

УДК 519.635

<https://orcid.org/0000-0002-2877-2593>

<https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.227>

**А. А. ТАШЕВ<sup>1</sup>, Р. К. КАЗЫХАН<sup>2\*</sup>, Б. Р. АЙТБАЕВА<sup>3</sup>, К. А. КУДАЙКУЛОВ<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК,  
Алматы, Казахстан*

<sup>2</sup>*Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан*

<sup>3</sup>*РГП на ПХВ «Институт механики и машиноведения имени У.А. Жолдасбекова»,  
Алматы, Казахстан*

*azattash@mail.ru, rysgulkazykhan@mail.ru*

*azattash@mail.ru, rysgulkazykhan@mail.ru, rakhatay.a@mail.ru*

## **ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД ДЛЯ ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕЛА В ФОРМЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ТЕМПЕРАТУРЫ, ТЕПЛООБМЕНА И ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОСТИ НЕКОТОРЫХ ГРАНЕЙ**

*В статье описано использование вариационного метода с привлечением метода конечных элементов для оценки закона распределения температуры в теле в форме прямоугольного параллелепипеда. Рассматривается случай, когда на одной из грани прямоугольного параллелепипеда поддерживается определенная температура, а на противоположной стороне происходит теплообмен с окружающей средой. В соответствии с предложенным подходом предлагается аппроксимирующая функция в виде полинома третьей степени. Для определения закона распределения температуры в твердом теле в форме прямоугольного параллелепипеда составляется функционал, который состоит из членов, учитывающих температуру, теплообмен с окружающей средой, изолированность граней прямоугольного параллелепипеда, а также естественные граничные условия. Минимизируя этот функционал по узловым точкам прямоугольного параллелепипеда, определяется значение температуры в этих узлах. Далее, подставляя эти значения в аппроксимирующую функцию, получаем закон распределения температуры. При этом исследованы варианты, когда остальные грани прямоугольного параллелепипеда являются теплоизолированными или наоборот. Осуществлена оценка закона распределения температуры при различных количествах разбиения сторон прямоугольного параллелепипеда. Кроме того, произведено сравнение закона распределения температуры для прямоугольного параллелепипеда и близкого по габариту стержня при прочих равных условиях. Показаны их незначительные отличия.*

**Ключевые слова:** температура, трехмерный прямоугольный параллелепипед, аппроксимация, теплообмен, изолированность, твердое тело.

**Введение.** В Республике Казахстан, в ближнем и дальнем зарубежье проблемам теплопроводности уделяется большое внимание. В статье [1] аналитически смоделирована теплопроводность печатной проводной платы с выделением тепла. В работе [2] исследованы температурные поля в плите для лазерного нагрева. В статье [3] смоделирована проблема движущегося гауссова теплового потока, который возникает при синтезе порошкового слоя. В статье [4] исследована теплопроводность в транзисторе с использованием байесовского подхода. В работе [5] исследовано влияние неконденсирующегося газа на теплопроводность при стерилизации паром под

---

\* E-mail корреспондирующего автора: [rysugulkazykhan@mail.ru](mailto:rysugulkazykhan@mail.ru)

давлением. В статьях [6,7,8,9,10] исследованы многомерные задачи теплопроводности. В работе [10] исследована сходимость методов определения теплопроводности в прямоугольных пластинах. В работе [11] проведено аналитическое исследование стационарной задачи теплопроводности с помощью локальной дробной производной. В [12] исследована теплопроводность в твердых телах, с неоднородными граничными условиями, которые трудно решаются с помощью классических методов, таких как интегральные преобразования или разделение переменных. В [13] исследован метод локального дробного уравнения Эйлера для проблемы теплопроводности. В [14] решена проблема теплопроводности с помощью концепции сопротивления. В [15] рассмотрен процесс теплопередачи для двумерного уравнения Гельмгольца. В [16] аналитически решено уравнение теплопроводности для эксцентричного сферического кольца. В [17-20] были решены дифференциальные уравнения для течения жидкости и теплопроводности.

В [21] исследовано термомеханическое характеристике стержня постоянного сечения.

В [22, 23] рассматривается горизонтальный стержень переменного сечения ограниченной длины. В работе определяются поле распределения температуры, перемещения, трех составляющих деформации и напряжений при условии, что оба конца стержня жестко закреплены.

Предложенный подход легко адаптируется к объектам неправильной формы и для неоднородных материалов.

В данной работе рассматривается оценка закона распределения температуры тела в форме прямоугольного параллелепипеда. Для этого использован вариационный подход в сочетании с методом конечных элементов. Это позволяет автоматически учитывать граничные условия.

