

М. Д. КОШАНОВА*, **М. А. МУРАТБЕКОВА**, **Б. Х. ТУРМЕТОВ**

МКТУ им. К.А.Ясави, Туркестан, Казахстан

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе в прямоугольной области рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных с инволютивно преобразованными аргументами. Рассматриваемое уравнение является нелокальным аналогом уравнения гиперболического типа второго порядка. К этому уравнению ставятся начально-краевые условия, причем порядок граничных операторов превосходит порядок уравнения. Исследуются вопросы корректности рассматриваемой задачи. Для решения поставленной задачи применяется метод Фурье, т.е. метод разделения переменных. Изучаются свойства собственных функций и собственных значений соответствующей спектральной задачи. Для рассматриваемой основной задачи доказаны теоремы о единственности и существования решения. При доказательстве теоремы о единственности решения исследуемая задача сводится к двум вспомогательным, однородным начально-краевым задачам для классического уравнения гиперболического типа. Полученные уравнения зависят от коэффициентов основного уравнения и для них налагаются определенные условия. Далее, используя полноту собственных функций вспомогательной спектральной задачи, решение основной задачи ищется в виде ряда по этой системе. Для неизвестных коэффициентов ряда получается система обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями высокого порядка. Решая эти задачи, находим явный вид решения исследуемой основной задачи.

Ключевые слова: нелокальное уравнение, гиперболическое уравнение, оператор высшего порядка, метод Фурье, инволюция, единственность решения, существование решения.

Введение. По классификации приведенной в книге А.М.Нахушева [1], к нелокальным уравнениям относятся уравнения, в которых неизвестная функция и ее производные входят, вообще говоря, при различных значениях аргументов. Среди нелокальных дифференциальных уравнений особое место занимают уравнения, в которых отклонение аргументов имеет инволютивный характер. Отображение I принято называть (инволюцией) если $I^2 = E$, E – тождественное отображение. Теория уравнений с инволютивно преобразованными аргументами и их приложения подробно описаны в монографиях [2,3]. К настоящему моменту для дифференциальных уравнений с различными видами инволюции достаточно хорошо изучены корректность краевых и начально-краевых задач, качественные свойства решений и спектральные вопросы [4 – 13].

Пусть $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < p, 0 < t < T\}$, a_0, a_1 – некоторые действительные числа. Рассмотрим в области Ω следующую задачу

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - a_1 \frac{\partial^2 u(p - x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(p, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

* E-mail корреспондирующего автора: maira.koshanova@ayu.edu.kz

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = \varphi_k(x), \frac{\partial^{k+1} u(x,0)}{\partial t^{k+1}} = \psi_k(x), 0 \leq x \leq p, \quad (3)$$

где $k \geq 1$, $f(x,t)$, $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ заданные функции.

В дальнейшем будем считать, что a_0 и a_1 одновременно не обращаются в нуль.

Задача (1)-(3) в случае $a_0 = 1, a_1 = 0$ исследована в работе [14]. Отметим также, что вопросы разрешимости краевых и начально-краевых задач с граничными операторами высокого порядка изучены в работах [15-17].

2. Исследование единственности решения задачи. В этом пункте мы исследуем единственность решения задачи (1)-(3). Рассмотрим следующую вспомогательную задачу

$$v_{tt}(x,t) = \varepsilon v_{xx}(x,t) + g(x,t), (x,t) \in \Omega \quad (4)$$

$$v(0,t) = v(p,t) = 0, 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

$$v_t^{(k)}(x,0) = \varphi(x), v_t^{(k+1)}(x,0) = \psi(x), 0 \leq x \leq p. \quad (6)$$

Задача (4) – (6) в случае $\varepsilon = 1$ изучена в работе [14]. Используя методику этой работы, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. Если $\varepsilon > 0$ и решение задачи (4) – (6) существует, то оно единственно.

