

Ж. М. ТУЛЕУТАЕВА*, В. В. ЖУРОВ, Э. К. ХАЙРУЛЛИНА

*А. Сағынов атындағы Қарағанды техникалық университеті,
Қарағанды, Қазақстан
e-mail: erasl-79@mail.ru, zhurvityv@yandex.ru, eliko_turchanka@mail.ru*

БІРТЕКТІ ВОЛЬТЕРРА ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМІН АНЫҚТАУ

Мақалада Вольтерраның екінші текті интегралдық теңдеуінің шешімі бар болатындығының анықтау сұрақтары зерттелді. Интегралдық теңдеуге ізделінді функция мен оң жақтағы функцияны ауыстыру қолданды. Осы ауыстыру қолданған соң, теңдеу ядросы «сығылмалы емес» интегралдық теңдеуіне келді. Жаңадан алынған теңдеуге Лаплас түрлендіруін қолданып, қарапайым бірінші ретті дифференциалдық теңдеуге келтірілді. Бұл теңдеудің шешімі анықталды. Берілген біртекті емес интегралдық теңдеуге сәйкес келетін біртекті интегралдық теңдеудің шешімі айқын түрде табылды. Біртекті интегралдық теңдеудің дербес жағдайлары және оның k параметрінің әртүрлі мәндеріндегі шешімдері жазылды. Шешімдері болатын интегралдық теңдеулердің кластары анықталды. Сингулярлы интегралдық теңдеуі [1-2] жұмыстарында қарастырылған. Ол интегралдың теңдеулердің де ядросы «сығылмалы емес», бірақ теңдеу өзгеше түрде берілген. Сондықтан зерттеліп отырған жұмыста шешімдерінің бар болуының класстары өзгеше түрде анықталған.

Түйін сөздер: Бессель функциясы, интегралдық оператор, «сығылмалы емес» ядро, Лаплас түрлендіруі.

Кіріспе. Кәзіргі сандық технология дәуірінде байланыс (контакт) техникасының қолдану аясы өте кең. Сондықтан, байланыс жүйесінде пайда болатын термофизикалық процестерді зерттеу автоматика мен бақылау-өлшеу аспаптарындағы, дәнекерлеу технологиясындағы, электр жабдықтарындағы байланыс элементтерінің негізгі болып табылатын әртүрлі құрылғылардағы жаңа жетістіктердің алғышарты болып табылады. Электр байланысының жылдамдығының жоғарылауына байланысты, яғни процестің қысқа мерзімінде байланыс жүйесінің температуралық өрісін және оның уақыт бойынша өзгеру динамикасын дәл анықтау тәжірибелік түрде мүмкін емес. Сондықтан электродтар арасындағы жылу және масса алмасу процестерін зерттеу қажет. Бұл зерттеулерді жүргізу кезінде температуралық өрісті зерттеу қажеттілігі туындайды.

Шекарасы жылжымалы болатын облыста параболалық теңдеу үшін шектік есептер классикалық есептерден әлде қайда ерекшеленеді. Шектік есептерге жылу потенциалдары әдісін қолдану арқылы екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуіне келтіруге болады.

Зерттеу әдісі. Бұл мақалада екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуінің шешімінің бар екендігін анықтау және осы теңдеудің шешімдерін зерттеу мақсатында жазылған.

Бізге екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуі берілген

* E-mail корреспондирующего автора: erasl-79@mail.ru

$$\begin{aligned}
 v(t) - \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}} \cdot v(\tau) d\tau - \\
 - \frac{1}{ka\sqrt{\pi}} \int_0^t \sqrt{\frac{\tau}{t}} \frac{1}{\sqrt{Z-\tau}} e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}} \cdot v(\tau) d\tau = f(t),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

мұндағы k – тұрақты оң шама, $f(t)$ – берілген функция.

Бұл интегралдық теңдеулер осьтік симметриямен берілген, бір өлшемді тұрақсыз жылу процестерінің дамуын сипаттайтын шектік шарттарымен берілген жылуөткізгіштік теңдеулерді шешу барысында пайда болады.