**Постановка задачи.** Рассмотрим твердое тело в форме прямоугольного параллелепипеда (рисунок 1). Начало координат расположим в нижнем левом угле прямоугольного параллелепипеда (узел 0), как показано на рисунке. Вершины нумеруем, начиная с узла 0. Размеры прямоугольного параллелепипеда по осям  $x, y$  и  $z$  считаем равными  $a, b$  и  $c$ , соответственно. На грани (0, 1, 2, 3) происходит конвективный теплообмен, а на грани (4, 5, 6, 7) поддерживается постоянная температура  $T^*$ .

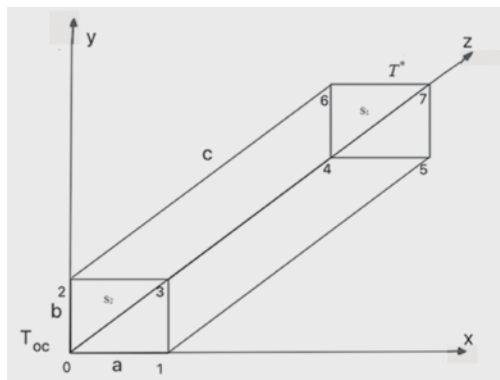


Рисунок 1 – Твердое тело в форме прямоугольного параллелепипеда

Уравнение теплопроводности для рассматриваемого тела имеет вид

$$K_{xx} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + K_{yy} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + K_{zz} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (1)$$

$$K_{xx} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + K_{yy} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) + K_{zz} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{S_2} + h(T - T_0) = 0, \quad (2)$$

$$T \Big|_{S_1} = T^*, \quad (3)$$

где  $T$  – температура, °C;  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$ ,  $K_{zz}$  – коэффициенты теплопроводности по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ ,  $\frac{\text{кВт}}{\text{м}} \cdot \text{°C}$ ;  $h$  – коэффициент теплообмена,  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}}$ ;  $S_1$  – поверхность в  $\text{м}^2$ , где задана температура  $T^*$ ;  $S_2$  – поверхность, в  $\text{м}^2$  где происходит теплообмен;  $T_{oc}$  – температура окружающей среды.

Уравнения (2) и (3) являются граничными условиями, причем уравнение (2) характеризует конвективный теплообмен на грани (0, 1, 2, 3) прямоугольного параллелепипеда (площадь  $S_1$ , а уравнение (3) – температуру, заданную на грани (4, 5, 6, 7) – (площадь  $S_2$ ). Уравнение (2) называется уравнением первого рода, а (3) – уравнением третьего рода.

Задача заключается в нахождении закона распределения температуры в твердом теле формы прямоугольного параллелепипеда.

**Метод решения.** Для решения поставленной задачи:

1. Сформирован функционал полной тепловой энергии, характеризующий исследуемый процесс с учетом воздействия температуры и наличия теплообмена на противоположных гранях прямоугольного параллелепипеда. Другие грани при этом могут быть теплоизолированными и нетеплоизолированными.

2. Разработан метод дискретизации тела в форме прямоугольного параллелепипеда.

3. Разработан метод построения аппроксимирующего полинома температуры от трех переменных.

4. Построен функционал полной тепловой энергии с использованием построенных аппроксимирующих полиномов от трех переменных и с учетом дискретизации.

5. Разработан метод построения разрешающих систем линейных алгебраических уравнений, основанный на минимизации построенного функционала, учитывающий естественные граничные условия.

6. Разработан метод решения полученных разрешающих систем линейных уравнений.

7. Разработана программа на языке Python для оценки закона распределения температуры тела в форме прямоугольного параллелепипеда.

Согласно вариационному принципу, решение рассматриваемой задачи эквивалентно минимизации функционала [1]:

$$J = \int_v \frac{1}{2} \left[ K_{xx} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] dv + \int_{S_2} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 dS = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \quad (4)$$

Для прямоугольного параллелепипеда формула (4) имеет вид:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \left[ K_{xx} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{h}{2} \int_0^a \int_0^b (T - T_{oc})^2 dx dy \Big|_{z=0} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \quad (5)$$

Когда боковые грани прямоугольного параллелепипеда не теплоизолированы к функционалу  $J$ , добавляются следующие члены:

$$\begin{aligned} J_5 &= \frac{h}{2} \int_0^a \int_0^c (T - T_{oc})^2 dx dz \Big|_{y=0}, \\ J_6 &= \frac{h}{2} \int_0^a \int_0^c (T - T_{oc})^2 dx dz \Big|_{y=b}, \\ J_7 &= \frac{h}{2} \int_0^a \int_0^c (T - T_{oc})^2 dy dz \Big|_{x=a}, \\ J_8 &= \frac{h}{2} \int_0^a \int_0^c (T - T_{oc})^2 dy dz \Big|_{x=0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $J_5, J_6, J_7, J_8$ , – характеризуют теплообмен на гранях (0, 1, 4, 5), (2, 3, 6, 7), (0, 2, 4, 6), (1, 3, 5, 7) прямоугольного параллелепипеда, соответственно.

