ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:536.2, 539.4
https://doi.org/10.47533/2023.1606-146X.43

Л. А. АЛЕКСЕЕВА[1], Д. А. ПРИКАЗЧИКОВ[2], А. Н. ДАДАЕВА[2], Н. Ж. АЙНАКЕЕВА[4,5,6]*

[1]Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан
[2]Keele University, Staffordshire, United Kingdom
[3]Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И.Сатпаева, г. Алматы, Казахстан
[4]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
[5]Институт механики и машиноведения им. академика У. А. Джолдасбекова, г. Алматы, Казахстан
[6]Университет Нархоз, г. Алматы, Казахстан,

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ И ИХ РЕШЕНИЯ

Рассматриваются пространственно-одномерные краевые задачи несвязанной термоупругости, которые можно использовать для исследования различных стержневых конструкций в условиях теплового нагрева. Как известно, стержневые конструкции являются соединительными и передаточными звеньями различных деталей машин и механизмов. Здесь предлагается единая методика решения различных краевых задач, типичных для практических приложений. Рассматриваются задачи определения термонапряженного состояния термоупругого стержня при различных краевых условиях на его концах и действующих силовых и тепловых источников по всей длине стержня. На основе метода обобщенных функций построены обобщенные решения нестационарных и стационарных прямых и полуобратных краевых задач при действии силовых и тепловых источников различного типа, в том числе стационарных источников периодических колебаний. Действующие источники могут быть заданы и сингулярными обобщенными функциями при различных краевых условиях на концах стержня. Рассмотрены ударные упругие волны, которые возникают в таких конструкциях при действии ударных нагрузок. Получены регулярные интегральные представления обобщенных решений, которые дают аналитическое решение поставленных краевых задач. Особенность построенных решений делает их удобными для исследования сетевых термоупругих систем, которые можно моделировать термоупругими графами.

Ключевые слова*: термоупругость, сдвиг, напряжения, температура, методы обобщенных функций, преобразование Фурье, граничные уравнения, стержень.*

* E-mail корреспондирующего автора:nursaule_math@mail.ru

Введение. Исследования по термоупругости возникли при решении задач о термоупругих напряжениях в элементах различных конструкций на основе теории, разработанной Duhamel J. [1] и Neumann F. [2]. В работах Biot M.A. [3] было впервые дано полное обоснование основных соотношений и уравнений связанной термоупругости с использованием термодинамики необратимых процессов и сформулированы вариационные теоремы.

В книге Novacki W. [4] подробно изложены математические модели для описания термонапряженного состояния деформируемых твердых тел и сред, движения которых, температура и напряженно-деформированное состояние зависят от действующих силовых и тепловых источников.

Подробный обзор работ для разных моделей термоупругих сред и состояний проведен в энциклопедии Hetnarski R. [5].

В работах Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г. [6] ранее был разработан метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) для решения трехмерных и двумерных краевых задач связанной и несвязанной термоупругости с использованием преобразования Лапласа или Фурье по времени для построения разрешающих граничных интегральных уравнений краевых задач. Построить такие уравнения в исходном пространстве-времени для уравнений связанной термоупругости не удается из-за особенностей фундаментальных решений, аналитические формулы для которых удается построить только для их трансформант.

Одна из основных проблем метода ГИУ в пространстве преобразования Фурье-Лапласа – неустойчивость численных процедур обращения трансформант решений с ростом времени, что не позволяет в расчетах строить решения в пространстве оригиналов при даже небольших временах для колебательных процессов. Поэтому остается актуальной проблема построения оригиналов решений краевых задач термоупругости.

Здесь рассмотрены пространственно-одномерные нестационарные краевые задачи несвязанной термоупругости, которые можно использовать для исследования различных стержневых конструкций. Эта модель хорошо описывает термодинамические процессы при малых скоростях деформаций, и здесь предлагается единая методика решения различных краевых задач, типичных для практических приложений.

1. Постановка нестационарных краевых задач термоупругости. Рассматривается термоупругий стержень длины $2L$, который характеризуется плотностью ρ, жесткостью EJ и термоупругими константами γ и κ.

Перемещения сечений стержня и температурное поле стержня описывается системой гиперболо-параболических уравнений вида [4]:

$$\rho c^2 u,_{xx} - \rho u,_{tt} - \gamma\theta,_x + \rho F_1 = 0, \tag{1}$$

$$\theta,_{xx} - \kappa^{-1}\theta,_t + F_2 = 0. \tag{2}$$

Здесь $u(x,t)$ - компоненты продольных смещений, $\theta(x,t)$ - относительная температура, F_1 - продольная компонента объемной силы, c - скорость распространения термоупругих волн в стержне. Предполагается, что функции $F_1(x,t), F_2(x,t)$ принадлежат классу обобщенных функций медленного роста, что позволяет моделировать термодинамические процессы в стержнях при действии сосредоточенных как силовых, так и тепловых источников различного типа.

Здесь и далее используем для краткости записи обозначения производной: $u_{i},_{j} = \partial u_i / \partial x_j = \partial_j u_i$.

Термоупругое напряжение в стержне определяется соотношением Дюамеля-Неймана:

$$\sigma(x,t) = \rho c^2 u,_x (x,t) - \gamma\theta(x,t) \ . \tag{3}$$

Рассмотрим ряд прямых, характерных для инженерной практики, краевых задач термоупругости, решения которых удовлетворяют следующим начальным и краевым условиям.