(1) Қинтегралдық теңдеуді дифференциалдық теңдеуге келтіру

(1) теңдеуді келесі түрде жазып аламыз:

$$\begin{aligned}
 \frac{v(t)}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{4a^2}} - \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{t\sqrt{t-\tau}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{\tau}{4a^2}} \cdot v(\tau) d\tau - \\
 - \frac{1}{ka\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau}{t\sqrt{t-\tau}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{\tau}{4a^2}} \cdot v(\tau) \right\} d\tau = \frac{f(t)}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{4a^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

(3) ауыстыруларды жасағаннан кейін

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{4a^2}} v(t) = v_1(t), \quad \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{4a^2}} f(t) = f_1(t)
 \tag{3}$$

(2) теңдеу келесі түрге келеді

$$v_1(t) - \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{t\sqrt{t-\tau}} \cdot v_1(\tau) d\tau - \frac{1}{ka\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau}{t\sqrt{t-\tau}} \cdot v_1(\tau) d\tau = t f_1(t).$$

немесе

$$t \cdot v_1(t) - \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \cdot v_1(\tau) d\tau - \frac{1}{ka\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \tau v_1(\tau) d\tau = f_2(t).
 \tag{4}$$

мұндағы $f_2(t) = t f_1(t)$.

Интегралдық операторы үздіксіз функциялар $v_1(t) \in C(0; +\infty)$ класында әрекет ететін ядросы $K(t, \tau)$ бар теңдеу болатынын ескереміз.

$$K(t, \tau) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t\sqrt{t-\tau}} + \frac{1}{ka\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\tau}{t\sqrt{t-\tau}} -$$

ол шектелмеген.

(4) теңдеуге көрсетілген белгілеулерді енгізе отырып, Лаплас түрлендіруін қолданамыз

$$\hat{v}_1(p) = \int_0^\infty v_1(t) \cdot e^{-pt} dt \Leftrightarrow v_1(t) \div \hat{v}_1(p);$$

$$\hat{f}_2(p) = \int_0^\infty f_2(t) \cdot e^{-pt} dt \Leftrightarrow f_2(t) \div \hat{f}_2(p),$$

мұндағы

$$\begin{aligned}\hat{v}_1(p) &= L[v_1(t)]; \\ \hat{f}_2(p) &= L[f_2(t)].\end{aligned}$$

Бұдан

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-pt} dt = \left\| \begin{aligned} pt &= z^2, \\ dt &= \frac{2z}{p} dz \end{aligned} \right\| = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}};$$

$$t \cdot v_1(t) \div \hat{v}_1'(p).$$

(4) интегралдық теңдеуді келесі түрдегі дифференциалдық теңдеуге келеді

$$-\hat{v}_1'(p) - \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \hat{v}_1(p) - \frac{1}{ka\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \cdot (-\hat{v}_1'(p)) = \hat{f}_2(p),$$

Шыққан дифференциалдық теңдеуді келесі түрде жаза аламыз

$$\left[\frac{1}{ka\sqrt{p}} - 1 \right] \hat{v}_1'(p) - \frac{a}{2\sqrt{p}} \hat{v}_1(p) = \hat{f}_2(p). \tag{5}$$

Біртекті сызықты дифференциалдық теңдеудің шешімін табу

(5) сызықты теңдеуге сәйкес келетін, біртекті теңдеудің шешімін табамыз

$$\left[\frac{1}{ka\sqrt{p}} - 1 \right] \hat{v}_1'(p) - \frac{a}{2\sqrt{p}} \hat{v}_1(p) = 0. \tag{6}$$

(6) дифференциалдық теңдеуі келесі түрге ие болады:

$$\hat{v}_1(p) = \frac{C e^{\frac{1}{k}}}{(ka)^{\frac{1}{k}}} \cdot \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\left(\sqrt{p} - \frac{1}{ka}\right)^{\frac{1}{k}}}, \tag{7}$$

мұндағы C-тұрақты сан.

№149 [3; 272] және №9 [3; 259] формулаларынан, аламыз:

$$\frac{e^{-as}}{\left(s - \frac{1}{ka}\right)^{\frac{1}{k}}} = L \left[\frac{\tau^{\frac{1}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)} e^{-\frac{\tau}{ka}} \right].$$

Осыдан кейін №29 [3; 261] формуласын ескеріп және (7) Лапласың кері түрлендіруін қолдана отырып, алатынымыз:

$$v_1(t) = \frac{C}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)(ka)^{\frac{1}{k}}} \int_a^\infty \frac{\tau(\tau-a)^{\frac{1}{k}-1}}{2\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} \cdot e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \cdot e^{-\frac{\tau-a}{ka}} d\tau =$$

$$= \frac{C e^{-\frac{1}{k}}}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)(ka)^{\frac{1}{k}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} \int_0^\infty \tau \cdot (\tau-a)^{\frac{1}{k}-1} e^{-\frac{\tau^2}{4t} + \frac{\tau}{ka}} d\tau.$$

