УДК 517.946
https://doi.org/10.47533/2023.1606-146X.11

***М. М. АБЕНОВ*, Н. А. БОЛАТ***

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
*abenov60@gmail.com*
*bolat.nazym.armankyzy@gmail.com*

# О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

*В статье раскрывается, как найден континуум точных решений двумерного уравнения неразрывности при стационарном, плоско – параллельном течении жидкости. В классической литературе описываются только специфические решения этого уравнения, соответствующие безвихревому течению жидкости. При этом используются компоненты произвольной аналитической функции комплексного переменного, играющие роль потенциала скорости и функции тока. В данной работе мы даем обобщение этого метода, дающее также вихревые решения уравнения неразрывности.*

***Ключевые слова:*** *уравнение неразрывности, плоско -параллельное течение, континуум точных решений, вихревое течение, безвихревые течения, несжимаемая жидкость.*

**Введение.** Рассмотрим плоскопараллельное, стационарное течение несжимаемой жидкости в некоторой области $G \subset R^2$ (см.[1] -[4]). Как известно, в этом случае имеет место уравнение неразрывности вида

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

где $V_1(x, y), V_2(x, y)$ – искомые компоненты скорости частиц жидкости.

Общеизвестно, что существует двухшаговый метод решения уравнения (1.1), подробно описанный в работе [1] .

Шаг 1. Берется произвольная, аналитическая в области $G \subset R^2$ функция комплексного переменного $(z = x + iy)$ вида $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

Шаг 2. Пишется точное решение уравнения (1.1), соответствующее выбранной аналитической функции в следующей форме:

$$\begin{cases} V_1 = u(x, y) \\ V_2 = -v(x, y) \end{cases} \tag{1.2}$$

* E-mail корреспондирующего автора: abenov60@gmail.com

Очевидно, что формула (1.2) дает континуум точных решений уравнения неразрывности. При этом все решения соответствуют только безвихревому течению жидкости. Действительно, для всех решений из (1.2) мы имеем $rot\vec{V}=0$ [1]

Далее, для прикладных целей важно описание также вихревых течений жидкости, когда $rot\vec{V}\neq 0$ . Это обстоятельство приводит нас к необходимости поиска возможных путей обобщения вышеизложенного метода, дающих также вихревые решения уравнения неразрывности.

**Методология и результаты исследования.** Известно, что в работе [2] был получен метод получения точных решений более общего уравнения неразрывности в гидродинамике. Здесь мы существенно используем двумерный аналог этого подхода.

**Определение.** Четыре скаляра (действительные либо комплексные числа) $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ называются разрешающими параметрами уравнения (1.1), если выполняется условие: $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0$ .

Из этого определения следует, что уравнение (1.1) имеет бесчисленное множество наборов разрешающих параметров. Определенный набор мы будем обозначать так:

$$SP=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2) \tag{1.3}$$

**Теорема.** Пусть $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ – произвольная функция комплексного переменного, $SP=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ произвольный набор разрешающих параметров. Тогда уравнение неразрывности (1.1) имеет точное решение вида:

$$\begin{cases} V_1(x,y)=\beta_1 u(\alpha_1 x,\alpha_2 y) \\ V_2(x,y)=\beta_2 v(\alpha_1 x,\alpha_2 y) \end{cases} \tag{1.4}$$

**Доказательство:**

**Введем новые переменные** $x_1=\alpha_1 x;\ y_1=\alpha_2 y$ . Тогда из (1.4) получим:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}=\alpha_1\beta_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\alpha_2\beta_2\frac{\partial v}{\partial y_1}=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}=0.$$

Выше мы использовали условие Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial y_1}$ , справедливое для компонент произвольной аналитической функции. Теорема доказана.

Очевидно, что формулой (1.4) дается континуум (бесчисленное множество) точных решений уравнения неразрывности. Существенным является то, что эта формула дает также вихревые решения. Легко понять, что общеизвестная формула безвихревых решений (1.2) является частным случаем формулы (1.4), записанным для простейшего набора разрешающих параметров: $\alpha_1=\alpha_2=1;\beta_1=1,\beta_2=-1$ .

То есть формула (1.4) содержит решения с различными дифференциальными свойствами. Они могут быть ограниченными, периодическими, вихревыми и так далее. Ниже иллюстрируются два точных решения уравнения неразрывности.

**Пример 1.** Найдем точное решение уравнения неразрывности, ограниченное всюду в области $G=R^2$ . Рассмотрим решение вида (1.4), отвечающее следующим параметрам: $w=e^{-z^2}$ , $\alpha_1=1,\alpha_2=i,\beta_1=1,\beta_2=i.$

Имеем:

$$w = e^{-z^2} = e^{-(x+iy)^2} = e^{-(x^2-y^2+2ixy)} = e^{-x^2+y^2} \cdot e^{-2ixy} = e^{-x^2+y^2}[\cos(2xy) - i\sin(2xy)].$$

Таким образом:

$$u(x,y) = e^{-x^2+y^2}\cos(2xy);\; v(x,y) = -e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)$$

Теперь формула (1.4) запишется так:

$$\begin{cases} V_1(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cos(2ixy) = e^{-x^2-y^2}ch2xy \\ V_2(x,y) = ie^{-x^2-y^2}\sin(2ixy) = e^{-x^2-y^2}sh2xy \end{cases}$$

Мы получили ограниченное во всем $R^2$ решение. Оно является вихревым.