Начальные условия (условия Коши): при t=0 смещения, скорости и температура известны:

$$u(x,0) = u_0(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), |x| \le L \ , \ \partial_t u(x,0) = \dot{u}_0(x), |x| < L. \tag{4}$$

На концах стержня $(x = x_1 = -L, x = x_2 = L)$ заданы *краевые условия*, которые различны в зависимости от рассматриваемых краевых задач. Здесь построим решения следующих краевых задач.

Краевая задача 1 (КЗ 1). Известны перемещения концов стержня и температура на них:

$$u(x_j,t) = w_j(t), \quad \theta(x_j,t) = \theta_j(t), \quad j = 1,2. \tag{5}$$

Краевая задача 2 (КЗ 2). Известны напряжения на концах стержня и тепловые потоки на них:

$$\sigma(x_j,t) = p_j(t), \quad \theta,_x (x_j,t) = q_j(t), \quad j = 1,2. \tag{6}$$

Предполагается, что граничные функции удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$u_j(t) \in C(0,\infty), \ \theta_j(t) \in C(0,\infty), \ \ q_j(t) \in L_1(0,\infty) \ , \ p_j(t) \in L_1(0,\infty). \tag{7}$$

2. Ударные волны. Система уравнений (1), (2) смешанного гиперболо-параболического типа. В силу гиперболичности, возможно возникновение ударных волн при ударных воздействиях на концах стержня.

Для вывода условий на фронтах ударных волн рассмотрим решения системы уравнений (1), (2) в классе обобщенных функций. Согласно правилам дифференцирования регулярных обобщенных функций [9,10] для ударных волн, эти уравнения примут вид:

$$\begin{gathered}\left(\rho c^2 u,_{xx} - \rho u,_{tt} - \gamma\theta,_x\right) + \rho F_1 + \left(\left[\rho c^2 u,_x - \gamma\theta\right]\nu_x - \rho\left[u,_t\right]\nu_t\right)\delta_F(x,t) + \\ + \rho c^2 \partial_x [u]\delta_F(x,t) - \rho\partial_t [u]\delta_F(x,t) = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\left(\theta,_{xx} - \kappa^{-1}\theta,_t\right) + F_2 + \partial_x\left([\theta]\nu_x\delta_F\right) + \left[\theta,_x\right]\nu_x\delta_F - \kappa^{-1}[\theta]\nu_t\delta_F = 0.$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок указанных в них функций на фронтах ударных волн, $\delta_F(x,t)$ - сингулярная обобщенная функция, простой слой на волновом фронте - характеристической поверхности $F \in R^2 : c^2\nu_x^2 - \nu_t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\dfrac{\nu_t}{\nu_x}$.

Здесь $\nu = (\nu_x, \nu_t)$ - нормаль к F в D^- , с - скорость распространения ударной волны, на которой напряжения могут иметь скачок. Из уравнений (13), с учетом (1), следует:

$$\begin{gathered}\left(\left[\rho c^2 u,_x - \gamma\theta\right]_F \nu_x - \rho\left[u,_t\right]_F \nu_t\right)\delta_F + \rho c^2\partial_x\left(\left[u\right]_F \delta_F\right) - \rho\partial_t\left(\left[u\right]_F \delta_F\right) = 0,\\ \partial_x\left(\left[\theta\right]_F \nu_x\delta_F\right) + \left(\nu_x\left[\theta,_x\right]_F - \kappa^{-1}\left[\theta\right]_F \nu_t\right)\delta_F = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Поскольку, в силу сплошности среды, $\left[u(x,t)\right]_{F_t} = 0$, и в области дифференцируемости ударные волны являются обобщенными решениями (1), из (8), в силу независимости слагаемых сингулярных функций, получим условие непрерывности температуры на фронте ударной волны: $\left[\theta(x,t)\right]_{F_t} = 0$. Здесь фронт волны имеет простой вид: $F_t = \left\{(x,t) : x \pm ct) = x^0\right\}$.

Это точка разрыва производных на интервале $x \in (-L, L)$, которая движется со скоростью c от точки x^0, где она формируется в ту или другую сторону. В результате из (9) следует, что на фронтах ударных волн должны выполняться следующие условия на скачки:

$$\left[u\right]_{F_t} = 0\,,\ \left[\sigma\right]_{F_t} = -\rho c\left[\dot{u}\right]_{F_t}, \quad \left[\theta\right]_{F_t} = 0, \quad \left[\theta,_x\right]_{F_t} = 0.$$

Первое условие непрерывности перемещений – необходимое условие для сохранения сплошности среды. Второе условие описывает скачок напряжений (*удар*), который приводит к скачку скоростей на фронте волны. Из третьего и четвертого следует, что температура и тепловой поток непрерывны на фронте ударной волны. Это отличает модель связанной термоупругости от несвязанной, в которой тепловой поток имеет на фронте скачок, пропорциональный скачку скорости смещений стержня. Т.е. в отличие связанной термоупругости, термоударных волн в этой модели нет. Ударные волны чисто упругие.

Единственность решения начально-краевых задач с учетом ударных волн для модели связанной термоупругости показана нами в [8,9]. Поскольку модель несвязанной термоупругости является частным случаем этой модели, то отсюда следует единственность рассмотренных здесь краевых задач.

