УДК 517; 514.8
https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.222

Қ. А. ДОСМАҒҰЛОВА, Е. К. АШИМОВ, Ж. Х. ЖУНУСОВА*, Х. НУРИ

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қаласы
e-mails: karlygash.dosmagulova@gmail.com, yeskendyr@gmail.com, zhzh@kaznu.kz

ҮШБҰРЫШТЫ ҚАПТАМАНЫҢ ҮШ ТҮРЛІ ӨЛШЕМДІ ШЕҢБЕРІНІҢ МИНИМАЛДЫ ТЫҒЫЗДЫҒЫ

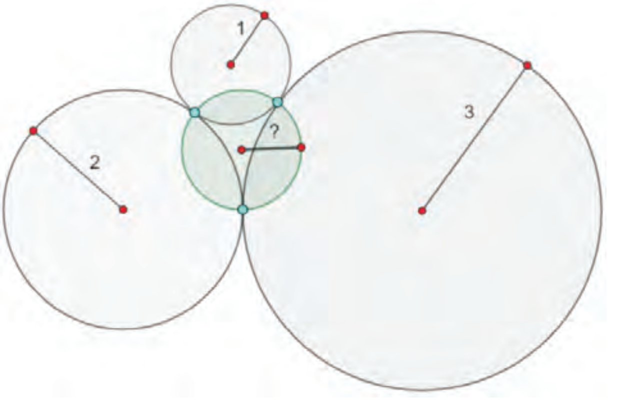
Мақалада дискілерді қаптау тығыздығының минимумы мен максимумын анықтауға бағытталған зерттеу нәтижелері келтірілген. Тордағы өлшемдері үш түрлі дискілерді қаптау тығыздығының минимумы мен максимумын анықталды. Минималды тығыздық шеңбер секторларының тордағы үшбұрыштың барлық бөлігіне қатынасынан алынды. Үшбұрышты қаптаманың минималды және максималды тығыздығын табу үшін Герон формуласы қолданылады. Үш өзара жанама шеңберлер және үшбұрышты қаптаманың минималды тығыздығы үш шеңбердің орталықтарын біріктіруден пайда болған үшбұрыштың диаграммасы құрастырылды.

***Түйін сөздер**: үшбұрышты қаптама, тығыздық, минималды тығыздық, диск, шеңбер.*

Кіріспе. Дискінің қаптамасы ықшам немесе үшбұрышты деп аталады, егер оның контактілі графы үшбұрышты болса, яғни әрбір қабырғалас дискінің орталықтарын қосу арқылы құрылған граф тек үшбұрышты беттерден тұрады. Қаптаманың тығыздығы δ, дискілер аудандарының қосындысының тор ауданына бөлінген қатынасы.

Үш түрлі өлшемді дискілердің қаптамалары сандар теориясында, түйіршікті материалдарда, алгебралық сандар теориясында өте маңызды. Мұнда Герон формуласы да маңызды және оларды талдау үшін пайдалы құралдарды қамтамасыз ете алады, атап айтқанда, үшбұрышты қаптаманың минималды және максималды тығыздығын табу үшін қолданылады.

Бір-біріне жанама үш шеңбер. Радиустары 1,2 және 3 үш шеңбер бір-біріне жанама, біз жанама нүктелер арқылы өтетін шеңбердің радиусын табамыз, әдеттегідей, жалғастырмас бұрын мәселені шешуге тырысамыз.