Используя это утверждение, докажем единственность решения задачи (1) – (3). Обозначим $\varepsilon_1 = a_0 + a_1$, $\varepsilon_2 = a_0 - a_1$.

Теорема 1. Если $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ и решение задачи (1) – (3) существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ является решением однородной задачи (1) – (3). Из уравнения (1) следует, что для всех $(x, t) \in \Omega$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - a_1 \frac{\partial^2 u(p-x,t)}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u(p-x,t)}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 u(p-x,t)}{\partial x^2} - a_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [u(x,t) + u(p-x,t)] - \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(x,t) + u(p-x,t)] = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [u(x,t) - u(p-x,t)] - \varepsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(x,t) - u(p-x,t)] = 0 \quad (8)$$

Обозначим

$$u^+(x,t) = u(x,t) + u(p-x,t), u^-(x,t) = u(x,t) - u(p-x,t).$$

Так как функция $u(x,t)$ удовлетворяет однородным условиям (2) и (3), то этим же условиям удовлетворяют функции $u^+(x,t)$ и $u^-(x,t)$. Кроме того, из равенств (7) и (8)

получаем, что функции $u^+(x, t)$ и $u^-(x, t)$ удовлетворяют и однородному уравнению (4) с $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$ соответственно.

Следовательно, функции $u^+(x, t)$ и $u^-(x, t)$ удовлетворяют однородным условиям задачи (4) – (6). Тогда по утверждению леммы $1 u^+(x, t) = u^-(x, t) \equiv 0, (x, t) \in \bar{\Omega}$. Так как $u(x, t) = \frac{1}{2} [u^+(x, t) + u^-(x, t)]$, то $u(x, t) \equiv 0, (x, t) \in \bar{\Omega}$. Таким образом, решение задачи (1) – (3) единственно. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 0$, то можно показать, что однородная задача (1) - (3) имеют ненулевые решения.

3. Существование решение. Переходим к изучению существования решения задачи (1) – (3). Пусть $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x, \lambda_n = \frac{n\pi}{p}, n = 1, 2, \dots$. Известно, что $X_n(x)$ является полной и ортонормированной системой в пространстве $L_2(0, p)$ и для них справедливы равенства

$$X_n(p-x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n(p-x) = -\sqrt{\frac{2}{p}} \cos n\pi \sin \frac{n\pi}{p} x = (-1)^{n+1} X_n(x).$$

Решение задачи (1) – (3) будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{9}$$

где $u_n(t)$ – неизвестные коэффициенты. Из равенства (9) следует

$$u(p-x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(p-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n(t) X_n(p).$$

Функции $f(x, t), \varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ представим в виде ряда Фурье по функциям $X_n(x)$, т.е.

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \tag{10}$$

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn} X_n(x), \tag{11}$$

$$\psi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{kn} X_n(x), \tag{12}$$

где

$$f_n(t) = \int_0^p f(x, t) X_n(x) dx, \quad \varphi_{kn} = \int_0^p \varphi_k(x) X_n(x) dx, \quad \psi_{kn} = \int_0^p \psi_k(x) X_n(x) dx.$$

Далее, дифференцируя формально ряд (9) по переменной t и по x дважды, получаем

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x), \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n(t) X_n(x),$$

$$\frac{\partial^2 u(p-x,t)}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \lambda_n^2 u_n(t) X_n(x).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим

$$0 = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - a_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x) + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n(t) X_n(x) +$$

$$+ a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \lambda_n^2 u_n(t) X_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n''(t) + \theta_n^2 u_n(t) - f_n(t)] X_n(x),$$

где $\theta_n^2 = (a_1 + (-1)^{n+1} a_1) \lambda_n^2$.