3. Обобщенное решение начально-краевой задачи. Метод обобщенных функций. Для определения решения задачи поставим краевую задачу в пространстве двухмерных обобщенных вектор-функций медленного роста:

$$D'(R^2) = \{\hat{f} = (\hat{f}_1(x,t), \hat{f}_2(x,t)), \quad (x,t) \in R^2\}\ .$$

Для этого введем обобщенную вектор-функцию (помечаем их шапочкой):

$$(\hat{u}_1,\hat{u}_2)=\{\hat{u},\hat{\theta}\}=\left\{u(x,t)H\left(L-|x|\right)H(t),\theta(x,t)H\left(L-|x|\right)H(t)\right\},$$

где $u(x,t),\theta(x,t)$ - классическое решение рассматриваемой краевой задачи, $H(...)$ - функция Хевисайда. Вектор-функция $(\hat{u}_1,\hat{u}_2)$ в $D'(R^2)$ удовлетворяет системе уравнений вида:

$$c^2\hat{u}_{,xx}-\hat{u}_{tt}-\gamma\rho^{-1}\hat{\theta}_{,x}+\hat{F}_1=-\left\{\dot{u}_0(x)\delta(t)+u_0(x)\delta'(t)\right\}H(L-|x|)+$$

$$+c^2H(t)\left\{\left(p_1(t)-\tilde{\gamma}\theta_1(t)\right)\delta(x+L)-\left(p_2(t)-\tilde{\gamma}\theta_2(t)\right)\delta(x-L)\right\}+$$

$$+c^2\ H(t)\left\{w_1(t)\delta'(x+L)-w_2(t)\delta'(x-L)\right\},$$

$$\hat{\theta}_{,xx}-\kappa^{-1}\hat{\theta}_{,t}+\hat{F}_2=$$

$$=H(t)\delta(L+x)q_1(t)-H(t)\delta(L-x)q_2(t)+$$

$$+\theta_1(t)H(t)\delta'(L+x)-\theta_2(t)H(t)\delta'(L-x)-\kappa^{-1}\theta_0(x)\delta(t)H\left(L-|x|\right).$$

Здесь $\delta(t)$ - обобщенная дельта-функция, $\tilde{\gamma}=\dfrac{\gamma}{\rho c^2}$. Используя свойство фундаментальных решений уравнений этой системы $U_j(x,t)$, ее решение можно представить в виде следующей свертки:

$$u(x,t)H(t)H\left(L-|x|\right)=U_1*\hat{F}_1-\tilde{\gamma}U_{1,x}*\hat{\theta}(x,t)+$$

$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\left\{\left(p_k(t)-\tilde{\gamma}\,\theta_k(t)\right)\underset{t}{*}U_1(x-(-1)^kL,t)+w_k(t)\underset{t}{*}U_{1,x}(x-(-1)^kL,t)\right\}+ \tag{10}$$

$$+\left\{\dot{u}_0(x)H(L-|x|)\underset{x}{*}U_1+u_0(x)H(L-|x|)\underset{x}{*}U_{1,t}\right\},$$

$$\theta(x,t)H(t)H\left(L-|x|\right)=\hat{F}_2(x,t)*U_2(x,t)+$$

$$+H(t)\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\left\{q_k(t)\underset{t}{*}U_2\left(x-(-1)^kL,t\right)+\theta_k(t)H(t)\underset{t}{*}U_{2,x}\left(x-(-1)^kL,t\right)\right\}- \tag{11}$$

$$-\kappa^{-1}\theta_0(x)H\left(L-|x|\right)\underset{x}{*}U_2(x,t).$$

Здесь $U_j(x,t)\ (j=1,2)$ – это фундаментальные решения волнового уравнения (1) при $F_1=\delta(x)\delta(t)$ и уравнения теплопроводности при $F_2=\delta(x)\delta(t),$ которые хорошо известны [9].

Формулы (10), (11) определяют перемещение и температуру внутри стержня по известным перемещениям, напряжениям, температуре и тепловым потокам на его концах. Однако для корректно поставленных краевых задач из 8 граничных функций известны только 4. Для определения неизвестных четырех следует построить разрешающие граничные уравнения на левом и правом конце стержня. Для этого рассмотрим решения (10), (11) в пространстве преобразования Фурье по времени.

4. Трансформанта Фурье по времени функции Грина волнового уравнения. Функция Грина волнового уравнения $U_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению Даламбера:

$$c^2\frac{\partial^2\hat{U}_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\hat{U}_1}{\partial t^2}+\delta(x)\delta(t)=0\ ,$$

и *условиям излучения:* $\hat{U}_1(x,t)=0$ при $t<0$, $\hat{U}(x,t)=0$ при $\|x\|>ct$.

Ее трансформанта Фурье является решением обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2\bar{U}_1}{dx^2}+k^2\bar{U}_1+A^{-2}\delta(x)=0,\quad k=\frac{\omega+i0}{c},$$

Она и ее производная имеют вид:

$$\bar{U}_1(x,\omega)=-\frac{\sin\left(k|x|\right)}{2c(\omega+i0)},\qquad \bar{U}_{1,x}=-\frac{1}{2c^2}\cos\left(k|x|\right)\mathrm{sgn}(x).\ (12)$$

Легко видеть, что

$$\bar{U}_1(0,\omega)=0,\qquad \bar{U}_{1,x}(\pm0,\omega)=\mp0{,}5A^{-2}.\tag{13}$$

Это свойство используем для построения разрешающих уравнений краевых задач.