Төмендегі

$$I(t, k) = \int_0^\infty \tau \cdot (\tau-a)^{\frac{1}{k}-1} e^{-\frac{\tau^2}{4t} + \frac{\tau}{ka}} d\tau,$$

енгізуді енгізе отырып, аламыз

$$v_1(t) = \frac{C e^{-\frac{1}{k}}}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)(ka)^{\frac{1}{k}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} I(t, k). \quad (8)$$

Интегралды есептейміз

$$I(t, k) = \int_a^\infty \tau \cdot (\tau-a)^{\frac{1}{k}-1} e^{-\frac{\tau^2}{4t} + \frac{\tau}{ka}} d\tau =$$

$$= \int_a^\infty \tau \cdot (\tau-a)^{\frac{1}{k}} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{4t} + \frac{\tau}{ka}\right\} d\tau +$$

$$+ a \int_a^\infty \tau \cdot (\tau-a)^{\frac{1}{k}-1} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{4t} + \frac{\tau}{ka}\right\} d\tau.$$

[4, 2.3.15] (1) формуласын ескеріп, аламыз

$$I(t, k) = \Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right) \left(\frac{1}{2t}\right)^{\frac{1}{2i} - \frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{t}{2k^2 a^2} + \frac{1}{2k} - \frac{a^2}{8t}\right\} D_{-\left(\frac{1}{k}+1\right)}\left(\frac{ka^2 - 2t}{ak\sqrt{2t}}\right) +$$

$$+ a \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \left(\frac{1}{2t}\right)^{-\frac{1}{2k}} \exp\left\{\frac{t}{2k^2 a^2} + \frac{1}{2k} - \frac{a^2}{8t}\right\} D_{-\frac{1}{k}}\left(\frac{ka^2 - 2t}{ak\sqrt{2t}}\right) =$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \exp\left\{\frac{1}{2k}\right\} (2t)^{\frac{1}{2k}} \exp\left\{\frac{t}{2k^2 a^2} - \frac{a^2}{8t}\right\} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{k} \sqrt{2t} D_{-\left(\frac{1}{k}+1\right)}\left(\frac{ka^2 - 2t}{ak\sqrt{2t}}\right) + a D_{-\frac{1}{k}}\left(\frac{ka^2 - 2t}{ak\sqrt{2t}}\right) \right].$$

Табылған $I(t, k)$ мәнін (8) өрнекке қойып, (4) интегралдық теңдеуге сәйкес келетін біртекті теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$v_1(t) = \frac{Ce^{\frac{1}{k}}}{(ka)^{\frac{1}{k}}} \cdot \frac{(2t)^{\frac{1}{2k}}}{2\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} \exp\left\{\frac{t}{2k^2 a^2} - \frac{a^2}{8t}\right\} \times \left[\frac{1}{k} \sqrt{2t} D_{-\left(\frac{1}{k}+1\right)}\left(\frac{ka^2-2t}{ak\sqrt{2t}}\right) + aD_{-\frac{1}{k}}\left(\frac{ka^2-2t}{ak\sqrt{2t}}\right) \right],$$

мұндағы [5, 9.241] (2) формуланы қараңыз)

$$D_{-p}(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-zx - \frac{x^2}{2}} x^{p-1} dx, \quad \text{Re } p > 0 \tag{9}$$

– параболалық цилиндр функциясы (немесе Вебер функциясы).

(3) ауыстыруын орнына қойып, алатынымыз

$$v(t) = \frac{Ce^{\frac{1}{k}}}{(ka)^{\frac{1}{k}}} \cdot \frac{(2t)^{\frac{1}{2k}}}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{\frac{t}{2k^2 a^2} - \frac{t}{4a^2} - \frac{a^2}{8t}\right\} \times \left[\frac{1}{k} \sqrt{2t} D_{-\left(\frac{1}{k}+1\right)}\left(\frac{ka^2-2t}{ak\sqrt{2t}}\right) + aD_{-\frac{1}{k}}\left(\frac{ka^2-2t}{ak\sqrt{2t}}\right) \right]. \tag{10}$$

Алынған (10) өрнегі бастапқыда берілген (1) теңдеуге сәйкес келетін біртекті теңдеудің жалпы шешімі болып табылады.