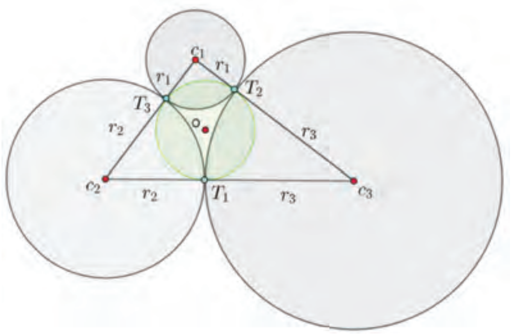
1-сурет

---

* E-mail корреспондирующего автора: zhzhkh@mail.ru

Енді біз есептің дұрыс сызбасын жасай аламыз, сондықтан бізде центрлері c_1, c_2, c_3 бар және бір-біріне жанама орналасқан үш шеңбер бар, центрлері үшбұрышты құрайды $\Delta c_1c_2c_3$. Біз бұрын байқағанымыздай, жанама нүктелер T_1, T_2 және T_3. r_1, r_2 және r_3 радиустардың мәндері болсын, T_2 және T_3 нүктелері бірінші шеңберде жатсын,сондықтан $c_1T_2 = c_1T_3 = r_1$. Басқа шеңберлер үшін ұқсас теңдеулерді жазуға болады

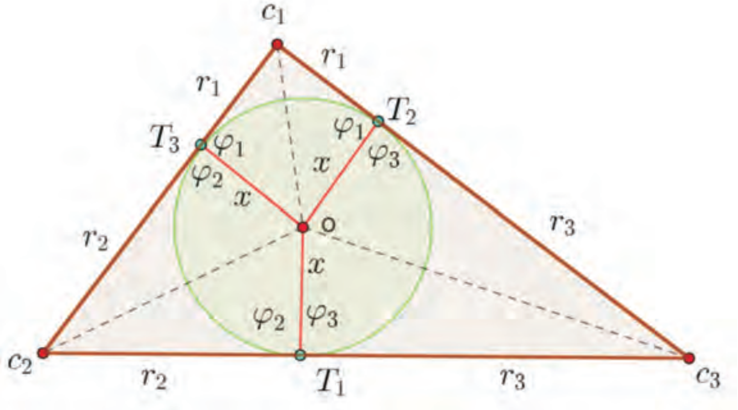
$$c_2T_1 = c_2T_3 = r_2, \quad c_3T_1 = c_1T_2 = r_3.$$



2-сурет

Іштей сызылған шеңбердің радиусын табу. Енді біз шеңберлерді алып тастай аламыз, өйткені олар енді қажет емес.

Мақсатымыз T_1, T_2 және T_3 нүктелері арқылы өтетін жасыл шеңбердің радиусын табу.



3-сурет

Жасыл шеңбердің центрі *o* және *x* оның радиусының мәні болсын, oT_1, oT_2 және oT_3 кесінділерді сызамыз. Бұл кесінділер жасыл шеңбердің радиустары, сондықтан олардың ұзындықтары *x*-ке тең.

$$|oT_1| = |oT_2| = |oT_3| = x.$$

Үшбұрыштарды қарастырайық $\Delta c_1 oT_2$ және $\Delta c_1 oT_3$, олардың екі жұп қабырғалары тең:

$$|c_1T_2| = |c_1T_3| = r_1, \ \ |oT_2| = |oT_3| = x.$$

$\overline{c_1 o}$ осы үшбұрыштардың ортақ қабырғасы болып табылады, сондықтан үшбұрыштар үш қабырғасына тең, одан шығатын бұрыш $\angle oc_1T_2$ тең бұрышқа $\angle oc_1T_3$, яғни бұл $\overline{c_1 o}$ келесі $\angle c_1c_2c_3$ бұрыштың биссектрисасы болып табылады. Тағы бір тең бұрыштар жұбы $\angle oT_3c_1 = \angle oT_2c_1.$ Сол бұрыштардың мәні φ_1 болсын.

$$\angle oT_3c_1 = \angle oT_2c_1 = \varphi_1 \ .$$

Солсияқтытұжырымдыдәлелдейміз $\Delta c_2 oT_1 = \Delta c_2 oT_3,$ бұдантұжырымдайтынымыз $\angle oc_2T_3,$ басқа сөзбен айтқанда $\overline{c_2 o}$ келесі бұрыштың $\angle c_1c_2c_3$ биссектрисасы.