В этом случае общий функционал равен  $J = \sum_{i=1}^8 J_i$ .

Для минимизации функционала  $J$  температура  $T(x, y, z)$  аппроксимируем полиномом от трех переменных:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= \varphi_0(x, y, z) * T_0 + \varphi_1(x, y, z) * T_1 + \varphi_2(x, y, z) * T_2 + \varphi_3(x, y, z) * T_3 \\ &+ \varphi_4(x, y, z) * T_4 + \varphi_5(x, y, z) * T_5 + \varphi_6(x, y, z) * T_6 + \varphi_7(x, y, z) * T_7 \end{aligned} \quad (7)$$

$$-a \leq x \leq a; -b \leq y \leq b; -c \leq z \leq c,$$

Где,  $\varphi_0(x, y, z), \varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z), \varphi_3(x, y, z), \varphi_4(x, y, z), \varphi_5(x, y, z), \varphi_6(x, y, z), \varphi_7(x, y, z)$ , определяются как в работе [24].

Дифференцируя (7) по переменным  $x, y, z$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \sum_{i=1}^7 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} T_i, \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \sum_{i=1}^7 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} T_i, \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= \sum_{i=1}^7 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} T_i, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} &= \left( -\frac{1}{a} + \frac{z}{ac} + \frac{y}{ab} - \frac{yz}{abc} \right), \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} &= \left( -\frac{1}{b} + \frac{z}{bc} + \frac{x}{ab} - \frac{xz}{abc} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = \left( -\frac{1}{c} + \frac{y}{bc} + \frac{x}{ac} - \frac{xy}{abc} \right),$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \left( \frac{1}{a} - \frac{z}{ac} - \frac{y}{ab} + \frac{yz}{abc} \right),$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \left( -\frac{x}{ab} + \frac{xz}{abc} \right),$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \left( -\frac{x}{ac} + \frac{xy}{abc} \right),$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -\frac{y}{ab} + \frac{yz}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{1}{b} - \frac{z}{bc} - \frac{x}{ab} + \frac{xz}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = -\frac{y}{bc} + \frac{xy}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = \frac{y}{ab} - \frac{yz}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = \frac{x}{ab} - \frac{xz}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = -\frac{xy}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial x} = -\frac{z}{ac} + \frac{yz}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial y} = -\frac{z}{bc} + \frac{xz}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial z} = \frac{1}{c} - \frac{y}{bc} + \frac{xy}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial x} = \frac{z}{ac} - \frac{yz}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial y} = -\frac{xz}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial z} = \frac{x}{ac} - \frac{xy}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial x} = -\frac{yz}{abc},$$

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial y} = \frac{y}{bc} - \frac{xz}{abc},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_6}{\partial z} &= \frac{1}{bc} - \frac{xy}{abc}, \\ \frac{\partial \varphi_7}{\partial x} &= \frac{yz}{abc}, \\ \frac{\partial \varphi_7}{\partial y} &= \frac{xz}{abc}, \\ \frac{\partial \varphi_7}{\partial z} &= \frac{xy}{abc}.\end{aligned}$$

Выражение для функционала  $J$  получается после подставления  $T$  из (7) и  $\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$  из (8) в (5). Оно вычисляется с использованием модуля sympy языка Python, выражение которой здесь не приводится из-за громоздкости.

Для минимизации функционала  $J$  дифференцируем его по переменным  $T_0 - T_7$  и приравняем к нулю. В результате получаем систему линейных уравнений относительно переменных  $T_0 - T_7$ . При этом, если на грани (4, 5, 6, 7) температура задана ( $T_4 = T_4^*, T_5 = T_5^*, T_6 = T_6^*, T_7 = T_7^*$ ), то получаем систему линейных уравнений относительно  $T_0 - T_3$ .

Решение полученной системы уравнений позволяет определить значения температуры в узловых точках прямоугольного параллелепипеда. Подставляя эти значения в (7), получим закон распределения температуры в прямоугольном параллелепипеде.

Все эти расчеты были получены с использованием программы, разработанной на языке программирования Python.

