действительные значения.

Дифференцируя по t равенство $\xi_n(t) = (L(t)y_n, y_n)$ и пользуясь симметричностью оператора $L(t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n(t) = (\dot{\Omega}(x,t)y_n, y_n). \tag{8}$$

Используя явный вид скалярного произведения

$$(y,z) = \int_0^\pi [y_1(x)\overline{z}_1(x) + y_2(x)\overline{z}_2(x)]dx, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix},$$

равенство (8) перепишем в виде

$$\dot{\xi}_n(t) = 2\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}\, q_t dx. \tag{9}$$

Подставляя (1) в (9), находим

$$\dot{\xi}_n(t) = 2\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}(6q^2q_x - q_{xxx})dx + 2h(t)\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}q_x\, dx. \tag{10}$$

Прямым вычислением производной показывается, что

$$\{2\xi_n q_x \cdot (y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2) + 2(4\xi_n^2 q + 2q^3 - q_{xx})y_{n,1}y_{n,2} - 2\xi_n(2\xi_n^2 + q^2)\cdot(y_{n,1}^2 + y_{n,2}^2)\}_x =$$

$$= 2y_{n,1}y_{n,2}(6q^2q_x - q_{xxx}).$$

Поэтому

$$2\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}(6q^2q_x - q_{xxx})dx = -2\xi_n[q^2(0,t) + q_x(0,t) + 2\xi_n^2]\cdot[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)]. \tag{11}$$

Теперь вычислим второй интеграл в равенстве (10):

$$2h(t)\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}q_x\, dx = -\xi_n h(t)[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)] \tag{12}$$

Из (10), (11) и (12) выводим, что

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n\sigma_n(t)[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)]\xi_n\{-2[q^2(0,t) + q_x(0,t)] - 4\xi_n^2 - h(t)\}, \; n \in Z. \tag{13}$$

Из равенства

$$\int_0^\pi [s_1^2(x,\lambda,t) + s_2^2(x,\lambda,t)]dx = s_1(\pi,\lambda,t)\cdot\frac{\partial s_2(\pi,\lambda,t)}{\partial\lambda} - s_2(\pi,\lambda,t)\cdot\frac{\partial s_1(\pi,\lambda,t)}{\partial\lambda}$$

находим формулу для нормы собственной вектор-функции $s(x,\xi_n(t),t)$ задачи Дирихле (4), (7), соответствующие собственному значению $\xi_n(t)$:

$$c_n^2(t)=\int_0^\pi [s_1^2(x,\xi_n(t),t)+s_2^2(x,\xi_n(t),t)]dx=-\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}\cdot s_2(\pi,\xi_n(t),t)\ . \quad (14)$$

Используя равенство

$$y_n(x,t)=\frac{1}{c_n(t)}s(x,\xi_n(t),t)$$

и (13), имеем

$$y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)=\frac{s_2^2(\pi,\xi_n(t),t)-1}{c_n^2(t)}=-\frac{s_2(\pi,\xi_n(t),t)-\dfrac{1}{s_2(\pi,\xi_n(t),t)}}{\dfrac{\partial s_1(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}\ . \quad (15)$$

Подставляя значения $x=\pi$ и $\lambda=\xi_n(t)$ в тождество

$$c_1(x,\lambda,t)s_2(x,\lambda,t)-c_2(x,\lambda,t)s_1(x,\lambda,t)=1\ ,$$

находим

$$c_1(\pi,\xi_n(t),t)=\frac{1}{s_2(\pi,\xi_n(t),t)}\ . \quad (16)$$

Учитывая равенство (16) и следующее тождество

$$[c_1(\pi,\lambda,t)-s_2(\pi,\lambda,t)]^2=(\Delta^2(\lambda)-4)-4c_2(\pi,\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)\ ,$$

получим

$$s_2(\pi,\xi_n(t),t)-\frac{1}{s_2(\pi,\xi_n(t),t)}=\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t))-4}\ , \quad (17)$$