k = 2 болған жағдайда. Тәжірибелік тұрғыдан қарағанда k = 2 жағдайы өзгеше

$$v(t) = \frac{C\sqrt{e}}{\sqrt{2a\pi}(2t)^{\frac{3}{4}}} \cdot \exp\left\{-\frac{t}{8a^2} - \frac{a^2}{8t}\right\} \times \left[\frac{\sqrt{2t}}{2} D_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2t}} - \frac{\sqrt{t}}{a\sqrt{2}}\right) + aD_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2t}} - \frac{\sqrt{t}}{a\sqrt{2}}\right) \right], \tag{11}$$

мұндағы [7] формула [9] ескере отырып

$$D_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right),$$

K(x) – екінші текті Бессель функциясы.

[5, 9.247] [5] формуладан, алатынымыз

$$\begin{aligned} D_{-\frac{3}{2}}(z) &= zD_{-\frac{1}{2}}(z) + 2\frac{d}{dz}D_{-\frac{1}{2}}(z) = \\ &= \sqrt{\frac{\pi z^3}{2}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) + \frac{d}{dz}\left(\sqrt{2\pi z} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right)\right), \end{aligned}$$

онда жоғарыда көрсетілген формулаларды ескере отырып

$$K'_v(x) = -\frac{1}{2}(K_{v-1}(x) + K_{v+1}(x))$$

(11) формуладағы квадрат жақшаның ішіндегі өрнектер $K_v\left(\frac{z^2}{4}\right)$ функциясының сызықты комбинациясы болып табылады, мұндағы

$$v = \left\{ \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right\}, \quad z = \frac{a}{\sqrt{2t}} - \frac{\sqrt{t}}{a\sqrt{2}}.$$

Асимптотикасынан байқайтынымыз

$$K_v(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right), \quad x \rightarrow +\infty$$

және шектік қатынастардан, байқайтынымыз

$$\lim_{t \rightarrow 0; t \rightarrow +\infty} z^2 = \lim_{t \rightarrow 0; t \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{\sqrt{2t}} - \frac{\sqrt{t}}{a\sqrt{2}} \right) = +\infty.$$

Бұдан шығатын қортынды, (11) функциясы $t \in (0; +\infty)$ болған жағдайда шектелген болып табылады.

Сонымен, осы шыққан нәтижерге сүйене отырып, келесі теореманы аламыз.

Алынған нәтиже. Теорема 1. Интегралдық теңдеу

$$\begin{aligned} v(t) - \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}} \cdot v(\tau) d\tau - \\ - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\sqrt{\tau}}{t} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}} \cdot v(\tau) d\tau = 0 \end{aligned}$$

$v(t) \in L_\infty(0; +\infty)$ функциялар класында (11) формуламен анықталатын шешімге ие.

$k = 1$ болған жағдайда. $k = 1$ болған жағдайда (10) өрнектен алатынымыз

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{Ce}{a\sqrt{2\pi l}} \exp\left\{ \frac{t}{4a^2} - \frac{a^2}{8t} \right\} \times \\ \times \left[\sqrt{2t} D_{-2} \left(\frac{a}{\sqrt{2t}} - \frac{\sqrt{2t}}{a} \right) + a D_{-1} \left(\frac{a}{\sqrt{2t}} - \frac{\sqrt{2t}}{a} \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

[5, 9.254] (1) және (2) формулаларынан (12) үшін:

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{Ce}{a\sqrt{2\pi t}} \cdot \exp\left\{ \frac{t}{4a^2} - \frac{a^2}{8t} \right\} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2t} \exp\left\{ \frac{a^2}{8t} + \frac{t}{2a^2} - \frac{1}{2} \right\} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left\{ 1 - \frac{a^2}{4t} - \frac{t}{a^2} \right\} - \left(\frac{a}{\sqrt{2t}} - \frac{\sqrt{2t}}{a} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{\sqrt{2t}} - \frac{\sqrt{t}}{a} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ a\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left\{\frac{a^2}{8t} + \frac{t}{2a^2} - \frac{1}{2}\right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{t}}{a}\right) \Bigg] = \\
 &= \frac{Ce^{\frac{3}{2}}}{a\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{t}{4a^2} - \frac{a^2}{4t}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{ae} \exp\left\{\frac{3t}{4a^2}\right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{t}}{a}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Сонымен, $k = 1$ болған жағдайда (10) теңдеу келесі түрге ие болады:

$$\begin{aligned}
 v(t) = & \frac{Ce^{\frac{3}{2}}}{a\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{t}{4a^2} - \frac{a^2}{4t}\right\} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{ae} \exp\left\{\frac{3t}{4a^2}\right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{t}}{a}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{13}$$

Осыған байланысты келесі теорема дұрыс болып табылады.