**Практическая реализация.** Для практической реализации предложенного подхода была разработана программа на языке Python. В качестве примера был выбран куб (Рисунок 2) со следующими исходными данными:

$$\begin{aligned}a &= 0.06m, b = 0.06m, c = 0.06m, K_{xx} = 7500 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^\circ\text{С}}, \\ T_{oc} &= 40^\circ\text{С}, T = 150^\circ\text{С}, h = 100000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^\circ\text{С}}.\end{aligned}$$

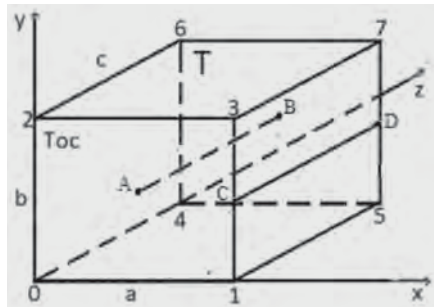


Рисунок 2 – Твердое тело в форме куба, состоящего из одного элемента

Если число разбиений прямоугольного параллелепипеда на элементы по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  обозначим как  $m_x$ ,  $m_y$  и  $m_z$ , соответственно, то для куба имеем  $m_x = m_y = m_z = m$ .

Введем массивы температур  $T1[0,8]$ ,  $T2[0,27]$ ,  $T3[0,63]$ ,  $T4[0,124]$ , соответствующие узловым точкам куба для количества разбиений  $m = 1, 2, 3, 4$ , соответственно. Значения температур в узловых точках куба для теплоизолированного случая оказались равными

1) при  $m = 1$  (рисунок 2):

$$T1[0,3] = 101.11, T1[4,7] = 150;$$

2) при  $m = 2$  (рисунок 3):

$$T2[0,8] = 101.11, T2[9,17] = 125.55, T2[18,27] = 150;$$

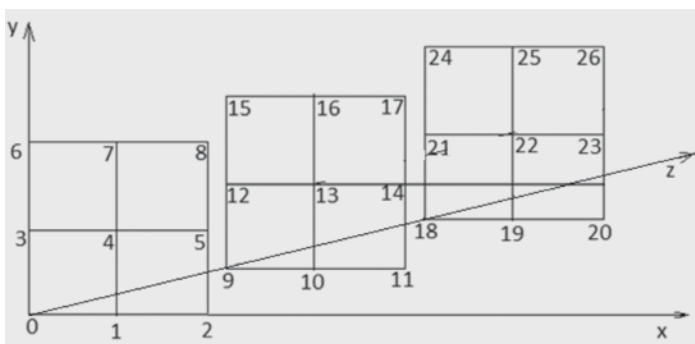


Рисунок 3 – Твердое тело в форме куба при разбиении на 8 элементов

3) при  $m = 3$  (рисунок 4):

$$T3[0,15] = 101.11, T3[16,31] = 117.4, T3[32,47] = 133.7, T4[48,63] = 150;$$

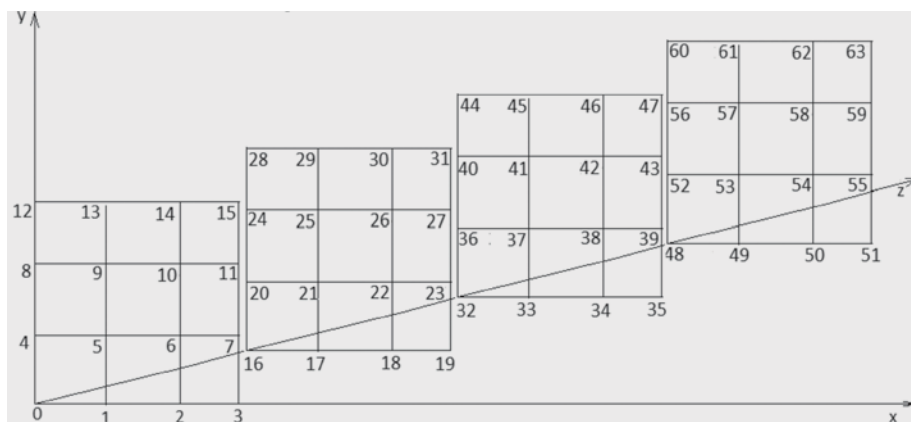


Рисунок 4 – Твердое тело в форме куба при разбиении на 27 элементов

4) при  $m = 4$  (рисунок 5):