Біз бұл *o* үшбұрыштың $\Delta c_1c_2c_3$ екі биссектрисасы түйіскен нүкте екенін анықтадық, сондықтан *o* үшбұрыштың центрі. Бұл жасыл шеңбер үшбұрыштың $\Delta c_1c_2c_3$ сызылған шеңбері болуы мүмкін екенін көрсетеді. Дегенмен, центрі *o*-де болатын шеңберлердің саны шексіз, сондықтан жасыл шеңбердің сызылған шеңбер екені анық емес. Басқа тең бұрыштар жұбы $\angle oT_1c_2 = \angle oT_3c_2$, бұл мән φ_2 болады.

$$\angle oT_1c_2 = \angle oT_3c_2 = \varphi_2$$

Сонымен, үшбұрыш $\Delta c_3 oT_1 = \Delta c_3 oT_2$ екенін дәлелдейміз. $\angle c_1c_2c_3$ бұрыштың биссектрисасын $\overline{c_3 o}$ аламыз. Бұл шын мәнінде артық, өйткені біз бұл *o* нүкте $\Delta c_1c_2c_3$ үшбұрыштың центрі екенін білеміз. Дегенмен, пайдалы тең бұрыштардың тағы бір жұбы бар $\angle oT_1c_3 = \angle oT_2c_3$ және бұл мән φ_3 болады.

$$\angle oT_1c_3 = \angle oT_2c_3 = \varphi_3 \ .$$

Яғни, $\Delta c_1c_2c_3$ үшбұрыштың центрі *o* екені дәлелденді.

Үшбұрыштың сызылған шеңбері. Енді біз жасыл шеңбердің шын мәнінде $\Delta c_1c_2c_3$ үшбұрыштың сызылған шеңбері екенін дәлелдейміз.

Осы мақсатта біз бұрын енгізілген φ_1, φ_2 және φ_3 бұрыштарды қолданамыз. T_1 жақын бұрыштарды қарастырамыз. φ_2 және φ_3 бұрыштар бірге түзу бұрыш құрайды, сонымен $\varphi_2 + \varphi_3 = 180^\circ$. Сол сияқты, T_2 үшін $\varphi_1 + \varphi_3 = 180^\circ$, және T_3 үшін $\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$ аламыз.

Біз теңдеулеріндегі әрбір бұрыштың екі рет көрінетінін байқаймыз, сондықтан барлық теңдеулерді қоссақ, $2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = 540^\circ$ аламыз, демек $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 270^\circ$. Енді барлық бұрыштардың қосындысынан қалған бұрыштардың қосындысын алып тастау арқылы φ_1 мәнін алуға болады.

$$\varphi_1 = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - (\varphi_2 + \varphi_3)$$

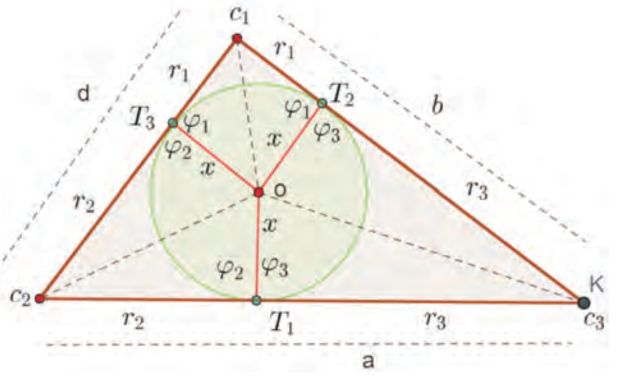
Және $\varphi_1 = 90^\circ$ аламыз, $\varphi_2 = 90^\circ$ және $\varphi_3 = 90^\circ$ бірдей мәнге ие болады.

Бұл $\Delta c_1c_2c_3$ үшбұрыштың oT_1, oT_2 oT_3 радиустары сәйкес қабырғаларына перпендикуляр екенін білдіреді.

$$oT_1 \perp c_2c_3,\quad oT_2 \perp c_1c_3,\quad oT_3 \perp c_1c_2$$

Сондықтан үшбұрыштың барлық қабырғалары c_1, c_2 және c_3 шеңберге жанама болады, бұл жасыл шеңбер $\Delta c_1c_2c_3$ үшбұрыштың шеңбері екенін білдіреді.

Үшбұрыштың $\Delta c_1c_2c_3$ қабырғаларының ұзындықтары a, b және болсын d болсын.



