

М. У. УТЕНОВ*, Д. К. БАЛТАБАЙ

Казахский национальный университет имени аль-Фараби,

г. Алматы, Казахстан

dauren.baltabay.95@gmail.com, umu53@mail.ru

ПРЯМАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ RRRRT МАНИПУЛЯТОРА В ПРОГРАММНОЙ СРЕДЕ MAPLE

В статье представлена прямая позиционная задача RRRRT манипулятора, созданного авторами 3D модели, и его движения с использованием программной среды Maple. В данной работе подробно изучена позиционная задача кинематики данного манипулятора. Для нахождения кинематических характеристик манипулятора рационально использованы методы Денавита-Хартенберга и Ньютона-Эйлера. Результаты получены в программной среде Maple, которая позволяет получить результаты кинематических характеристик в виде 3D-графиков. Такие графики позволяют визуально увидеть, как изменяются в пространстве модули и направления приведенных параметров манипулятора в графиках, в зависимости от положения манипулятора в пространстве.

Ключевые слова: *движение манипулятора, кинематика, позиционная задача, 3D модель манипулятора, Maple.*

Введение. Исполнительными механизмами роботов являются манипуляторы. Манипуляторы можно рассматривать как разомкнутую цепь, которая состоит из нескольких звеньев, последовательно соединенных вращательными или поступательными парами, приводимыми в движение силовыми приводами. Один конец этой цепи соединен с основанием, а другой конец свободен и снабжен рабочим инструментом, позволяющим воздействовать на объекты манипулирования или выполнять различные технологические операции. Относительное движение кинематических пар передается звеньям, в результате схват манипулятора занимает в пространстве определенное положение. В большинстве случаев робототехники требуется описать пространственное положение схвата по отношению заданной абсолютной системе координат [1-2].

Кинематический анализ является важным фактором, влияющим на точность движения манипулятора, а также основой последующих анализа ошибок, управления роботом, планирования траектории, динамического анализа и т.д. Существует множество методов построения кинематики манипулятора. В настоящее время наиболее широко используемым методом создания кинематики манипулятора является метод Денавита-Хартенберга, основанный на однородной матрице преобразования [3-6].

Для нахождения кинематических характеристик манипулятора рационально использованы методы Денавита-Хартенберга и Ньютона-Эйлера. По нижеприведенному алгоритму прямой позиционной задачи кинематики разработана программа в программной среде Maple, которая позволила получить результаты кинематических характеристик в виде 3D-графиков. Такие графики позволяют визуально увидеть, как изменяются в пространстве модули и направления приведенных

* E-mail корреспондирующего автора: umu53@mail.ru

Таблица 1 – Параметры кинематических пар для RRRRT манипулятора

Кинематические пары	Звенья, образующие кинематические пары	Виды кинематических пар	Значение параметров			
			θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0,1	вращательная	θ_1	0,85	0	$\frac{\pi}{2}$
2	1,2	вращательная	θ_2	- 0,09	0,85	0
3	2,3	вращательная	θ_3	- 0,09	0	$-\frac{\pi}{2}$
4	3,4	вращательная	θ_4	0,85	0	0
5	4,5	поступательная	0	d_5	0	0

Систему $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ можно преобразовать в систему $O_iX_iY_iZ_i$ с помощью поворота, двух переносов и еще одного поворота, выполняемых в следующем порядке:

1) $R(Z_{i-1}, \theta_i)$ – поворот системы $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ вокруг оси Z_{i-1} на угол θ_i до тех пор, пока ось X_{i-1} не станет параллельной оси X_i . Это движение может быть описано однородной матрицей элементарного вращения

$$R(Z_{i-1}, \theta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) $T(Z_{i-1}, d_i)$ – перенос повернутой системы вдоль оси Z_{i-1} на величину s_i до тех пор, пока оси X_{i-1} и X_i не окажутся на одной прямой. Тогда однородная матрица элементарного сдвига имеет вид

$$T(Z_{i-1}, d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) $T(X_{i-1}, a_i)$ – перенос вдоль оси X_i на величину a_i до тех пор, пока не совпадут начала координат. Однородная матрица элементарного сдвига в этом случае, равна