$$T4[0,24] = 101.11, T4[25,49] = 113.33, T4[50,74] = 125.55, T4[75,99] = 137.77, T4[99,124] = 150;$$

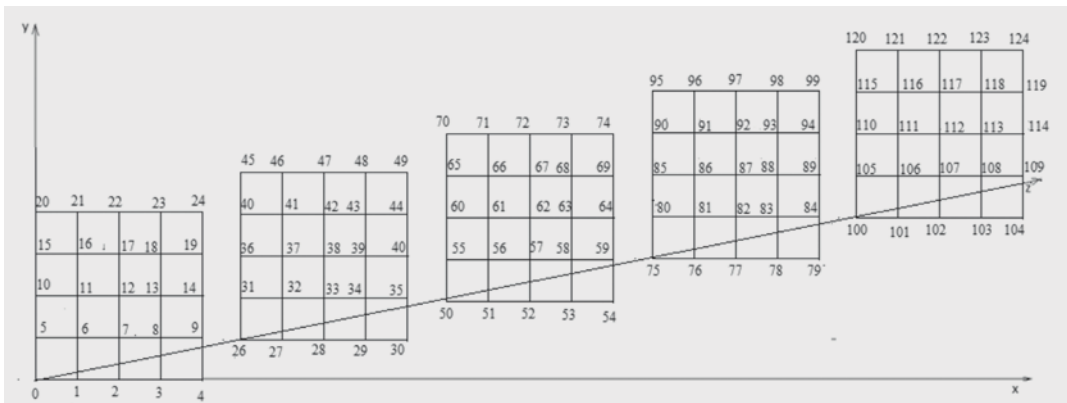


Рисунок 5 – Твердое тело в форме куба при разбиении на 125 элемента

Законы распределения температур для теплоизолированного случая, при  $m = 1$ ,  $m = 2$ ,  $m = 3$  и  $m = 4$  получились одинаковыми, соответствующие прямой линии между точками  $(0, 90)$  и  $(0.015, 100)$  (рисунок 6).

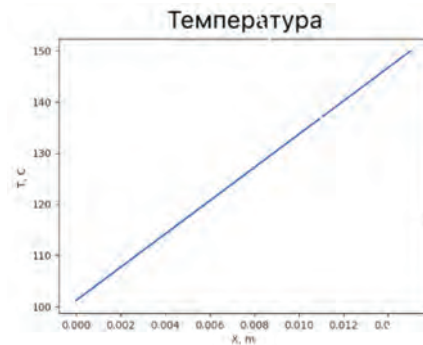


Рисунок 6 – Законы распределения температуры для теплоизолированного случая при  $m = 1$ ,  $m = 2$ ,  $m = 3$  и  $m = 4$ .

Из рисунка 3 видно, что закон распределения температур для  $m = 1$ ,  $m = 2$ ,  $m = 3$  и  $m = 4$  в теплоизолированном случае полностью совпадает.

Из данных  $T4[0,124]$  видно также, что при теплоизолированном случае температура в сечениях куба, перпендикулярной оси  $z$ , одинакова.

Значения температуры в узловых точках куба для нетеплоизолированного случая, когда  $m=1$ ,  $m = 2$ ,  $m = 2$  и  $m = 4$  получились равными:

**Заключение.** Согласно вариационному подходу получен общий функционал для тела формы прямоугольного параллелепипеда при воздействии температуры на некоторые грани и теплообмен на противоположной грани. При этом остальные грани считаются теплоизолированными. Минимизацией полученного функционала по температурам узловых точек прямоугольного параллелепипеда сформирована система линейных уравнений. Решение этой системы позволило получить температуру в узловых точках прямоугольного параллелепипеда, а подстановка этих значений в



формулу, предложенной полиномиальной аппроксимации, выявить закон распределения температуры в теле форме прямоугольного параллелепипеда.