4-сурет

Үшбұрыш үшін шеңбер радиусын бағалаудың қарапайым формуласы бар: $x = \dfrac{A}{s}$, мұндағы үшбұрыштың ауданы $\Delta c_1c_2c_3$, жартылай периметр: $s = \dfrac{a+b+d}{2}$.

Үшбұрыштың ауданын есептеу үшін Герон формуласын қолданамыз

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$$

Сонымен, Герон формуласынан ауданды радиус теңдеуіне ауыстырамыз.

$$x = \frac{A}{s} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-d)}{s^2}}$$

квадрат түбірдің астына s жылжытсақ, s алыммен бірге азаяды және шеңбер радиусының формуласын аламыз

$$x = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-d)}{s}}$$

Енді үшбұрыштың қабырғаларын радиустар r_1, r_2 және r_3 арқылы өрнектеуіміз керек. Оны оңай көруге болады $a = r_2 + r_3$, $b = r_1 + r_3$, $d = r_1 + r_2$.

Содан кейін біз жарты периметрді бағалаймыз, мұнда әрбір радиус екі рет пайда болады, содан кейін 2 факторлар жойылады және біз тек радиустардың қосындысын аламыз.

$$s = \frac{(r_2 + r_3) + (r_1 + r_3) + (r_1 + r_2)}{2} = \frac{2(r_1 + r_2 + r_3)}{2} = r_1 + r_2 + r$$

Әрі қарай Герон формуласындағы басқа факторларды бағалаймыз:

$$s - a = (r_1 + r_2 + r_3) - (r_2 + r_3)$$

$s - a$ үшін радиустар жойылады және біз жай ғана r_1 аламыз:

$$s - a = (r_1 + r_2 + r_3 - r_2 - r_3) = r_1$$

Дәл осылай $s - b = r_2$, $s - d = r_3$ және жасыл шеңбердің радиусының соңғы формуласы

$$x = \sqrt{\frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}}.$$

Радиустың формуласында $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ ауыстырсақ:

$$x = \sqrt{\frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}} = \sqrt{\frac{1 \times 2 \times 3}{1 + 2 + 3}} = 1 .$$

Дегенмен, бұл нақты жағдайда біз Герон формуласын қолданбаймыз. Үшбұрыштың қабырғаларын есептеу мынаны береді: $a = r_2 + r_3 = 2 + 3 = 5$, $b = r_1 + r_3 = 1 + 3 = 4$ және $d = r_1 + r_2 = 1 + 2 = 3$.

Бұл тік бұрышты үшбұрыш болып табылатын әйгілі Египет үшбұрышы. Демек, аудан қабырғалардың жарты көбейтіндісі ғана, ол 6,

$$A = \frac{1}{2} bd = \frac{3 \times 4}{2} = 6 .$$

Жартылай периметр үшін де біз 6 аламыз.

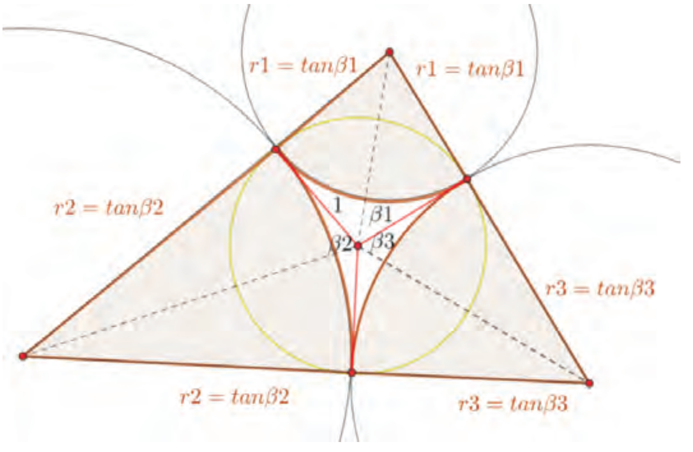
$$s = \frac{a + b + d}{2} = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6 .$$

Демек, радиус қайтадан 1-ге тең.

$$x = \frac{A}{s} = \frac{6}{6} = 1.$$

Негізгі нәтиже.