где

$$\Delta(\lambda)=c_1(\pi,\lambda,t)+s_2(\pi,\lambda,t)\ ,\ \sigma_n(t)=sign\left\{s_2(\pi,\xi_n(t),t)-c_1(\pi,\xi_n(t),t)\right\}\ .$$

Из (15) и (17) выводим

$$y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)=-\frac{\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t))-4}}{\dfrac{\partial s_1(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}\ . \quad (18)$$

Используя следующие разложения

$$\Delta^2(\lambda)-4=-4\pi^2\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_{2k-1})(\lambda-\lambda_{2k})}{a_k^2},\ \ s_1(\pi,\lambda,t)=\pi\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{a_k}\ ,$$

где $a_0=1$ и $a_k=k$ при $k\neq 0$, равенство (18) можем переписать в следующим в виде:

$$y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)=2(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi)\ . \tag{19}$$

При этом мы воспользовались и равенством

$$sign\left\{-\frac{\pi}{a_n}\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\xi_k-\xi_n}{a_k}\right\}=(-1)^{n-1}\ .$$

Подставляя выражение (19) в тождество (13), выводим (5).

Если заменить граничные условия Дирихле периодическими $y(\pi)=y(0)$ или антипериодическими $y(\pi)=y(0)$ граничными условиями, то вместо уравнения (13) имеем $\dot{\lambda}_n=0$. Значит, собственные значения λ_n, $n\in Z$ периодической и антипериодической задачи не зависят от параметра *t*. **Теорема доказана.**

Следствие 1. Если мы вместо $q(x,\ t)$ рассмотрим $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ, t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ, t : $\xi_n=\xi_n(\tau,t),\ \ \sigma_n=\sigma_n(\tau,t)=\pm1$, $n\in Z$.

В этом случае система (5) примет вид

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\xi_n\{-2[q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)]-4\xi_n^2-h(t)\}\ ,\ n\in Z\ . \tag{20}$$

Здесь

$$s_1(\pi,\lambda,t,\tau)=\pi\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{a_k}\ . \tag{21}$$

Учитывая формулы следов

$$q^2(\tau,t)+q_\tau(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)\right) \tag{22}$$

систему (20) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 2. На основании теоремы получаем метод решения задачи (1)-(3). Для этого сначала найдем спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z$, соответствующие коэффициенту $q_0(x+\tau)$. Далее решаем задачу Коши

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\ \ \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)\ ,\ n\in Z$$

для системы уравнений Дубровина-Трубовица (20). После этого по формуле следов

$$q(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi) \tag{23}$$

определяем $q(x,\ t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. // J. Phys. Soc. Japan, 1972, v. 32, pp. 1681.

2 Итс А.Р. Точное интегрирование в римановых θ -функциях нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. Дисс. канд. физ.-мат. наук, Л.: ЛГУ, 1977.

3 Смирнов А.О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. // Мат. сб., 1994, т. 185, N 8, с. 103-114.

4. Demiray H. Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: Solitary waves // Chaos Soliton Fract. 2009. Vol. 42. No. 1. - P. 358–364.

5 Yakhshimuratov A. B. and Khasanov M. M. Integration of the Modified Korteweg-de Vries Equation with a Self-Consistent Source in the Class of Periodic Functions // ISSN 0012-2661, Differential Equations, 2014, Vol. 50, No. 4, pp. 533–540.

6 Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Метод решения уравнения мКдФ с самосогласованным источником. // Узб. матем. журнал, 2003, N 1, с. 69-75.

7 Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I. // Теория функций, функц. анализ и их прил., 1978, вып. 30, с. 90-101.

REFERENCES

1 Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. // J. Phys. Soc. Japan, 1972, v. 32, pp. 1681.

2 Its A.R. Tochnoe integrirovanie v rimanovyh θ -funkciyah nelinejnogo uravneniya SHredingera i modificirovannogo uravneniya Kortevega-de Friza. Diss. kand. fiz.-mat. nauk, L.: LGU, 1977.