Отсюда в силу полноты системы $X_n(x)$ получаем

$$u_n''(t) + \theta_n^2 u_n(t) - f_n(t) = 0, n = 1, 2, \dots \tag{13}$$

Решением уравнения (13) удовлетворяющее условиям $u_n^{(k)}(0) = \Phi_{kn}, u_n^{(k+1)}(0) = \Psi_{kn}$ является следующая функция

$$u_n(t) = \frac{\Phi_{kn}}{\theta_n^k} \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \theta_n t\right) - \frac{\Psi_{kn}}{\theta_n^{k+1}} \sin\left(\frac{\pi k}{2} - \theta_n t\right) + \sum_{s=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]-1} \frac{(-1)^s}{\theta_n^{k+1-2s}} f_n^{(k-1-2s)}(0) \sin\left(\frac{\pi k}{2} - \theta_n t\right) -$$

$$- \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} \frac{(-1)^s}{\theta_n^{k-2s}} f_n^{(k-2-2s)}(0) \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \theta_n t\right) + \frac{1}{\theta_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \theta_n(t-\tau) d\tau. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (9), имеем

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \left[\frac{\Phi_{kn}}{\theta_n^k} \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \theta_n t\right) - \frac{\Psi_{kn}}{\theta_n^{k+1}} \sin\left(\frac{\pi k}{2} - \theta_n t\right) + \right.$$

$$+ \sum_{s=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]-1} \frac{(-1)^s}{\theta_n^{k+1-2s}} f_n^{(k-1-2s)}(0) \sin\left(\frac{\pi k}{2} - \theta_n t\right) + \frac{1}{\theta_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \theta_n(t-\tau) d\tau -$$

$$\left. - \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} \frac{(-1)^s}{\theta_n^{k-2s}} f_n^{(k-2-2s)}(0) \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \theta_n t\right) \right]. \tag{15}$$

Заметим, что

$$\theta_{2n-1}^2 = (a_1 + (-1)^{2n} a_1) \lambda_{2n-1}^2 = (a_1 + a_1) \lambda_{2n-1}^2 = \varepsilon_1 \lambda_{2n-1}^2, n = 1, 2, \dots,$$

$$\theta_{2n}^2 = (a_1 + (-1)^{2n+1} a_1) \lambda_{2n}^2 = (a_1 - a_1) \lambda_{2n}^2 = \varepsilon_2 \lambda_{2n}^2, n = 1, 2, \dots$$

Тогда $\theta_{2n-1} = \sqrt{\varepsilon_1} \lambda_{2n-1}; \theta_{2n} = \sqrt{\varepsilon_2} \lambda_{2n}$. Подставляя эти значения в (15), имеем

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t), \tag{16}$$

где $u_1(x, t)$ определяется равенством

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n-1}(x) \left[\frac{\Phi_{k,2n-1}}{\sqrt[k]{\varepsilon_1} \lambda_{2n-1}^k} \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \varepsilon_1 \lambda_{2n-1} t\right) - \frac{\Psi_{k,2n-1}}{\sqrt[k+1]{\varepsilon_1} \lambda_{2n-1}^{k+1}} \sin\left(\frac{\pi k}{2} - \varepsilon_1 \lambda_{2n-1} t\right) \right] + \\ + \sum_{s=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]-1} \frac{(-1)^s f_{2n-1}^{(k-1-2s)}(0)}{\varepsilon_1^{(k+1-2s)/2} \lambda_{2n-1}^{k+1-2s}} \sin\left(\frac{\pi k}{2} - \sqrt{\varepsilon_1} \lambda_{2n-1} t\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1} \lambda_{2n-1}} \int_0^t f_{2n-1}(\tau) \sin \sqrt{\varepsilon_1} \lambda_{2n-1} (t - \tau) d\tau - \\ - \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} \frac{(-1)^s}{\varepsilon_1^{(k-2s)/2} \lambda_{2n-1}^{k-2s}} f_{2n-1}^{(k-2-2s)}(0) \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \sqrt{\varepsilon_1} \lambda_{2n-1} t\right) \Bigg], \tag{17}$$