5. Трансформанта Фурье по времени функции Грина уравнения теплопроводности. Трансформанта Фурье функции Грина уравнения теплопроводности удовлетворяет уравнению: $\frac{d^2\bar{U}_2}{dx^2}+i\omega\kappa^{-1}\bar{U}_2+\delta(x)=0$ и условиям симметрии: $\bar{U}_2(x,\omega)=\bar{U}_2(-x,\omega),\quad \bar{U}_2(x,\omega)\underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Обозначим $k=\sqrt{i\omega\kappa^{-1}}$. Нетрудно видеть, что функция $\bar{U}_2(x,\omega)=-\frac{\sin k|x|}{2k}$, удовлетворяет данному дифференциальному уравнению и

$$\bar{U}_2(0,\omega)=0,\quad \bar{U}_{2,x}(\pm0,\omega)=\mp0{,}5\ .\tag{14}$$

Для решения поставленных краевых задач рассмотрим отдельно обобщенные решения уравнения теплопроводности и волнового уравнения.

6. Решение температурных краевых задач в пространстве преобразования Фурье по времени. Определим трансформанту Фурье температуры стержня, используя ее представление (21) и свойства преобразования Фурье сверток обобщенных функций. В результате получим:

$$\begin{gathered}\bar{\theta}(x,\omega)H\left(L-|x|\right)=\bar{F}_2(x,\omega)\underset{x}{*}\bar{U}_2(x,\omega)+\kappa^{-1}\theta_0(x)H\left(L-|x|\right)\underset{x}{*}\bar{U}_2(x,\omega)+\\+\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\left\{\bar{q}_k(\omega)\bar{U}_2\left(x-(-1)^kL,\omega\right)+\bar{\theta}_k(\omega)\bar{U}_{2,x}\left(x-(-1)^kL,\omega\right)\right\}.\end{gathered}\tag{15}$$

Переходя к пределу при $x\to\pm L,\ x\in(-L,L)$ в формуле (15) и используя свойство преобразования Фурье производной фундаментального решения (14), из этих формул получим граничные уравнения для определения искомых граничных функций:

$$0{,}5\bar{\theta}(-L,\omega) = \bar{F}_2(x,\omega) \underset{x}{*} \bar{U}_2(x,\omega)\Big|_{x=-L} - \kappa^{-1}\theta_0(x)H\left(L-|x|\right) \underset{x}{*} \bar{U}_2(x,\omega)\Big|_{x=-L} +$$
$$+\bar{q}_2(\omega)\bar{U}_2\left(-2L,\omega\right) + \bar{\theta}_2(\omega)\bar{U}_{2,x}\left(-2L,\omega\right),$$

$$0{,}5\bar{\theta}(L,\omega) = \bar{F}_2(x,\omega) \underset{x}{*} \bar{U}_2(x,\omega)\Big|_{x=L} - \kappa^{-1}\theta_0(x)H\left(L-|x|\right) \underset{x}{*} \bar{U}_2(x,\omega)\Big|_{x=L} -$$
$$-\bar{q}_1(\omega)\bar{U}_2\left(2L,\omega\right) - \bar{\theta}_1(\omega)\bar{U}_{2,x}\left(2L,\omega\right).$$

Отсюда, с учетом (14), следует теорема.

Теорема. *Трансформанты Фурье по времени граничных функций краевых задач для уравнения теплопроводности удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений вида:*

$$\begin{Bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ \bar{U}_{2,x}\left(2L,\omega\right) & \bar{U}_2\left(2L,\omega\right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1(\omega) \\ \bar{q}_1(\omega) \end{Bmatrix} +$$
$$+\begin{Bmatrix} -\bar{U}_{2,x}\left(-2L,\omega\right) & -\bar{U}_2\left(-2L,\omega\right) \\ 0{,}5 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_2(\omega) \\ \bar{q}_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1(-L,\omega) \\ \bar{Q}_2(L,\omega) \end{Bmatrix}, \tag{16}$$

где правые части определены начальными условиями и действующими тепловыми источниками:

$$\bar{Q}_1(x,\omega) = \bar{F}_2(x,\omega) \underset{x}{*} \bar{U}_2(x,\omega)\Big|_{x=-L} - \kappa^{-1}\theta_0(x)H\left(L-|x|\right) \underset{x}{*} \bar{U}_2(x,\omega)\Big|_{x=-L},$$
$$\bar{Q}_2(x,\omega) = \bar{F}_2(x,\omega) \underset{x}{*} \bar{U}_2(x,\omega)\Big|_{x=L} - \kappa^{-1}\theta_0(x)H\left(L-|x|\right) \underset{x}{*} \bar{U}_2(x,\omega)\Big|_{x=L}.$$

Полученная система уравнений позволяет решить любые краевые задачи при заданных двух граничных функций температуры (или теплового потока) на концах стержня. Две другие определяются решением этой системы уравнений.

Для решения всех поставленных температурных краевых задач удобно рассмотреть расширенную систему уравнений вида:

$$\begin{Bmatrix} 0{,}5 & 0 & -\bar{U}_{2,x}\left(-2L,\omega\right) & -\bar{U}_2\left(-2L,\omega\right) \\ \bar{U}_{2,x}\left(2L,\omega\right) & \bar{U}_2\left(2L,\omega\right) & 0{,}5 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1(\omega) \\ \bar{q}_1(\omega) \\ \bar{\theta}_2(\omega) \\ \bar{q}_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1(-L,\omega) \\ \bar{Q}_2(L,\omega) \\ \bar{b}_3(\omega) \\ \bar{b}_4(\omega) \end{Bmatrix}, \tag{17}$$