$$T(X_{i-1}, a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4) $R(X_i, \alpha_i)$ – поворот вокруг оси X_i на угол α_i до совмещения оси Z_{i-1} с осью Z_i . Это действие описывается однородной матрицей вращения

$$R(X_i, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Параметр d_i представляет собой расстояние от начала $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ системы координат до пересечения оси Z_{i-1} с осью X_i , отсчитываемое вдоль оси Z_{i-1} , если кинематическая пара $(i-1, i)$ поступательная, то d_i является обобщенной координатой; a_i – расстояние между пересечением оси Z_{i-1} с осью X_i и началом $O_iX_iY_iZ_i$ системы координат, отсчитываемое вдоль оси X_i ; θ_i – угол, на который нужно повернуть ось X_{i-1} вокруг оси Z_{i-1} , чтобы она стала со направлена с осью X_i , если кинематическая пара $(i-1, i)$ вращательная, то θ_i является обобщенной координатой; α_i равен углу поворота оси Z_{i-1} вокруг оси X_i до ее совпадения с осью Z_i .

Результирующая матрица перехода, связывающая системы $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ и $O_iX_iY_iZ_i$ является произведением выше приведенных матриц:

$$A_i^{i-1} = R(Z_{i-1}, \theta_i)T(Z_{i-1}, s_i)T(X_{i-1}, a_i)R(X_i, \alpha_i), \text{ или} \\ A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Матрица A_i^{i-1} запишем в следующем виде

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & \vec{O}_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$R_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Матрица R_i^{i-1} – определяют ориентацию осей системы координат $O_iX_iY_iZ_i$ относительно системы координат $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$

$$\vec{O}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} a_i\cos(\theta_i) \\ -a_i\sin(\theta_i) \\ s_i \end{bmatrix}, \quad (3)$$

Вектор \vec{O}_i^{i-1} – характеризует положение точки начала системы координат $O_iX_iY_iZ_i$ в системе отсчета $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$

С помощью матрицы A_i^{i-1} можно связать радиусы - векторы одной и той же точки в системах $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ и $O_iX_iY_iZ_i$:

$$\vec{r}_i^{i-1} = A_i^{i-1}\vec{r}_i^i, \quad (4)$$

где $\vec{r}_i^i = [x_i \ y_i \ z_i \ 1]^T$ – матрица-столбец, определяющая положение произвольной точки звена i в системе отсчета $O_iX_iY_iZ_i$, жестко связанной с этим звеном; а $\vec{r}_i^{i-1} = -[x_{i-1} \ y_{i-1} \ z_{i-1} \ 1]^T$ – матрица-столбец, определяющая положение той же точки в системе $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$, жестко связанной со звеном $i-1$.

Положение и ориентация i -того звена манипулятора в системе отсчета $O_0X_0Y_0Z_0$, связанной со стойкой, определяется следующим образом [7]:

$$A_i^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 \dots A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} R_i^0 & \vec{O}_i^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

где

$$R_i^0 = \begin{bmatrix} A_i^0(1,1) & A_i^0(1,2) & A_i^0(1,3) \\ A_i^0(2,1) & A_i^0(2,2) & A_i^0(2,3) \\ A_i^0(3,1) & A_i^0(3,2) & A_i^0(3,3) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\vec{O}_i^0 = \begin{bmatrix} A_i^0(1,4) \\ A_i^0(2,4) \\ A_i^0(3,4) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Левая подматрица R_i^0 матрицы A_i^0 представляет собой направляющие косинусы соответственно осей $X_i Y_i Z_i$ в системе отсчета $O_0 X_0 Y_0 Z_0$. Вектор \vec{O}_i^0 определяет положение точки начала системы координат $O_i X_i Y_i Z_i$ в системе отсчета $O_0 X_0 Y_0 Z_0$.

Таким образом, решение определения положения звеньев манипулятора сводится к тому, что, задавшись значениями обобщенных координат, вычисляются с помощью (1) значения элементов матрицы A_i^0 , а, следовательно, согласно (5), определяются положение и ориентация i -того звена в системе координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$, жестко связанной со стойкой манипулятора.