а $u_2(x, t)$ имеет вид

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}(x) \left[\frac{\Phi_{k,2n}}{\sqrt[k]{\varepsilon_2} \lambda_{2n}^k} \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \varepsilon_2 \lambda_{2n} t\right) - \frac{\Psi_{k,2n}}{\sqrt[k+1]{\varepsilon_2} \lambda_{2n}^{k+1}} \sin\left(\frac{\pi k}{2} - \varepsilon_2 \lambda_{2n} t\right) \right] + \\ + \sum_{s=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]-1} \frac{(-1)^s f_{2n}^{(k-1-2s)}(0)}{\varepsilon_2^{(k+1-2s)/2} \lambda_{2n}^{k+1-2s}} \sin\left(\frac{\pi k}{2} - \sqrt{\varepsilon_2} \lambda_{2n} t\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2} \lambda_{2n}} \int_0^t f_{2n}(\tau) \sin \sqrt{\varepsilon_2} \lambda_{2n} (t - \tau) d\tau - \\ - \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} \frac{(-1)^s}{\varepsilon_2^{(k-2s)/2} \lambda_{2n}^{k-2s}} f_{2n}^{(k-2-2s)}(0) \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \sqrt{\varepsilon_2} \lambda_{2n} t\right) \Bigg]. \tag{18}$$

Таким образом, мы нашли формально решение задачи (1)-(3). Остается исследовать сходимость рядов (17) и (18).

В работе [14] доказаны следующие утверждения.

Лемма 2. Пусть $f(x, t) \in C^1(\bar{\Omega})$, $f(0, t) = f(p, t) = 0$, $f(x, t) \in Lip_\alpha[0, p]$ равномерно по t и $0 < \alpha < 1$. Тогда ряд (10) сходится абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$.

Лемма 3. Пусть $\varphi_k(x) \in W_2^1(0, p)$, $\varphi_k(0) = \varphi_k(p) = 0$. Тогда ряд (11) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0, p]$.

Лемма 4. Пусть $\Psi_k(x) \in W_2^1(0, p)$, $\Psi_k(0) = \Psi_k(p) = 0$. Тогда ряд (12) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0, p]$.

Лемма 5. Если $\frac{\partial^{k+1} f(x, t)}{\partial t^{k+1}} \in C(\bar{\Omega})$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\lambda_n} \int_0^t f_n^{(m)}(\tau) \sin \left[\frac{\pi(k+m)}{2} + \lambda_n(t-m) \right] d\tau, m = 1, 2, \dots, k+1$$

сходится абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$.

Лемма 6. Если $\frac{\partial^{k-1} f(x,t)}{\partial t^{k-1}} \in C(\bar{\Omega}), k \geq 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sum_{s=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]-1} \frac{(-1)^s}{\lambda_n^{k+1-2s}} f_n^{(k+1-2s)}(0) \sin \left(\frac{\pi k}{2} - \lambda_n t \right)$$

сходится абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$.

Аналогично, при выполнении условий

$$\frac{\partial^{k-1} f(x,t)}{\partial t^{k-1}} \in C(\bar{\Omega}), k \geq 1, \frac{\partial^{k-2} f(x,t)}{\partial t^{k-2}} \in C(\bar{\Omega}), k \geq 2,$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega}), f(0,t) = f(p,t) = 0, 0 \leq t \leq T$$

доказываются абсолютная и равномерная в области $\bar{\Omega}$ сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} \frac{(-1)^s}{\lambda_n^{k-2s}} f_n^{(k-2s)}(0) \cos \left(\frac{\pi k}{2} - \lambda_n t \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sum_{s=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]-1} \frac{(-1)^s}{\lambda_n^{k-1-2s}} f_n^{(k-1-2s)}(0) \sin \left(\frac{\pi k}{2} - \lambda_n t \right)$$

Из этих лемм вытекает следующее основное утверждение.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ и выполняются условия

1) $f(x,t) \in C^1(\bar{\Omega}), f(0,t) = f(p,t) = 0, 0 \leq t \leq T$ и $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \in Lip_{\alpha}[0, p]$ равномерно