Осуществлена практическая реализация разработанного подхода для конкретного примера, когда на одной из грани прямоугольного параллелепипеда поддерживается постоянная температура, а на противоположной происходит теплообмен с окружающей средой. При этом считается, что остальные грани параллелепипеда теплоизолированы. При этом рассматривались случаи разбиения прямоугольного параллелепипеда по оси  $z$  на 1, 2 и 3 элемента.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Segerlind J. L. Applied finite element analysis // New York-London-Sydney-Toronto, John Wiley and Sons, 1976.
- 2 Rogiy B. Practical analytical modeling of 3D multi-layer Printed Wired Board with buried volumetric heating sources // International Journal of Thermal Sciences, 2018. – 129. - pp. 404–415
- 3 Xu G. Y., Wang J. B. Analytical solution of time fractional Cattaneo heat equation for finite slab under pulse heat flux // Applied Mathematics and Mechanics, 2018. – 39. - pp. 1465–1476
- 4 Forslund, R. Analytical solution for heat conduction due to a moving Gaussian heat flux with piecewise constant parameters // Applied Mathematical Modelling, 2019. – 66. - pp. 227–240
- 5 Франза М. В. Орланде Н. Р. В., Estimation of parameters of the dual-phase-lag model for heat conduction in metal-oxide-semiconductor field-effect transistors // International Communications in Heat and Mass Transfer, 2018. – 92. - pp. 107–111
- 6 Shen Y. Effect of non-condensable gas on heat conduction in steam sterilization process // Thermal Science, 2019. – 23. - pp. 2489–2494
- 7 Haji-Sheikh A., Beck J. V. Temperature solution in multi-dimensional multi-layer bodies // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2002. – 45. - pp. 1865–1877
- 8 Aviles-Ramos C. Exact solution of heat conduction in composite materials and application to inverse problems // Journal of Heat Transfer, 1998. – 120. - pp. 592–599
- 9 Beck J. V. Verification solution for partial heating of rectangular solids // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2004. – 47. - pp. 4243–4255
- 10 Beck J. V., Cole, K. D. Improving convergence of summations in heat conduction // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2007. – 50. - pp. 257–268
- 11 Beck J. V. Conduction in rectangular plates with boundary temperatures specified // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2008. – 51. - pp. 4676–4690
- 12 Wang X. Y. Local fractional functional decomposition method for solving local fractional Poisson equation in steady heat-conduction problem // Thermal Science, 2016. – 20. - pp. S785–S788.
- 13 Laraqi N. Simple and accurate correlations for some problems of heat conduction with nonhomogeneous boundary conditions // Thermal Science, 2017. – 21. - pp. 125–132
- 14 Gao F., Yang X. J. Local fractional Euler's method for the steady heat-conduction problem // Thermal Science, 2016. – 20. - pp. S735–S738
- 15 Ei Maakoul A. A general approach to solve heat conduction problems with internal heat sources using resistance and quadrupole concepts // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2019. – 129. - pp. 793–800
- 16 Deng S. X., Ge X. X. Local fractional Helmholtz simulation for heat conduction in fractal media // Thermal Science, 2019. – 23. - pp. 1671–1675
- 17 Yilmazer A., Kocar C. Heat conduction in convectively cooled eccentric spherical annuli: A boundary integral moment method // Thermal Science, 2017. – 21. - pp. 2255–2266

- 18 Uddin M. J. Two parameter scaling group for unsteady convective magnetohydrodynamic flow // *Alexandria Engineering Journal*, 2016. – 55. - pp. 829–835
- 19 Kountouriotis Z. Development lengths in Newtonian Poiseuille flows with wall slip // *Applied Mathematics and Computation*, 2016. – 291. - pp. 98–114
- 20 Siddiqui O. K. Assessment of thermo-fluid analogies for different flow configurations: the effect of Prandtl number and laminar-to-turbulent flow regimes // *International Journal of Thermal Sciences*, 2018. – 129. - pp. 145–170
- 21 Arshidinova M., Begaliyeva K., Kudaykulov A., Tashev A. Numerical Modeling Of Nonlinear Thermomechanical Processes In a Rod Of Variable Cross Section In The Presence Of Heat Flow // *5th International Conference on Information Science and Control Engineering*, 2018. – pp. 351-354.
- 22 Wiwatanapataphee B. Oscillating pressure-driven slip flow and heat transfer through an elliptical microchannel // *Advances in Difference Equations*, 2019. ID 342.
- 23 Kudaykulov A., Tashev A.A., Askarova A. Computational algorithm and the method of determining the temperature field along the length of the rod of variable cross section // *Open Engineering*, June 2018.
- 24 Ташев А.А., Казыхан Р.К. Построение линейного интерполяционного полинома для трехмерного случая // *Вестник КазНУ. Серия Математика.* – Алматы, 2020. – 6. – С. 605-609.