Обозначим через $\vec{r}_i^i = [x_i^i \ y_i^i \ z_i^i \ 1]^T$ вектор однородных координат точки твердого тела в связанной системе координат $O_i X_i Y_i Z_i$ и A_i^0 - матрицу перехода к неподвижной системе $O_0 X_0 Y_0 Z_0$. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\vec{r}_i^0 = A_i^0 \vec{r}_i^i, \quad (8)$$

где $\vec{r}_i^0 = [x_i^0 \ y_i^0 \ z_i^0 \ 1]^T$ - однородный вектор положения, точки $\vec{r}_i^i = [x_i^i \ y_i^i \ z_i^i \ 1]^T$ твердого тела в связанной системе координат $O_i X_i Y_i Z_i$, в неподвижной системе координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$.

Угловая скорость $\vec{\omega}_i$ i -того звена относительно базовой системы координат представлено следующим образом [7]:

$$\vec{\omega}_i = \begin{cases} \vec{\omega}_{i-1} + R_{i-1}^0 \vec{z}_0 \dot{q}_i, & \text{если } i - \text{тая кинематическая пара вращательная,} \\ \vec{\omega}_{i-1}, & \text{если } i - \text{тая кинематическая пара поступательная,} \end{cases} \quad (9)$$

где $i=1,2,\dots,n$, $\vec{z}_0 = (0,0,1)^T$.

Тогда угловое ускорение $\vec{\varepsilon}_i$ i -того звена относительно базовой системы координат определяется выражением:

$$\vec{\varepsilon}_i = \begin{cases} \vec{\varepsilon}_{i-1} + R_{i-1}^0 \vec{z}_0 \ddot{q}_i + \vec{\omega}_{i-1} \times (R_{i-1}^0 \vec{z}_0 \dot{q}_i), & \\ \text{если } i - \text{тая кинематическая пара вращательная,} & \\ \vec{\varepsilon}_{i-1}, & \text{если } i - \text{тая кинематическая пара поступательная.} \end{cases} \quad (10)$$

Для линейных скоростей и ускорений i -того звена манипулятора относительно базовой системы координат имеем следующие соотношения:

$$\vec{v}_i = \begin{cases} \vec{v}_{i-1} + \vec{\omega}_i \times \vec{p}_i^{i-1}, & \text{если } i - \text{тая кинематическая пара вращательная,} \\ \vec{v}_{i-1} + \vec{\omega}_i \times \vec{p}_i^{i-1} + R_{i-1}^0 \vec{z}_0 \dot{q}_i, & \text{если } i - \text{тая кинематическая пара поступательная,} \end{cases} \quad (11)$$

$$\vec{a}_i = \begin{cases} \vec{a}_{i-1} + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{p}_i^{i-1}) + \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{p}_i^{i-1}, & \text{если } i - \text{тая кинематическая пара вращательная,} \\ \vec{a}_{i-1} + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{p}_i^{i-1}) + 2\vec{\omega}_i \times (R_{i-1}^0 \vec{z}_0 \dot{q}_i) + \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{p}_i^{i-1} + R_{i-1}^0 \vec{z}_0 \ddot{q}_i, & \text{если } i - \text{тая кинематическая пара поступательная.} \end{cases} \quad (12)$$

\vec{p}_i^{i-1} положение начала i -той системы координат относительно начала $i-1$ -ой системы координат определим по следующему выражению:

$$\vec{p}_i^{i-1} = \vec{p}_i^0 - \vec{p}_{i-1}^0,$$

где

$$\vec{p}_i^0 = \begin{bmatrix} A_i^0(1,4) \\ A_i^0(2,4) \\ A_i^0(3,4) \end{bmatrix}, \vec{p}_{i-1}^0 = \begin{bmatrix} A_{i-1}^0(1,4) \\ A_{i-1}^0(2,4) \\ A_{i-1}^0(3,4) \end{bmatrix}.$$

Линейные скорости и ускорение точки $\vec{P}_i^i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ i -того звена соответственно относительно базовой системы координат определяются выражениями:

$$\vec{v}_{iP} = \vec{\omega}_i \times \vec{P}_i + \vec{v}_i, \quad (13)$$

$$\vec{a}_{iP} = \vec{a}_i + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{P}_i) + \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{P}_i. \quad (14)$$