где последние два уравнения – это краевые условия на концах стержня:

$$\begin{Bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1(\omega) \\ \bar{q}_1(\omega) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_2(\omega) \\ \bar{q}_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{b}_3(\omega) \\ \bar{b}_4(\omega) \end{Bmatrix}. \tag{18}$$

При заданных коэффициентах a_{ij} и правой части $\bar{b}_i(\omega)$ этой линейной алгебраической системы уравнений ее решение имеет вид:

$$D_j(\omega)=\frac{\Delta_j(\omega)}{\Delta(\omega)},\quad D_j(\omega)=\left\{\bar{\theta}_1(\omega)\quad \bar{q}_1(\omega)\quad \bar{\theta}_2(\omega)\quad \bar{q}_2(\omega)\right\}, \tag{19}$$

где $\Delta(\omega)$ - основной определитель матрицы системы (17), $\Delta_j(\omega)$ вспомогательный определитель матрицы, которая определяется простым правилом Крамера для каждого $D_j(\omega)$.

В качества примера построим решения для температурного поля некоторых краевых задач.

6.1. Температурное решение для КЗ1. В этом случае известны температура на концах стержня: $\bar{\theta}(x_j,\omega)=\bar{\theta}_j(\omega),\quad j=1,2$. Тогда краевые условия (18) имеют вид:

$$\begin{Bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\theta}_1(\omega)\\ \bar{q}_1(\omega)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\theta}_2(\omega)\\ \bar{q}_2(\omega)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{b}_3(\omega)\\ \bar{b}_4(\omega)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{\theta}_1(\omega)\\ \bar{\theta}_2(\omega)\end{Bmatrix}.$$

Подставляя эти коэффициенты и левую часть уравнений (17), получим решение (19) для определения теплового потока. Оно имеет вид:

$$\bar{q}_1(\omega)=\frac{1}{\bar{U}_2(2L,\omega)}\left(\bar{Q}_2(L,x)-\bar{U}_{2,x}(2L,\omega)\bar{\theta}_1(\omega)-0,5\bar{\theta}_2(\omega)\right),$$

$$\bar{q}_2(\omega)=-\frac{1}{\bar{U}_2(-2L,\omega)}\left(\bar{Q}_1(-L,x)+\bar{U}_{2,x}(-2L,\omega)\bar{\theta}_2(\omega)-0,5\bar{\theta}_1(\omega)\right).$$

6.2. Решение КЗ 2. Здесь известны тепловые потоки на концах стержня: $\bar{\theta},_x(x_j,\omega)=\bar{q}_j(\omega), j=1,2$. Краевые условия (18) имеют следующий вид:

$$\begin{Bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\theta}_1(\omega)\\ \bar{q}_1(\omega)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\theta}_2(\omega)\\ \bar{q}_2(\omega)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{b}_3(\omega)\\ \bar{b}_4(\omega)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{q}_1(\omega)\\ \bar{q}_2(\omega)\end{Bmatrix}.$$

Тогда можно вычислить неизвестную температуру:

$$\bar{\theta}_1(\omega)=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad \bar{\theta}_2(\omega)=\frac{\Delta_2}{\Delta}\text{, где } j=1,2,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}0,5 & -\bar{U}_2,_x(-2L,\omega)\\ \bar{U}_2,_x(2L,\omega) & 0,5\end{vmatrix}=0,25+\bar{U}_2,_x(-2L,\omega)\bar{U}_2,_x(2L,\omega),$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\bar{Q}_1+\bar{U}_2(-2L,\omega)\bar{q}_2 & -\bar{U}_2,_x(-2L,\omega)\\ \bar{Q}_2-\bar{U}_2(2L,\omega)\bar{q}_1 & 0,5\end{vmatrix}=$$

$$=0,5\left(\bar{Q}_1+\bar{U}_2(-2L,\omega)\bar{q}_2\right)+\bar{U}_2,_x(-2L,\omega)\left(\bar{Q}_2-\bar{U}_2(2L,\omega)\bar{q}_1\right),$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}0,5 & \bar{Q}_1+\bar{U}_2(-2L,\omega)\bar{q}_2\\ \bar{U}_2,_x(2L,\omega) & \bar{Q}_2-\bar{U}_2(2L,\omega)\bar{q}_1\end{vmatrix}=$$

$$=0,5\left(\bar{Q}_2-\bar{U}_2(2L,\omega)\bar{q}_1\right)-\bar{U}_2,_x(2L,\omega)\left(\bar{Q}_1+\bar{U}_2(-2L,\omega)\bar{q}_2\right).$$

7. Решение упругой краевой задачи в пространстве преобразования Фурье по времени

Определим трансформанту Фурье перемещений стержня, используя их представление (10), (11) и свойства преобразования Фурье сверток обобщенных функций. Поскольку температура стержня определена, то ее можно рассматривать как внешнюю заданную силу, которую вместе с действующей на стержень силой обозначим известными начальными условиями:

$$\begin{gathered}\bar{\mathrm{P}}(x,\omega)=\bar{F}_1*\bar{U}_1+\left\{\left(\dot{u}_{0(x)}-i\omega u_0(x)\right)H(L-|x|)\right\}\underset{x}{*}\bar{U}_1-\\-\tilde{\gamma}\bar{U}_{1,x}*\bar{\theta}(x,\omega)-c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\,\tilde{\gamma}\,\bar{\theta}_k(\omega)\bar{U}_1(x-(-1)^kL,\omega)\,.\end{gathered}\tag{20}$$