## REFERENCES

- 1 Segerlind J. L. *Applied finite element analysis* // New York-London-Sydney-Toronto, John Wiley and Song, 1976.
- 2 Rogié B. Practical analytical modeling of 3D multi-layer Printed Wired Board with buried volumetric heating sources // *International Journal of Thermal Sciences*, 2018. – 129. - pp. 404–415
- 3 Xu G. Y., Wang J. B. Analytical solution of time fractional Cattaneo heat equation for finite slab under pulse heat flux // *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018. – 39. - pp. 1465–1476
- 4 Forslund, R. Analytical solution for heat conduction due to a moving Gaussian heat flux with piecewise constant parameters // *Applied Mathematical Modelling*, 2019. – 66. - pp. 227–240
- 5 França M. V. Orlande H. R. B., Estimation of parameters of the dual-phase-lag model for heat conduction in metal-oxide-semiconductor field-effect transistors // *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2018. – 92. - pp. 107–111
- 6 Shen Y. Effect of non-condensable gas on heat conduction in steam sterilization process // *Thermal Science*, 2019. – 23. - pp. 2489–2494
- 7 Haji-Sheikh A., Beck J. V. Temperature solution in multi-dimensional multi-layer bodies // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002. – 45. - pp. 1865–1877
- 8 Aviles-Ramos C. Exact solution of heat conduction in composite materials and application to inverse problems // *Journal of Heat Transfer*, 1998. – 120. - pp. 592–599
- 9 Beck J. V. Verification solution for partial heating of rectangular solids // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004. – 47. - pp. 4243–4255
- 10 Beck J. V., Cole, K. D. Improving convergence of summations in heat conduction // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2007. – 50. - pp. 257–268
- 11 Beck J. V. Conduction in rectangular plates with boundary temperatures specified // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008. – 51. - pp. 4676–4690
- 12 Wang X. Y. Local fractional functional decomposition method for solving local fractional Poisson equation in steady heat-conduction problem // *Thermal Science*, 2016. – 20. - pp. S785–S788

- 13 Laraq N. Simple and accurate correlations for some problems of heat conduction with nonhomogeneous boundary conditions // *Thermal Science*, 2017. – 21. - pp. 125–132
- 14 Gao F., Yang X. J. Local fractional Euler’s method for the steady heat-conduction problem // *Thermal Science*, 2016. – 20. - pp. S735–S738
- 15 Ei Maakoul A. A general approach to solve heat conduction problems with internal heat sources using resistance and quadrupole concepts // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2019. – 129. - pp. 793–800
- 16 Deng S. X., Ge X. X. Local fractional Helmholtz simulation for heat conduction in fractal media // *Thermal Science*, 2019. – 23. - pp. 1671–1675
- 17 Yilmazer A., Kocar C. Heat conduction in convectively cooled eccentric spherical annuli: A boundary integral moment method // *Thermal Science*, 2017. – 21. - pp. 2255–2266
- 18 Uddin M. J. Two parameter scaling group for unsteady convective magnetohydrodynamic flow // *Alexandria Engineering Journal*, 2016. – 55. - pp. 829–835
- 19 Kountouriotis Z. Development lengths in Newtonian Poiseuille flows with wall slip // *Applied Mathematics and Computation*, 2016. – 291. - pp. 98–114
- 20 Siddiqui O. K. Assessment of thermo-fluid analogies for different flow configurations: the effect of Prandtl number and laminar-to-turbulent flow regimes // *International Journal of Thermal Sciences*, 2018. – 129. - pp. 145–170
- 21 Arshidinova M., Begaliyeva K., Kudaykulov A., Tashev A. Numerical Modeling Of Nonlinear Thermomechanical Processes In a Rod Of Variable Cross Section In The Presence Of Heat Flow // 5th International Conference on Information Science and Control Engineering, 2018. – pp. 351-354.
- 22 Wiwatanapataphee B. Oscillating pressure-driven slip flow and heat transfer through an elliptical microchannel // *Advances in Difference Equations*, 2019. ID 342.
- 23 Kudaykulov A., Tashev A.A., Askarova A. Computational algorithm and the method of determining the temperature field along the length of the rod of variable cross section // *Open Engineering*, June 2018.
- 24 Tashev A.A., Kazyhan R.K. Postroenie linejnogo interpolacionnogo polinoma dlya trekhmernogo sluchaya // *Vestnik KazNITU. Seriya Matematika.* – Almaty, 2020. – 6. – S. 605-609.

***A. A. ТАШЕВ<sup>1</sup>, Р. Қ. ҚАЗЫХАН<sup>2</sup>, Б. Р. АЙТБАЕВА<sup>3</sup>, К. А. КУДАЙКУЛОВ<sup>3</sup>***

*<sup>1</sup>ҚР БҒМ ҒК ақпараттық және есептеу технологиялары институты,  
Алматы, Қазақстан*

*<sup>2</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан*

*<sup>3</sup>ШЖҚ РМК "У.А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану  
институты", Алматы, Қазақстан*