Результаты кинематики RRRRT манипулятора в виде 3D графиков. Ниже на рисунках 6-12 приведены полученные результаты в Maple 2021 кинематического анализа в виде 3d графиков некоторых кинематических характеристик RRRRT манипулятора для 36 положений относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$, при следующих заданных значениях обобщенных координат:

$$\theta_1 = 2\pi \sin\left(\frac{\pi}{2k} * i\right), \theta_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{2k} * i\right), \theta_3 = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{2k} * i\right), \theta_4 = \frac{2\pi}{k} * i,$$

$d_5 = 0.35 * \sin\left(\frac{\pi}{2k} * i\right)$, где $k = 36$, $i = 0..36$. Точка P RRRRT манипулятора связана с системой координат $O_5X_5Y_5Z_5$, и относительно этой системы имеет координаты $P_5 = [0 \ 0 \ 0.35]^T$. Синяя (color = blue) линия на рисунках – траектория точки или годографы угловых и линейных ускорений относительно базовой системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$. Розовые (color = magenta) прямые со стрелкой – это векторы, соединяющие точки траектории или годографа с началом базовой системы координат.

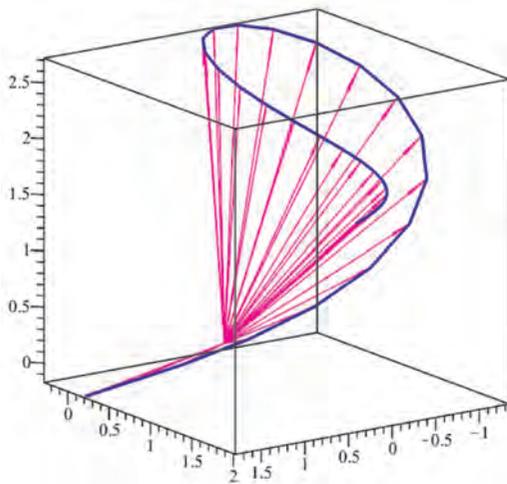


Рисунок 2 – Траектория точки P для 36 положений RRRRT манипулятора относительно базовой системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$.

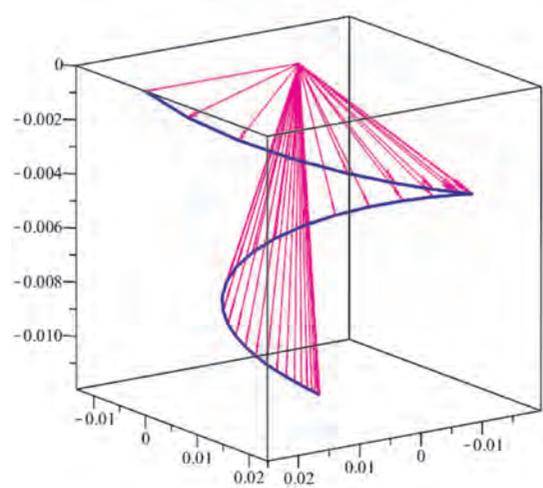


Рисунок 3 – Угловое ускорение звена ε_2 – угловое ускорение звена 2 для 36 положений RRRRT манипулятора

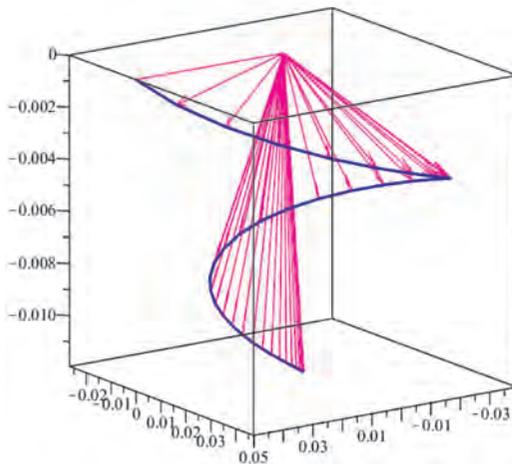


Рисунок 4 – Угловое ускорение звена ε_3 – угловое ускорение звена 3 для 36 положений RRRRT манипулятора.