Тұжырым. Теорема 2. Интегралдық теңдеу

$$\begin{aligned}
 v(t) - \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\} \cdot v(\tau) d\tau - \\
 - \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \sqrt{\frac{\tau}{t}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\} \cdot v(\tau) d\tau = 0
 \end{aligned}$$

$\exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\} v(t) \in L_{\infty}(0, +\infty)$ функциялар класында жататын (13) формула шешімі

болып табылады.

ӘДЕБИЕТ

1 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain// Boundary Value Problems. –2014. № 213. – P. 1–21.

2 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain. //Siberian Mathematical Journal. –2015. № 56 (6). – P. 982-995.

3 Dech G. Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniui preobrazovaniia Laplasi i Z-preobrazovaniia [Guide to the practical application of Laplace transform and Z-transform]. – Moscow: – Nauka.

4 Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Москва. Наука. 1981. – С.688.

5 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва. 1963. –С.1108.

REFERENCES

1 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain// Boundary Value Problems. – 2014. № 213. – R. 1-21.

2 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain. //Siberian Mathematical Journal. –2015. № 56 (6). – R. 982-995.

3 Dech G. Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniui preobrazovaniia Laplasi i Z-preobrazovaniia [Guide to the practical application of Laplace transform and Z-transform]. –Moscow: – Nauka.

4 Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integraly i ryady. Moskva. Nauka. 1981. – S.688.

5 Gradshtejn I.S., Ryzhik I.M. Tablicy integralov, summ, ryadov i proizvedenij. – Moskva. 1963. – S.1108.

Ж. М. ТУЛЕУТАЕВА, В. В. ЖУРОВ, Э. К. ХАЙРУЛЛИНА

Карагандинский технический университет имени А.Сагынова

Караганда, Казахстан

e-mail: erasl-79@mail.ru, zhurvity@yandex.ru, eliko_turchanka@mail.ru,

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

В статье исследованы вопросы разрешимости Вольтеррового интегрального уравнения второго рода. С помощью замен искомой функции и правой части интегральное уравнение сведено к интегральному уравнению, ядро которого не является «сжимаемым». С помощью преобразования Лапласа полученное уравнение сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. Найдено его решение. Решение однородного интегрального уравнения, соответствующего исходному неоднородному интегральному уравнению, найдено в явном виде. Выписаны частные случаи однородного интегрального уравнения и его решения при различных значениях параметра k. Указаны классы, в которых интегральное уравнение имеет решение. Сингулярные интегральные уравнения были рассмотрены в работах [1–3]. Их ядра также были «несжимаемы», но имели другой вид. В связи с этим весовые классы существования решения отличаются от класса существования решения уравнения, исследуемого в данной работе.

Ключевые слова: *функция Бесселя, интегральный оператор, класс существенно ограниченных функций, преобразование Лапласа.*

ZH. M. TULEUTAYEVA, V. V. ZHUROV, I. K. KHAIRULLINA

Karaganda Technical University named A. Sagynov,

Karaganda, Kazakhstan

e-mail: erasl-79@mail.ru, zhurvity@yandex.ru, eliko_turchanka@mail.ru,

DEFINITION OF THE SOLUTION OF THE HOMOGENEOUS VOLTERRA INTEGRAL EQUATION

In this paper, we study the solvability of a second-kind Volterra integral equation. By replacing the right-hand side and the unknown function, the integral equation is reduced to an integral equation, the kernel of which is not «compressible». Using the Laplace transform, the obtained equation is reduced to an ordinary first-order differential equation (linear). Its solution is found. The solution of the homogeneous

integral equation corresponding to the original nonhomogeneous integral equation found in explicit form. Special cases of a homogeneous integral equation and its solutions are written for different values of the parameter k . Classes are indicated in which the integral equation has a solution. Singular integral equations were considered in works [1–3]. Their kernels were also «incompressible, but kernels had another form. In this connection, the weight classes of the solution existence differ from the class of the solution existence for the equation considered in this work.

Keywords: *Bessel function, integral operator, class of essentially bounded functions, Laplace transformation.*