Из формулы (10) следует представление перемещений в пространстве преобразования Фурье по времени:

$$\begin{gathered}\bar{u}(x,\omega)H(L-|x|)=\bar{\mathrm{P}}(x,\omega)+\\+c^2\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left\{\left(\bar{p}_j(\omega)\right)\bar{U}_1(x-(-1)^jL,\omega)+\bar{w}_j(\omega)\bar{U}_{1,x}(x-(-1)^jL,\omega)\right\}.\end{gathered}$$

С учетом вида функции Грина волнового уравнения (12), получим обобщенное решение краевых задач в виде:

$$\begin{gathered}\bar{u}(x,\omega)H(L-|x|)=\left\{\bar{\mathrm{P}}(x,\omega)-0,5k^{-1}\bar{p}_1(\omega)\sin\left(k|x+L|\right)+0,5\bar{p}_2(\omega)k^{-1}\sin\left(k|x-L|\right)+\right.\\\left.-0,5\bar{w}_1(\omega)\cos\left(k|x+L|\right)\operatorname{sgn}(x+L)+0,5\bar{w}_2(\omega)\cos\left(k|x-L|\right)\operatorname{sgn}(x-L)\right\}.\end{gathered}\tag{21}$$

Если перейти в этой формуле к пределу к концам интервала, с учетом свойства производной функции Грина (12), получим уравнения для определения неизвестных граничных функций:

$$0,5\bar{w}_1(\omega)=\bar{\mathrm{P}}(x,\omega)\Big|_{x=-L}-0,5k^{-1}\bar{p}_2(\omega)\sin(2Lk)+0,5\bar{w}_2(\omega)\cos(2Lk),$$

$$0,5\bar{w}_2(\omega)=\bar{\mathrm{P}}(x,\omega)\Big|_{x=L}+0,5k^{-1}\bar{p}_1(\omega)\sin(2Lk)-0,5\bar{w}_1(\omega)\cos(2Lk).$$

Эту систему перепишем в матричном виде:

$$\begin{gathered}\left\{\begin{matrix}0,5 & 0\\ 0,5\cos(2Lk) & -0,5k^{-1}\sin(2Lk)\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\bar{w}_1(\omega)\\ \bar{p}_1(\omega)\end{matrix}\right\}+,\\+\left\{\begin{matrix}-0,5\cos(2Lk) & 0,5k^{-1}\sin(2Lk)\\ 0,5 & 0\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\bar{w}_2(\omega)\\ \bar{p}_2(\omega)\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\bar{\mathrm{P}}(-L,\omega)\\ \bar{\mathrm{P}}(L,\omega)\end{matrix}\right\}\end{gathered}\tag{22}$$

В зависимости от решаемой краевой задачи из этой системы двух линейных алгебраических уравнений получим разрешающие граничные уравнения для определения трансформант неизвестных граничных функций.

Решение КЗ 1. Известны $\bar{u}\left(x_j,\omega\right)=\bar{w}_j\left(\omega\right),\ j=1,2$. Тогда из (22) получим уравнения для определения граничных напряжений:

$$\bar{p}_1(\omega)=-\frac{2\bar{\mathrm{P}}(L,\omega)-\bar{w}_1(\omega)\cos\left(2Lk\right)-\bar{w}_2(\omega)}{k^{-1}\sin\left(2Lk\right)}\ ,\ \bar{p}_2(\omega)=\frac{2\bar{\mathrm{P}}(-L,\omega)+\bar{w}_2(\omega)\cos\left(2Lk\right)-\bar{w}_1(\omega)}{k^{-1}\sin\left(2Lk\right)}\ .$$

Решение КЗ 2. Известны $\bar{\sigma}(x_j,\omega)=\bar{p}_j(\omega),\ j=1,2$. Тогда из (46) получим уравнения для определения граничных перемещений:

$$\begin{Bmatrix} 1 & -\cos\left(2Lk\right) \\ \cos\left(2Lk\right) & 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{w}_1(\omega) \\ \bar{w}_2(\omega) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2\bar{\mathrm{P}}(-L,\omega)-k^{-1}\bar{p}_2(\omega)\sin\left(2Lk\right) \\ 2\bar{\mathrm{P}}(L,\omega)+k^{-1}\bar{p}_1(\omega)\sin\left(2Lk\right) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \bar{f}_1(\omega) \\ \bar{f}_2(\omega) \end{Bmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\bar{w}_j(\omega)=\frac{\Delta_j(\omega)}{\Delta(\omega)},\quad \Delta(\omega)=1+\cos^2\left(2Lk\right),$$

$$\Delta_1=\bar{f}_1(\omega)+\bar{f}_2(\omega)\cos\left(2Lk\right),\quad \Delta_2=\bar{f}_2(\omega)-\bar{f}_1(\omega)\cos\left(2Lk\right)\ .$$

Аналогично тепловой задаче удобно ввести расширенную матрицу краевых задач и решать систему уравнений вида:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & -\cos\left(2Lk\right) & k^{-1}\sin\left(2Lk\right) \\ \cos\left(2Lk\right) & -k^{-1}\sin\left(2Lk\right) & 1 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix} \bar{w}_1(\omega) \\ \bar{p}_1(\omega) \\ \bar{w}_2(\omega) \\ \bar{p}_2(\omega) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2\bar{\mathrm{P}}(-L,\omega) \\ 2\bar{\mathrm{P}}(L,\omega) \\ d_3(\omega) \\ d_4(\omega) \end{Bmatrix}$$

где последние два уравнения – это краевые условия на перемещения и напряжения на концах стержня (с учетом известной температуры):

$$\begin{Bmatrix} \beta_{31} & \beta_{32} \\ \beta_{41} & \beta_{42} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{w}_1(\omega) \\ \bar{p}_1(\omega) \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{43} & \beta_{44} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{w}_2(\omega) \\ \bar{p}_2(\omega) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \bar{b}_3(\omega) \\ \bar{b}_4(\omega) \end{Bmatrix}\ .$$

При заданных коэффициентах β_{ij} и правой части $\bar{b}_i(\omega)$ этой линейной алгебраической системы уравнений ее решение определяется простым правилом Крамера, аналогично (19).