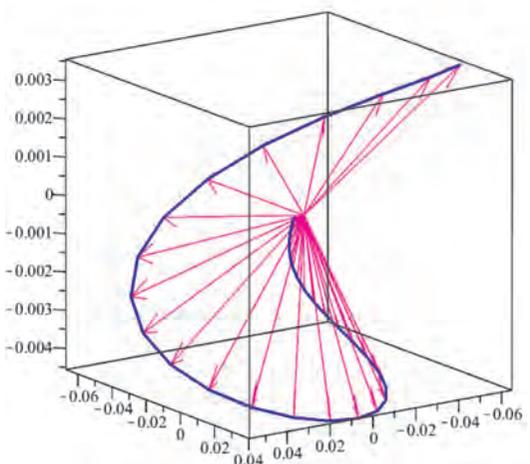


Рисунок 5 – Линейное ускорение a_{02} начала O_2 подвижной системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ для 36 положений RRRRT манипулятора

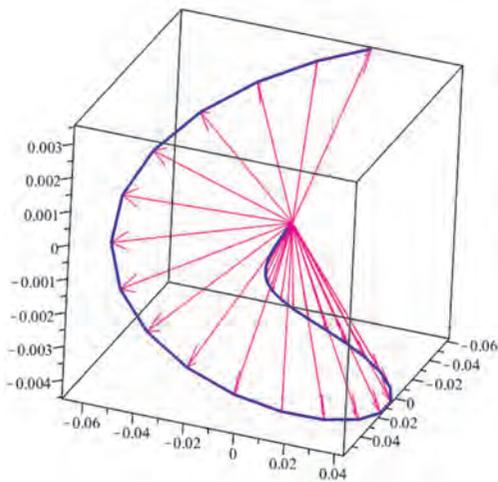


Рисунок 6 – Линейное ускорение $-a_{03}$ начала O_3 подвижной системы координат $O_3X_3Y_3Z_3$ для 36 положений RRRRT манипулятора.

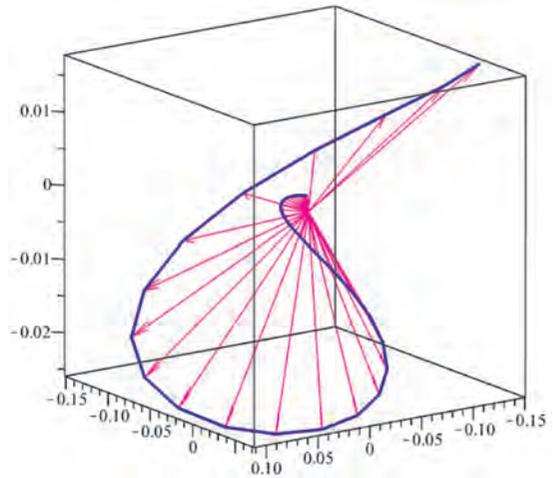


Рисунок 7 – Линейное ускорение $-a_{04}$ начала O_4 подвижной системы координат $O_4X_4Y_4Z_4$ для 36 положений RRRRT манипулятора.

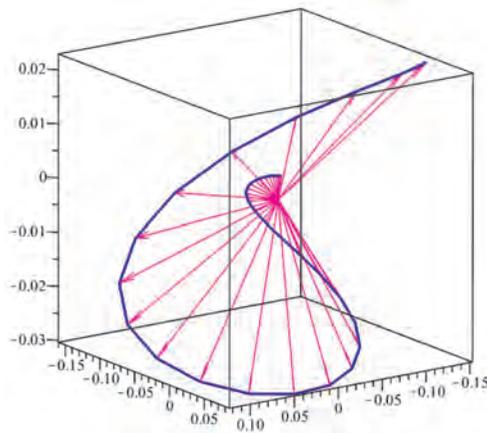


Рисунок 8 – Линейное ускорение $-a_{05}$ начала O_5 подвижной системы координат $O_5X_5Y_5Z_5$ для 36 положений RRRRT манипулятора.