относительно $t, 0 < \alpha < 1$;

2) $\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k} \in C(\bar{\Omega}), \frac{\partial^{k+1} f(x,t)}{\partial t^{k+1}} \in L_2(\Omega)$;

3) $\varphi_k(x) \in W_2^2(0, p), \varphi_k(0) = \varphi_k(p) = 0$

4) $\psi_k(x) \in W_2^1(0, p), \psi_k(0) = \psi_k(p) = 0$

Тогда ряды (17) и (18), а также ряды полученные дифференцированием $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}$ и $\frac{\partial^{k+1} u(x,t)}{\partial t^{k+1}}$ сходятся абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$, функция $u(x,t)$ из равенства (15) принадлежит классу $C_{x,t}^{2,k+1}(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет условиям задачи (1)-(4).

Исследование выполнено при поддержке грантового финансирования Комитета науки МНВО РК в рамках научного проекта № AP09259074.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Нахушев, А.М. Уравнения математической биологии / – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
Nahushev A.M. (1995) Uravnenia matematicheskoi biologii [Equations of mathematical physics]. Vishaya shkola., -301.(in Russian)
- 2 Cabada, A.; Tojo, F.A.F. Differential Equations with Involutions, 1st ed.; Atlantis Press: Paris, France, 2015.
- 3 Karapetiants, N.; Samko, S. Equations with Involutive Operators, 1st ed.; World Birkhauser: Boston, MA, USA; 2001. <https://doi.org/10.1007/BF01332659>
- 4 Андреев, А.А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом / А.А. Андреев // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1126–1128.
Andreev A.A. (2004) Ob analogah klasscheskih kraevih zadach dlia odnogo differencialnogo uravnenia vtorogo poriadka s otkloniaushimsia argumentum [On Analogues of Classical Boundary Value Problems for a Second-Order Differential Equation with Deviating Argument]. *Differencialnie uravnenia* V.-4, №8, 1126-1128. (in Russian)
- 5 Ashyralyev, A.; Ibrahim, S.; Hincal, E. On stability of the third order partial delay differential equation with involution and Dirichlet condition // Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. – 2021. – Vol 2. – P.25–34. <https://doi.org/10.3390/SYM12061033>
- 6 Ashyralyev, A., Al-Hazaimeh H. Stability of the time-dependent identification problem for the telegraph equation with involution // International Journal of Applied Mathematics. – 2022. – Vol.35. – P.447 – 459. <https://doi.org/10.12732/ijam.v35i3.7>
- 7 Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B. On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions// Eurasian Mathematical Journal. – 2020. – Vol.11. – P. 30 – 39. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-2-30-39>
- 8 Burlutskaya M. Sh. Some properties of functional-differential operators with involution $n(x) = 1 - x$ and their applications. Russian Mathematics. – 2021. – Vol. 65. – P. 69 – 76. <https://doi.org/10.3103/S1066369X21050108>
- 9 Granilshchikova Y.A., Shkalikov A.A. Spectral properties of a differential operator with involution // Vestn. Mosk. Univ. Matematika. Mekhanika. – 2022. – № 4. – P. 67 –71. <https://doi.org/10.3103/S0027132222040040>
- 10 Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.Kh. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation // Turk. J. Math. – 2019. – Vol.43. – P.1604 – 1625. <https://doi.org/10.3906/mat-1901-71>
- 11 Kozhanov A.I., Dyuzheva A.V. Non-local problems with integral displacement for high-order parabolic equations //The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. – 2021. – Vol.36. – P.14 – 28 <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.36.14>
- 12 Sarsenbi, A.A.; Sarsenbi, A.M. On eigenfunctions of the boundary value problems for second order differential equations with involution // Symmetry. – 2021. – Vol.13. – P.1-15. <https://doi.org/10.3390/sym13101972>
- 13 Yarka U., Fedushko S., Vesel P. The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation// Mathematics. – 2020. –Vol.8, No.2108. – P.1 – 13.
- 14 Amanov D., Ibragimov D., Kılıçman A. On a generalization of the initial-boundary problem for the vibrating string equation // Symmetry. – 2019. – Vol.11. – P.1 – 10. <https://doi.org/10.3390/sym11010073>