**Пример 2.** Найдем периодическое решение уравнения неразрывности, ограниченное всюду в области $G = R^2$ .

Рассмотрим решение вида (1.4), отвечающее следующим параметрам: $w = \cos z$, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = i, \beta_1 = 1, \beta_2 = i.$

Имеем:

$$w = \cos z = \cos xchy + i\sin xshy$$

Формула (1.4) запишется так:

$$\begin{cases} V_1(x,y) = \cos xchiy = \cos x\cos y \\ V_2(x,y) = i\sin xshiy = \sin x\sin y \end{cases}$$

Найденное решение периодическое и вихревое. Оно ограничено во всей плоскости.

Легко понять, что таким путем мы можем записывать точные решения уравнения неразрывности с требуемыми дифференциальными свойствами.

**Заключение.** В настоящей работе найден континуум точных решений двумерного уравнения неразрывности при вихревом течении. Это позволяет описать классы точных решений уравнений движения Эйлера и Навье – Стокса, которые описывают процессы стационарного, двумерного течения жидкостей. Можно показать, что формула (1.4) содержит в себе все известные решения, указанные в работе [5]. Далее, из результатов работы [2] следует, что получение континуума точных решений уравнения неразрывности существенно облегчает исследование более сложных уравнений движения гидродинамики.

### ЛИТЕРАТУРА

1 Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.:Наука,1973.

2 Абенов М.М. Четырехмерная математика: методы и приложения. – Алматы.: КазНУ. 2019.

3 Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

4 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 6: Гидродинамика. 5-е изд. М.: Физматлит, 2006.

5 ристов С.Н., Князев Д.Е., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. 2006. Т. 43. № 5. С. 547–566.

6 Скульский О.И., Аристов С.Н. Механика аномально вязких жидкостей. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003.

7 Дэйли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости //Пер с англ.

8 Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970

9 Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса. Успехи механики №1, 2006.

10 Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. – К.: Наукова думка, 1993

**REFERENCES**

1 Lojcyanskij L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza. – M.:Nauka,1973.

2 Abenov M.M. CHetyrekhmernaya matematika: metody i prilozheniya. – Almaty.: KazNU. 2019.

3 Betchelor Dzh. Vvedenie v dinamiku zhidkosti. M.: Mir, 1973.

4 Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. 6: Gidrodinamika. 5-e izd. M.: Fizmatlit, 2006.

5 Aristov S.N., Knyazev D.E., Polyanin A.D. Tochnye resheniya uravnenij Nav'e–Stoksa s linejnoj zavisimost'yu komponent skorosti ot dvuh prostranstvennyh peremennyh // Teoreticheskie osnovy himicheskoj tekhnologii. 2006. T. 43. № 5. S. 547–566.

6 Skul'skij O.I., Aristov S.N. Mekhanika anomal'no vyazkih zhidkostej. M.; Izhevsk: NIC “Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika”, 2003.

7 Dejli Dzh., Harleman D. Mekhanika zhidkosti //Per s angl.

8 Ladyzhenskaya O. A. Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoj neszhimaemoj zhidkosti. M.: Nauka, 1970

9 Puhnachev V. V. Simmetrii v uravneniyah Nav'e–Stoksa. Uspekhi mekhaniki №1, 2006.

10 Meleshko V. V., Konstantinov M. YU. Dinamika vihrevyh struktur. – K.: Naukova dumka, 1993

***М. М. АБЕНОВ, Н. А. БОЛАТ***

*әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан*

## ҮЗІЛДІЛІК ТЕҢДЕУІНІҢ НАҚТЫ ШЕШІМДЕРІ ТУРАЛЫ

*Мақалада екі өлшемді үздіксіздік теңдеуінің стационар, жазық-параллель ағу үшін нақты шешімдерінің континуумы табылды. Бұған дейін осы теңдеудің тек құйынсыз ағынға сай шешімдерін алу тәсілі белгілі болатын. Біз осы жұмыста осы тәсілдің жалпылауын тауып, сол арқылы құйынды шешімдерді аламыз.*

***Түйін сөздер***: *үздіксіздік теңдеуі, жазықтық-параллель қозғалыс, нақты шешімдердің континуумы, құйынды ағын, құйынсыз ағындар, сығылмайтын сұйықтық.*

***M. M. ABENOV, N. A. BOLAT***

*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

## ON EXACT SOLUTIONS OF THE EQUATION OF CONTINUITY

*The continuum of exact solutions of the two-dimensional continuity equation for stationary, plane-parallel fluid flow is found in the article. Only specific solutions of this equation corresponding to a vortex-free fluid flow are described in the classical literature. At the same time, components of an arbitrary analytical function of a complex variable are used, playing the role of a velocity potential and a current function. In this paper we give a generalization of this method, which also gives vortex-free solutions to the continuity equation.*

***Key words**: continuity equation, plane-parallel motion, continuum of exact solutions, vortex flow, vortex-free flows, incompressible fluid.*