3 Smirnov A.O. Ellipticheskie resheniya nelinejnogo uravneniya SHredingera i modificirovannogo uravneniya Kortevega-de Friza. // Mat. sb., 1994, t. 185, N 8, s. 103-114.

4 Demiray H. Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: Solitary waves // Chaos Soliton Fract. 2009. Vol. 42. No. 1. - P. 358–364.

5 Yakhshimuratov A. B. and Khasanov M. M. Integration of the Modified Korteweg-de Vries Equation with a Self-Consistent Source in the Class of Periodic Functions // ISSN 0012-2661, Differential Equations, 2014, Vol. 50, No. 4, pp. 533–540.

6 Hasanov A.B., Urazboev G.U. Metod resheniya uravneniya mKdF s samosoglasovannym istochnikom. // Uzb. matem. zhurnal, 2003, N 1, s. 69-75.

7 Misyura T.V. Harakteristika spektrov periodicheskoj i antiperiodicheskoj kraevyh zadach, porozhdaemyh operaciej Diraka I. // Teoriya funkcij, funkc. analiz i ih pril., 1978, vyp. 30, s. 90-101.

Г. У. УРАЗБОЕВ[1], А. Т. БАЙМАНКУЛОВ[2], М. М. ХАСАНОВ[1], Т. А.ЖУАСПАЕВ[3]

[1]Ургенч мемлекеттік университеті· Өзбекстан,
[2]А. Байтұрсынов атындағы Қостанай өңірлік университеті,
[3]М. Дулатов атындағы Қостанай инженерлік-экономикалық университеті

ГЕМОДИНАМИКАДАҒЫ МОДИФИКАЦИЯЛАНҒАН КОРТЕВЕГ – ДЕ ФРИЗ ТЕҢДЕУІНІҢ ПЕРИОДТІ ШЕШІМДЕРІ

Бұл жұмыс гемодинамика процестерін зерттеу үшін қолданылатын модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуінің мерзімді шешімін қарастырады. Кортевег-де Фриздің өзгертілген теңдеуін кері спектрлік есеп әдісімен интегралдауға болатындығы көрсетілген. Модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуін шешумен байланысты периодтық потенциалы бар Дирак операторының спектрлік деректерінің эволюциясы анықталды. Нәтижелер гемодинамика заңдарын зерттеу үшін өзгертілген Кортевег-де Фриз теңдеуін шешу үшін кері есеп әдісінің қолданылуын негіздейді.

***Түйін сөздер**: жүктелген модификацияланған Кортевега-де Фриз теңдеуі, Дирак операторы, кері спектрлік есеп, Дубровин-Трубовиц теңдеулер жүйесі, із формулалары.*

G. U. URAZBOEV[1], A. T. BAIMANKULOV[2], M. M. HASANOV[1], T. A. ZHUASPAYEV[3]

Urgench State University[1] (Uzbekistan),
Kostanay Regional University named after A.Baitursynov[2],
Kostanay Engineering and Economics University named after M. Dulatov[3]

PERIODIC SOLUTIONS OF THE MODIFIED KORTEWEG–DE VRIES EQUATION IN HEMODYNAMICS.

In this paper, we consider the periodic solution of the modified Korteweg-de Vries equation used for studies of hemodynamic processes. It is shown that the modified Korteweg-de Vries equation can be integrated by the inverse spectral problem method. The evolution of the spectral data of the Dirac operator with a periodic potential associated with the solution of the modified Korteweg-de Vries equation is determined. The obtained results substantiate the applicability of the inverse problem method for solving the modified Korteweg-de Vries equation for studying the laws of hemodynamics.

***Keywords**: loaded modified Korteweg-de Vries equation, Dirac operator, inverse spectral problem, Dubrovin-Trubovitz equation system, trace formulas.*