*azattash@mail.ru, rysgulkazykhan@mail.ru*

*azattash@mail.ru, rysgulkazykhan@mail.ru, rakhatay.a@mail.ru*

**ТЕМПЕРАТУРА, ЖЫЛУ АЛМАСУ ЖӘНЕ КЕЙБІР БЕТТЕРДІҢ ЖЫЛУ  
ОҚШАУЛАУ ӘСЕРІНЕ ҰШЫРАҒАН КЕЗДЕ ТІКБҰРЫШТЫ  
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД ТҮРІНДЕ ДЕНЕ ТЕМПЕРАТУРАСЫНЫҢ  
ТАРАЛУЫН БАҒАЛАУҒА АРНАЛҒАН ВАРИАЦИЯЛЫҚ ТӘСІЛ**

*Мақалада тікбұрышты параллелепипед түрінде денеде температураның таралу заңын бағалау ақырлы элемент әдісін қолдана отырып, вариациялық әдісті қолдану сипатталған.*

Тікбұрышты параллелепипедтің бір жағында белгілі бір температура сақталған кезде, ал қарама-қарсы жағында қоршаған ортамен жылу алмасу болған жағдайда қарастырылады. Ұсынылған тәсілге сәйкес үшінші дәрежелі көпмүшелік түрінде жуықтау функциясы ұсынылады. Тікбұрышты параллелепипед түрінде қатты денеде температураның таралу заңын анықтау үшін функционал құрылады, ол температураны, қоршаған ортамен жылу алмасуды, тікбұрышты параллелепипедтің беттерін оқшаулауды, сондай-ақ табиғи шекаралық жағдайларды ескеретін мүшелерден тұрады. Бұл функцияны тікбұрышты параллелепипедтің түйіндік нүктелері арқылы азайту осы түйіндердегі температура мәндерін анықтайды. Әрі қарай, осы мәндерді жуықтау функциясына ауыстыра отырып, біз температураның таралу заңын аламыз.

Сонымен қатар, тікбұрышты параллелепипедтің қалған беттері жылу оқшауланған немесе керісінше болған кезде нұсқалар зерттелді. Тікбұрышты параллелепипедтің бүйірлерін бөрудің әртүрлі саны кезінде температураның таралу заңын бағалау жүзеге асырылды. Сонымен қатар, тіктөртбұрышты параллелепипед үшін температураның таралу заңы және басқа заттар тең болған кезде жақын өзек салыстырылды. Олардың шамалы айырмашылықтары көрсетілген.

**Түйін сөздер:** температура, үш өлшемді тікбұрышты параллелепипед, жуықтау, жылу алмасу, оқшаулау, қатты.

**A. A. TASHEV<sup>1</sup>, P. K. KAZYKHAN<sup>2</sup>, B. R. AITBAYEVA<sup>3</sup>, K. A. KUDAIKULOV<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Institute of Information and Computing Technologies, CS MES RK, Almaty, Kazakhstan*

<sup>2</sup>*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

<sup>3</sup>*RGP on PCV "Institute of Mechanics and Machine Science named after*

*A. Zholdasbekov", Almaty, Kazakhstan*

*azattash@mail.ru, rysgulkazykhan@mail.ru*

*azattash@mail.ru, rysgulkazykhan@mail.ru, rakhatay.a@mail.ru*

## **A VARIATIONAL APPROACH FOR ESTIMATING THE DISTRIBUTION OF BODY TEMPERATURE IN THE FORM OF A RECTANGULAR PARALLELEPIPED UNDER THE INFLUENCE OF TEMPERATURE, HEAT EXCHANGE AND HEAT ISOLATION OF SOME FACETS**

*The article describes the use of a variational method involving the finite element method to estimate the law of temperature distribution in a body in the form of a rectangular parallelepiped. The case is considered when a certain temperature is maintained on one of the faces of a rectangular parallelepiped, and heat exchange with the environment occurs on the opposite side. In accordance with the proposed approach, an approximating function in the form of a polynomial of the third degree is proposed. To determine the law of temperature distribution in a solid in the form of a rectangular parallelepiped, a functional is compiled, which consists of terms that take into account temperature, heat exchange with the environment, isolation of the faces of a rectangular parallelepiped, as well as natural boundary conditions. Minimizing this functional, the temperature values at these nodes are determined by the nodal points of a rectangular parallelepiped. Further, substituting these values into the approximating function, we obtain the temperature distribution law. At the same time, variants are investigated when the remaining faces of a rectangular parallelepiped are thermally insulated or vice versa. The temperature distribution law is estimated for different amounts of partitioning of the sides of a rectangular parallelepiped. In addition, a comparison of the temperature distribution law for a rectangular parallelepiped and a rod close in size, other things being equal, was made. Their minor differences are shown.*

**Keywords:** temperature, three-dimensional rectangular parallelepiped, approximation, heat transfer, isolation, solid.