15 Amanov D. On a generalization of the dirichlet problem for the poisson equation // *Boundary Value Problems*. – 2016. – Vol. 2016. – P.1 – 15. <https://doi.org/10.1186/s13661-016-0668-6>

REFERENCES

- 1 Nahushev, A.M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* / – M.: Vyssh. shk., 1995. – 301 s.
- Nahushev A.M. (1995) *Uravnenia matematicheskoi biologii* [Equations of mathematical physics]. *Vishaya shkola.*, -301.(in Russian)
- 2 Cabada, A.; Tojo, F.A.F. *Differential Equations with Involutions*, 1st ed.; Atlantis Press: Paris, France, 2015.
- 3 Karapetiants, N.; Samko, S. *Equations with Involution Operators*, 1st ed.; World Birkhauser: Boston, MA, USA; 2001. <https://doi.org/10.1007/BF01332659>
- 4 Andreev, A.A. *Ob analogah klassicheskikh kraevykh zadach dlya odnogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poriyadka s otklonyayushchimsya argumentom* / A.A. Andreev // *Differenc. uravneniya*. – 2004. – T. 40, № 8. – С. 1126–1128.
- Andreev A.A. (2004) *Ob analogah klassicheskikh kraevykh zadach dlya odnogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poriyadka s otklonyayushchimsya argumentom* [On Analogues of Classical Boundary Value Problems for a Second-Order Differential Equation with Deviating Argument]. *Differentsialnie uravneniya* V.-4, №8, 1126–1128. (in Russian)
- 5 Ashyralyev, A.; Ibrahim, S.; Hincal, E. On stability of the third order partial delay differential equation with involution and Dirichlet condition // *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.* – 2021. – Vol 2. – P.25–34. <https://doi.org/10.3390/SYM12061033>
- 6 Ashyralyev, A., Al-Hazaimeh H. Stability of the time-dependent identification problem for the telegraph equation with involution // *International Journal of Applied Mathematics*. – 2022. – Vol.35. – P.447 – 459. <https://doi.org/10.12732/ijam.v35i3.7>
- 7 Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B. On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions// *Eurasian Mathematical Journal*. – 2020. – Vol.11. – P. 30 – 39. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-2-30-39>
- 8 Burlutskaya M. Sh. Some properties of functional-differential operators with involution $n(x) = 1 - x$ and their applications. *Russian Mathematics*. – 2021. – Vol. 65. – P. 69 – 76. <https://doi.org/10.3103/S1066369X21050108>
- 9 Granilshchikova Y.A., Shkalikov A.A. Spectral properties of a differential operator with involution // *Vestn. Mosk. Univ. Matematika. Mekhanika*. – 2022. – № 4. – P. 67 –71. <https://doi.org/10.3103/S0027132222040040>
- 10 Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.Kh. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation // *Turk. J. Math.* – 2019. – Vol.43. – P.1604 – 1625. <https://doi.org/10.3906/mat-1901-71>
- 11 Kozhanov A.I., Dyuzheva A.V. Non-local problems with integral displacement for high-order parabolic equations // *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. – 2021. – Vol.36. – P.14 – 28 <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.36.14>
- 12 Sarsenbi, A.A.; Sarsenbi, A.M. On eigenfunctions of the boundary value problems for second order differential equations with involution // *Symmetry*. – 2021. – Vol.13. – P.1-15. <https://doi.org/10.3390/sym13101972>
- 13 Yarka U., Fedushko S., Vesel P. The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation// *Mathematics*. – 2020. –Vol.8, No.2108. – P.1 – 13.
- 14 Amanov D., Ibragimov D., Kılıçman A. On a generalization of the initial-boundary problem for the vibrating string equation // *Symmetry*. – 2019. – Vol.11. – P.1 – 10. <https://doi.org/10.3390/sym11010073>