Минималды және максималды тығыздық. Егер барлық дискілердің барлық радиустары тең болса, онда біз барлық үшбұрышты қаптамалардың тығыздығы минималды екенін көрсетеміз.



5-сурет

5-суретте үш өзара жанама шеңберлер және үш шеңбердің центрлерін қосудан пайда болған үшбұрыш диаграммасы көрсетілген. Сондай-ақ үшбұрыштың бұрышының биссектрисалары (үзік көк) және оның іштей сызылған шеңбері (тұтас жасыл) бар.

Шеңбердің радиусы 1-ге тең, өйткені үшбұрыш нормаланған. Қызыл кесінділерге көрсетілген шеңбердің радиустары үшбұрышының қабырғаларына ортогональ. Биссектрисалар арасындағы бұрыштар төмендегідей көрсетілген β_1, β_2 және β_3 және іргелес қызыл сегмент және әрқайсысы $\tan\beta_i = r_i$, i-ші радиусы. Үшбұрыштағы қаптаманың тығыздығы, $\delta(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, сұр аймақтың бүкіл үшбұрыштың ауданына қатынасы. Үш шеңбердің радиустары тең болғанда, δ минималды болады. Біз оны келесідей көрсетеміз:

Сұр секторлар бірлестігінің ауданы $A(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 5-суреттегідей болсын:

$$A_1(\beta_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) r_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) r_1^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) r_1^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) \tan^2(\beta_1),$$

$$A_2(\beta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) r_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) r_2^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) r_2^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) \tan^2(\beta_2),$$

$$A_3(\beta_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_3\right) r_3^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_3\right) r_3^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \beta_3\right) r_3^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \beta_3\right) \tan^2(\beta_3).$$

$$\begin{aligned} A(\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= A_1(\beta_1) + A_2(\beta_2) + A_3(\beta_3) \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)\tan^2(\beta_1) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right)\tan^2(\beta_2) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta_3\right)\tan^2(\beta_3) \end{aligned} \quad (1)$$

Тікбұрышты үшбұрыштың екі еселенген қабырғасының ұзындығы 1, ал сол бірлік ұзындығына іргелес β бұрышы $\tan(\beta)$. Суреттегідей үшбұрыштың ауданы $S(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ болсын. Оның ауданы алты кіші тікбұрышты үшбұрыштардың аудандарының қосындысы, сондықтан

$$S_1 = \frac{1}{2} r_1 \cdot 1 + \frac{1}{2} r_1 \cdot 1 = r_1 \cdot 1 = \tan\beta_1 \cdot 1 = \tan\beta_1,$$
$$S_2 = \frac{1}{2} r_2 \cdot 1 + \frac{1}{2} r_2 \cdot 1 = r_2 \cdot 1 = \tan\beta_2 \cdot 1 = \tan\beta_2,$$
$$S_3 = \frac{1}{2} r_3 \cdot 1 + \frac{1}{2} r_3 \cdot 1 = r_3 \cdot 1 = \tan\beta_3 \cdot 1 = \tan\beta_3.$$

S_1, S_2, S_3 қосындысын аламыз,

$$S(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = S_1 + S_2 + S_3 = \tan(\beta_1) + \tan(\beta_2) + \tan(\beta_3) \tag{2}$$

Демек, үшбұрыштың жабылған бөлігінің тығыздығы суреттегідей

$$\delta(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{A(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{S(\beta_1, \beta_2, \beta_3)} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)\tan^2(\beta_1) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right)\tan^2(\beta_2) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta_3\right)\tan^2(\beta_3)}{\tan(\beta_1) + \tan(\beta_2) + \tan(\beta_3)} \tag{3}$$

Мұнда біз $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$ және әрқайсысын $0 < \beta_i < \frac{\pi}{2}$ деп бұрыштар суреттің жағдайынан келетіндей етіп қабылдаймыз.

Теорема. δ-ның минималды мәні $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ болып табылады және

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{\pi}{3}$$

болғанда ғана табылады.