Заключение. В этом исследовании предложен алгоритм решения прямой позиционной задачи манипуляторов с использованием методов Денавита-Хартенберга и Ньютона-Эйлера. По приведенному алгоритму прямой позиционной задачи кинематики разработана программа для RRRRT манипулятора в программной среде Maple, которая позволила получить результаты кинематических характеристик в виде 3D-графиков. Такие графики позволяют визуально увидеть, как изменяются

в пространстве модули и направления приведенных параметров манипулятора в графиках, в зависимости от положения манипулятора в пространстве.

REFERENCES

- 1 Mittal RK, Nagrath IJ. Robotics and Control. 6th ed. New Delhi, India: Tata McGraw Hill Publishing Company Limited; 2003.
- 2 Saha SK. Introduction to Robotics. 2nd ed. New Delhi, India: McGraw Hill Publication Private Limited; 2008.
- 3 Koyuncu B, Guzel M. Software development for the kinematic analysis of a Lynx 6 robot arm. International Journal of Engineering and Applied Sciences. 2008; 4(4):230-5.
- 4 Manjaree S. (2013), Inverse Kinematic Analysis of 3-degree-of-freedom Robotic Manipulator using three different methods, International Journal of Advances in Science and Technology, 6(3), 71-80.
- 5 Shaoqiang Y, Zhong L, Zhingshan L. Modeling and simulation of robot based on MATLAB/Sim-Mechanics. Proceedings of 27th Chinese Control Conference; Kunming, Yunnan, China. 2008. p. 161-5.
- 6 Manjaree S, Nakra BC, Agarwal V. Comparative analysis for kinematics of 5-DOF industrial robotic manipulator. Acta Mechanica et Automatica. 2015; 9(4):229-40.
- 7 K. S. Fu, R.C. Gonzalez, C.S.G. Lee. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence. McGraw-Hill Book Company (1987).

М. У. УТЕНОВ, Д. Қ. БАЛТАБАЙ

ал-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

MAPLE БАҒДАРЛАМАЛАУ ОРТАСЫНДА RRRRT МАНИПУЛЯТОР КИНЕМАТИКАСЫНЫҢ ТУРА ПОЗИЦИЯЛЫҚ ЕСЕБІ

Бұл мақалада Maple бағдарламалық ортасын қолдана отырып, авторлар жасаған RRRRT манипуляторының 3D моделі мен оның қозғалысының тура позициялық есебі келтірілген. Бұл жұмыста осы манипулятордың кинематикасының позициялық есебі егжей-тегжейлі зерттелген. Манипулятордың кинематикалық сипаттамаларын табу үшін денавит-Хартенберг және Ньютон-Эйлер әдістері ұтымды пайдаланылды. Нәтижелер 3D графиктер түрінде кинематикалық сипаттамалардың нәтижелерін алуға мүмкіндік беретін Maple бағдарламалық ортасында алынды. Мұндай графиктер кеңістіктегі манипулятордың жағдайына байланысты модульдердің кеңістіктегі қалай өзгеретінін және графиктегі манипулятордың көрсетілген параметрлерінің бағыттарын көзбен көруге мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: *манипулятордың қозғалысы, кинематика, позициялық есеп, манипулятордың 3D моделі, Maple.*

М. У. UTENOV, D. K. BALTABAY

al-Faraby Kazakh national univercity, Almaty, Kazakhstan

DIRECT POSITIONAL KINEMATICS PROBLEM OF THE RRRRT MANIPULATOR IN THE MAPLE SOFTWARE ENVIRONMENT

This article presents the direct positional problem of the RRRRT manipulator created by the authors of the 3D model and its movement using the Maple software environment. In this paper, the positional kinematics problem of this manipulator is studied in detail. To find the kinematic characteristics of the manipulator, the Denavit-Hartenberg and Newton-Euler methods were rationally used. The results were obtained in the Maple software environment, which allows you to obtain the results of kinematic characteristics in the form of 3D graphs. Such graphs allow you to visually see how the modules and directions of the given parameters of the manipulator in the graphs change in space, depending on the position of the manipulator in space.

Keywords: *manipulator movement, kinematics, positional problem, 3D model of manipulator, Maple.*