Заключение. Теперь в формуле (21) все граничные функции определены. Выполняя обратное преобразование Фурье, получим оригинал решения в исходном пространстве-времени. Построение оригинала зависит от вида преобразования Фурье граничных функций и должно рассматриваться отдельно для конкретной краевой задачи. Подставляя известные значения температур и перемещений в формулу (3), получим термоупругие напряжения.

Как показано в статье, метод обобщенных функций позволяет строить по одному алгоритму решения как классических краевых задач термоупругости, так и других с различными линейно связанными краевыми условиями, что очень удобно при программировании и проведении численных экспериментов. Это особенность построенных решений делает их удобными для исследования сетевых термоупругих систем, которые можно моделировать термоупругими стержневыми графами.

Отметим, что изучением термонапряженного состояния стержней с различными физико-механическими свойствами занимается немного авторов, и в основном на основе численных конечно-элементных и разностных методов для исследования статического и квазистатического напряженно-деформированного состояния [9,10]. Ранее в работах [11] были решены и исследованы динамические краевые задачи динамики термоупругих стержней (связанная термоупругость) при действии источников низко- и высокочастотных стационарных колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержки Комитета науки Министерства образования и науки республики Казахстан (грант № AP19674789).

ЛИТЕРАТУРА

1 Duhamel J. Second memoire sur les phenomens thermomechanique/ J. Duamel // I.Ecole Polytechniqut. – 1837. V. 15, p. 1–15.

2 Neumann F.E. Die Gezetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimirten order ungleichfororming erwarmten uncrystallinischen Korpern / F.E. Neumann // Abhandl. Konigl. Akad. Wissen. Berlin. – 1841. – №2. – Teil. S. – 254 p.

3 Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics/ Journal of Applied Physics, 1956. – V. 27, – No 3. – p. 240 – 253.

4 Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий; М.: Мир, 1970. – с. 9 – 89.

5 Hetnarski R.B. Encyclopedia of Thermal Stresses / R.B.Hetnarski; Springer, 2014. DOI 10.1007/978-94-007-2739-7.

6 Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи ма-тематической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелиа, М.О. Башелейшвили, Т.В.Бурчуладзе; М.: Наука, 1976. – 664 с.

7 Алексеева Л.А. Стационарные краевые задачи динамики термоупругих стержней / Л.А.Алексеева // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2014. – № 3. – С.144-152.

8 Alexeyeva L.A., Akhmetzhanova M.M. Stationary oscillations of thermoelastic rod under action of external disturbances / L.A.Alexeyeva , M.M. Akhmetzhanova // Global Journal of Engineering Science and Research Management. – 2018. – № 2. – Volume 5. – p. 33-43. DOI: 10.5281/zenodo.1186513.

9 Владимиров В.С. Уравнения математической физики / Владимиров В.С. М.: Наука, 1981. – с. 84-160.

10 Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N. Shock thermoelastic waves as generalized solutions of thermoelasticity equations / L.A.Alexeyeva, A.N.Dadayeva // ISAAC 9-th Congress Abstracts. – Krakow, Poland, 2013. – p. 19–20.

11 Алексеева Л.А., Дадаева А.Н. О единственности решений краевых задач термоупругости с учетом термоударных волн/ Л.А. Алексеева, А.Н. Дадаева // Вестник КазНТУ им. К. Сат-паева. Серия математика, механика и информатика. 2013. – № 28 – с. 211-223.

REFERENCES

1 Duhamel J. Second memoire sur les phenomens thermomechanique/ J. Duamel // I.Ecole Polytechniqut. – 1837. V. 15, p. 1–15.

2 Neumann F.E. Die Gezetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimirten order ungleichfororming erwarmten uncrystallinischen Korpern / F.E. Neumann // Abhandl. Konigl. Akad. Wissen. Berlin. – 1841. – №2. – Teil. S. – 254 p.

3 Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics/ Journal of Applied Physics, 1956. – V. 27, – No 3. – p. 240 – 253.

4 Novackij V. Dinamicheskie zadachi termouprugosti / V. Novackij; M.: Mir, 1970. – c. 9 – 89.

5 Hetnarski R.B. Encyclopedia of Thermal Stresses / R.B.Hetnarski; Springer, 2014. DOI 10.1007/978-94-007-2739-7.

6 Kupradze V.D., Gegelia T.G., Bashelejshvili M.O., Burchuladze T.V. Trekhmernye zada-chi matematicheskoj teorii uprugosti i termouprugosti / V.D. Kupradze, T.G. Gegelia, M.O. Bashelejshvili, T.V.Burchuladze; M.: Nauka, 1976. – 664 s.

7 Alekseeva L.A. Stacionarnye kraevye zadachi dinamiki termouprugih sterzhnej / L.A.Alekseeva // Izvestiya NAN RK. Seriya fiziko-matematicheskaya. – 2014. – № 3. – S.144-152.