15 Amanov D. On a generalization of the dirichlet problem for the poisson equation // Boundary Value Problems. – 2016. – Vol. 2016. – P.1 – 15. <https://doi.org/10.1186/s13661-016-0668-6>

М. Д. КОШАНОВА, М. А. МУРАТБЕКОВА, Б. Х. ТУРМЕТОВ

*Қ.А.Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ.,
Қазақстан*

БЕЙЛОКАЛ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста төртбұрыш аймақта аргументтері инволютивті түрлендірілген дербес тундылы дифференциалдық теңдеу қарастырылады. Қарастырылатын теңдеу екінші ретті гиперболалық типті теңдеудің бейлокал аналогы болып табылады. Бұл теңдеуге бастапқы-шеттік шарттар қойылады, мұнда шекаралық операторлардың ретті теңдеудің ретінен асып түседі. Қарастырылатын есептердің қисынды қойылу мәселесі зерттелінеді. Қойылған есепті шешу үшін Фурье әдісі, яғни айнымалдарды ажырату әдісі қолданылады. Сәйкес спектралдық есептің меншікті функциялары және меншікті мәндерінің қасиеттері зерттеледі. Қарастырылатын негізгі есептің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденеді. Шешімнің жалғыз болуы туралы теореманы дәлелдеу барысында қарастырылатын есеп классикалық гиперболалық типтегі теңдеулер үшін екі көмекші бастапқы-шеттік шартты есептерге келтіріледі. Алынған теңдеулер негізгі теңдеудің коэффициенттеріне тәуелді болады және оларға белгі бір шарттар қойылады. Ары қарай, көмекші спектрлік есептің меншікті функцияларының толымдылығынан пайдаланып негізгі есептің шешімі осы жүйе бойынша қатар түрінде ізделінеді. Қатардың белгісіз коэффициенттері үшін жоғарғы ретті шеттік шарттармен берілген жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі алынады. Осы есептерді шешу нәтижесінде зерттелінетін негізгі есептің шешімінің айқын түрін табамыз.

Түйін сөздер: бейлокал теңдеу, гиперболалық теңдеу, жоғарғы ретті оператор, Фурье әдісі, инволюция, шешімнің жалғыз болуы, шешімнің бар болуы .

M. KOSHANOVA, M. MURATBEKOVA, B. TURMETOV

A. Yasaui International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan

ON THE SOLVABILITY OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLOCAL HYPERBOLIC EQUATION

In this paper, we consider a partial differential equation with involutively transformed arguments in a rectangular domain. The considered equation is a non-local analog of the second-order hyperbolic type equation. This equation is subject to initial-boundary conditions, and the order of the boundary operators exceeds the order of the equation. Questions of correctness of the considered problem are investigated. To solve the problem, the Fourier method is used, i.e. separation of variables method. The properties of eigenfunctions and eigenvalues of the corresponding spectral problem are studied. For the main problem under consideration, theorems on the uniqueness and existence of a solution are proved. When proving the theorem on the uniqueness of the solution, the problem under study is reduced to two auxiliary, homogeneous initial-boundary value problems for a classical equation of hyperbolic type. The resulting equations depend on the coefficients of the main equation and certain conditions are imposed on them.

Further, using the completeness of the eigenfunctions of the auxiliary spectral problem, the solution of the main problem is sought in the form of a series in this system. For the unknown coefficients of the series, a system of ordinary differential equations with high-order boundary conditions is obtained. Solving these problems, we find an explicit form of the solution of the main problem under study.

Keywords: *nonlocal equation, hyperbolic equation, higher order operator, Fourier method, involution, uniqueness of solution, existence of solution.*