Дәлелдеу. Біз (3) формуласын қолданамыз және аламыз.

$$\delta(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)\tan^2(\beta_1) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right)\tan^2(\beta_2) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta_3\right)\tan^2(\beta_3)}{\tan(\beta_1) + \tan(\beta_2) + \tan(\beta_3)}$$

$$\delta = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\tan^2(\frac{\pi}{3}) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\tan^2(\frac{\pi}{3}) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\tan^2(\frac{\pi}{3})}{\tan(\frac{\pi}{3}) + \tan(\frac{\pi}{3}) + \tan(\frac{\pi}{3})}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^2 + \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^2 + \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

Шеңберлер $\tan\beta_i$ біздің нормалау үшін тең болсын, сонда бұл минималды тығыздық алынады. Есептеулерді жеңілдету үшін біз ең төменгі тығыздықты тікелей есептеудің орнына қосымша максималды тығыздықты есептей аламыз.

$$\bar{\delta} = 1 - \delta = \frac{S(\beta_1, \beta_2, \beta_3) - A(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{S(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}.$$

Сонымен, біз үшбұрышты қаптамада минималды және максималды тығыздықты алдық.

Қорытынды. Біз бір-біріне жанама үш шеңберді зерттеп, сызылған шеңбердің радиусын және үшбұрыштың сызылған шеңберін таптық**.** Біз 1,2 және 3 радиустары бар үш шеңбердің диаграммасын салдық, содан кейін есептің дұрыс сызбасын жасадық, біз шеңберлерді алып тастадық, өйткені олар қажет емес болады. Біз жасыл шеңбердің шын мәнінде үшбұрыштың шеңбері екенін көрсеттік: $\Delta c_1 c_2 c_3$. Сонымен қатар, біз іштей сызылған шеңбердің радиусы 1 екенін дәлелдедік.

Нәтижелерді қорытындылау және оларға жалпы шолу жасау үшін біз үш өзара жанама шеңберлер және үшбұрышты қаптаманың минималды тығыздығы үш шеңбердің орталықтарын біріктіруден пайда болған үшбұрыштың диаграммасын құрастырдық.

Үшбұрыштағы қаптаманың тығыздығын алу үшін біз сұр секторлардың $A(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ қосылу ауданын және нормаланған үшбұрыштың ауданын есептедік: $S(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Сондықтан (3) формулалар біз үшбұрыштың жабылған бөлігінің тығыздығын 5-суреттегіндей алдық.

Кейбір жағдайларда барлық үшбұрышты қаптамалардың минималды тығыздығын дискілердің радиустары тең болған кезде жасай аламыз. Сонымен, $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ шамасы δ-ның минималды мәні болып табылады және тек $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{\pi}{3}$ болғанда алынады.

Бұл жұмысқа Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрліктің Ғылым комитеті қолдау көрсетті (грант №AP08856381).

ӘДЕБИЕТ

1 Роберт Коннелли және Морис Пьер, Ұшақта максималды тығыз диск орауыштары. Корнелл университеті, Колумбия, 2021 ж.

2 Томас Ферник, Амир Хашеми және Ольга Сизова. Үш өлшемді дискілері бар ұшақтың ықшам қаптамалары / Дискретті есептеу. Геом., 2021.– V. 66,– No.2 -p.613-635.

3 Аладар Геппес. Ұшақтағы ең тығыз екі өлшемді диск орауыштары. / Дискретті есептеу. Геом., 2003.– V. 30,– No.2 -p.241-262. Дискретті геометрия және дөңестік АҚШ-Венгрия семинарлары (Будапешт, 1999/Оберн, AL, 20.

4 Том Кеннеди. Екі өлшемді дискілері бар ұшақтың ықшам қаптамалары / Дискретті есептеу. Геом., 2006.– V. 35,– No.2 -p.255-267.

5 J.R. Carlson, Determination of Heronian triangles / Fibonnaci Quarterly, 1970.– No.8 -p.499-506.

6 G. Blind және R. Blind, Дөңес жиынтықтағы тең емес шеңберлердің орамдары / Дискретті есептеу. Геом., 2002.– V. 28,– No.2 -p.115-119.