8 Alexeyeva L.A., Akhmetzhanova M.M. Stationary oscillations of thermoelastic rod under action of external disturbances / L.A.Alexeyeva , M.M. Akhmetzhanova // Global Journal of Engineering Science and Research Management. – 2018. – № 2. – Volume 5. – p. 33-43. DOI: 10.5281/zenodo.1186513.

9 Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoj fiziki / Vladimirov V.S. M.: Nauka, 1981. – c. 84-160.

10 Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N. Shock thermoelastic waves as generalized solutions of thermoelasticity equations / L.A.Alexeyeva, A.N.Dadayeva // ISAAC 9-th Congress Ab-stracts. – Krakow, Poland, 2013. – p. 19–20.

11 Alekseeva L.A., Dadaeva A.N. O edinstvennosti reshenij kraevyh zadach termoupru-gosti s uchetom termoudarnyh voln/ L.A. Alekseeva, A.N. Dadaeva // Vestnik KazNTU im. K. Satpaeva. Ceriya matematika, mekhanika i informatika. 2013. – № 28 – s. 211-223.

Л. А. АЛЕКСЕЕВА[1], Д. А. ПРИКАЗЧИКОВ[2], А. Н. ДАДАЕВА[2], АЙНА Н. Ж. КЕЕВА[4,5,6]

[1]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан
[2]Keele University, Staffordshire, United Kingdom
[3]Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті, Алматы қ., Қазақстан
[4]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті., Алматы қ., Қазақстан
[5]Академик Ө. Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты, Алматы қ., Қазақстан
[6]Нархоз университеті, Алматы қ., Қазақстан

ТЕРМОСЕРПІМДІ ӨЗЕКТЕР ДИНАМИКАСЫНЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЕШУ ЖОЛДАРЫ

Біз термиялық қыздыру жағдайында әртүрлі стержендік құрылымдарды зерттеу үшін пайдаланылуы мүмкін қосылмаған термосерпімділіктің кеңістіктік бір өлшемді шекаралық есептерін қарастырамыз. Белгілі болғандай, штангалық құрылымдар әртүрлі машина бөлшектері мен механизмдерінің жалғастырушы және беріліс буындары болып табылады. Мұнда біз практикалық *қолданбаларға тән әртүрлі шекаралық есептерді шешудің бірыңғай әдістемесін ұсынамыз. Термосерпімді стерженьнің ұштарында әртүрлі шекаралық жағдайларда оның термиялық кернеулі күйін және өзекшенің бүкіл ұзындығы бойынша әсер етуші қуат пен жылу көздерін анықтау мәселелері қарастырылады. Жалпыланған функциялар әдісі негізінде әртүрлі типтегі қуат және жылу көздерінің, соның ішінде периодтық тербелістердің стационарлық көздерінің әсерінен стационарлы емес және стационарлы тікелей және жартылай кері шекаралық есептердің жалпыланған шешімдері тұрғызылды. Әрекет етуші көздерді стерженьнің ұштарында әртүрлі шекаралық шарттармен ерекше жалпыланған функциялар арқылы да көрсетуге болады. Мұндай құрылымдарда соққы жүктемелерінің әсерінен пайда болатын соққы серпімді толқындар қарастырылады. Қойылған шекаралық есептердің аналитикалық шешімін қамтамасыз ететін жалпыланған шешімдердің тұрақты интегралды бейнелері алынады. Құрылған ерітінділердің ерекшелігі оларды термосерпімді графиктер арқылы модельдеуге болатын желілік термосерпімді жүйелерді зерттеуге ыңғайлы етеді.*

Түйін сөздер: *термосерпімділік, ығысу, кернеу, температура, жалпыланған функция әдістері, Фурье түрлендіруі, шекаралық теңдеулер, стержень.*

L. A. ALEKSEYEVA[1], D. A. PRIKAZCHIKOV[2], A. N. DADAEVA[2], N. J. AINAKEEVA[4,5,6]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2]Keele University, Staffordshire, United Kingdom
[3]Kazakh National Research Technical University named after K.I.Satpayev, Almaty, Kazakhstan
[4] Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[5] Institute of Mechanics and Machine Science named after Academician U.A.Dzholdasbekov, Almaty, Kazakhstan
[6] Narkhoz University, Almaty, Kazakhstan

BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE DYNAMICS OF THERMOELASTIC RODS AND THEIR SOLUTIONS

We consider spatially one-dimensional boundary value problems of uncoupled thermoelasticity, which can be used to study various rod structures under thermal heating conditions. As is known, rod structures are connecting and transmission links of various parts of the machines and mechanisms. Here we propose a unified technique for solving various boundary value problems typical for practical applications. The problems of determining the thermally stressed state of a thermoelastic rod under various boundary conditions at its ends and acting power and heat sources along the entire length of the rod are considered. Based on the method of generalized functions, generalized solutions of non-stationary and stationary direct and semi-inverse boundary value problems under the action of power and heat sources of various types, including stationary sources of periodic oscillations, are constructed. Acting sources can also be specified by singular generalized functions, under various boundary conditions at the ends of the rod. Shock elastic waves that arise in such structures under the action of shock loads are considered. Regular integral representations of generalized solutions are obtained, which provide an analytical solution to the posed boundary value problems. The peculiarity of the constructed solutions makes them convenient for studying network thermoelastic systems that can be modeled by thermoelastic graphs.

Keywords: *thermoelasticity, shift, stress, temperature, generalized function methods, Fourier transform, boundary equations, rod.*