7 Л. Фежес T´oth, Сәйкес келмейтін шеңберлермен орау және жабу үшін кейбір тығыздық шектеулері / Studia Sci. Математика. Венгрия, 1980.– V. 15,– No.2 -p.63-70.

8 Миек Мессершмидт. Үш радиусты шеңберлері бар ұшақтың ықшам қаптамалары / Есептеу. Геом., 2020.– V. 17 86:101564

REFERENCES

1 Robert Konnelli zhəne Moris P'er, Ұshaқta maksimaldy tyғyz disk orauyshtary. Kornell universiteti, Kolumbiya, 2021 zh.

2 Tomas Fernik, Amir Hashemi zhəne Ol'ga Sizova. Үsh əlshemdi diskileri bar ұshaқtyң yқsham қaptamalary / Diskretti esepteu. Geom., 2021.– V. 66,– No.2 -p.613-635.

3 Aladar Geppes. Ұshaқtaғy eң tyғyz eki өlshemdi disk orauyshtary. / Diskretti esepteu. Geom., 2003.– V. 30,– No.2 -p.241-262. Diskretti geometriya zhәne dөңestik AҚSH-Vengriya seminarlary (Budapesht, 1999/Obern, AL, 20.

4 Tom Kennedi. Eki өlshemdi diskileri bar ұshaқtyң yқsham қaptamalary / Diskretti esepteu. Geom., 2006.– V. 35,– No.2 -p.255-267.

5 J.R. Carlson, Determination of Heronian triangles / Fibonnaci Quarterly, 1970.– No.8 -p.499-506.

6 G. Blind zhәne R. Blind, Dөңes zhiyntyқtaғy teң emes sheңberlerdiң oramdary / Diskretti esepteu. Geom., 2002.– V. 28,– No.2 -p.115-119.

7 L. Fezhes T´oth, Sәjkes kelmejtin sheңberlermen orau zhәne zhabu үshin kejbir tyғyzdyқ shekteuleri / Studia Sci. Matematika. Vengriya, 1980.– V. 15,– No.2 -p.63-70.

8 Miek Messershmidt. Ysh radiusty sheңberleri bar ұshaқtyң yқsham қaptamalary / Esepteu. Geom., 2020.– V. 17 86:101564

К. А. ДОСМАГУЛОВА, Е. К. АШИМОВ, Ж. Х. ЖУНУСОВА, Х. НУРИ

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы
e-mails: karlygash.dosmagulova@gmail.com, yeskendyr@gmail.com, zhzh@kaznu.kz

МИНИМАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ТРЕХ РАЗНЫХ РАЗМЕРНЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ УПАКОВКИ

Представлены результаты исследования по определению минимальной и максимальной плотности упаковки дисков. Определены минимальная и максимальная плотности упаковки дисков трех различных размеров в торе. Минимальная плотность получена из отношения секторов круга ко всем частям треугольника в торе. Использована формула Герона для нахождения минимальной и максимальной плотности треугольной упаковки. Приведена диаграмма треугольника, образованного совмещением центров трех окружностей трех взаимно касательных окружностей и минимальной плотности треугольной упаковки.

***Ключевые слова**: треугольная упаковка, плотность, минимальная плотность, диск, круг.*

K. A. DOSMAGULOVA, E. K. ASHIMOV, ZH. KH. ZHUNUSSOVA, H. NOORI

Al-Farabi Kazakh national university, Almaty
e-mails: karlygash.dosmagulova@gmail.com, yeskendyr@gmail.com, zhzh@kaznu.kz

MINIMUM DENSITY OF TRIANGULATED PACKING'S THREE DIFFERENT SIZE CIRCLES

The results of a study to determine the minimum and maximum packing density of disks are presented. The minimum and maximum packing densities of disks of three different sizes on a torus are determined. The minimum density is obtained from the ratio of the sectors of the circle to all parts of the triangle on the torus. Heron's formula is used to find the minimum and maximum density of triangular packing. A diagram of a triangle formed by combining the centers of three circles of three mutually tangent circles and the minimum triangular packing density is given.

***Keywords**: triangular packing, density, minimum density, disk, circle.*