УДК 510.67
МРНТИ 27.03.66
https://doi.org/10.47533/2023.1606-146X.44

Б. С. БАЙЖАНОВ[1,2], Т. С. ЗАМБАРНАЯ[1], О. А. УМБЕТБАЕВ[1,3]*

[1]Институт математики и математического моделирования,
050010, г. Алматы, Казахстан
[2]SDU University, 040900, г. Каскелен, Казахстан
[3]Казахстанско-Британский технический университет,
050000, г. Алматы, Казахстан

МАЛЫЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ ТЕОРИИ И СВОЙСТВА КВАЗИ-СЛЕДОВАНИЯ НА 1-ТИПЕ

Статья посвящена свойствам 1-типов в упорядоченных малых теориях, а именно некоторому обобщению понятия фунции следования на целых числах, квази-следованию. В статье приводятся примеры 1-типов как на дискретных, так и на плотных порядках, на которых действует 2-формула φ(x, y) которая является квази-следованием. Впервые понятие квази-следования было введено авторами в предыдущих работах. Проблемы свойств и подсчёта числа счётных моделей теорий с определимым линейным порядком изучали многие учёные, среди них Л. Майер, С.В. Судоплатов, Б.Ш. Кулпешов, Б.С. Байжанов, А. Алибек, Т.С. Замбарная, С. Моконя и П. Танович. Формулы со свойствами следования играют важную роль в изучении случая максимума счётных моделей. Используя теорему компактности для неизолированного 1-типа, удаётся построить модель в которой есть бесконечный дискретный порядок типа ω + ω. На этом дискретном порядке можно выделить полный 1-тип со свойством квази-следования. Полное описание подкласса теорий, имеющих максимальный счётный спектр, открывает возможность описывать возможный счётный спектр для теорий с определимым линейным порядком.*

Ключевые слова: *малая теория, дискретный порядок, линейный порядок, 1-типы.*

Введение. Теория T первого порядка называется **малой**, если $\left|\bigcup_{n<\omega} S_n(T)\right| = \aleph_0$. Для теорий T, которые не являются малыми, $I(T,\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$. Готическими буквами ($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, ...), мы обозначаем структуры, а буквами латинского алфавита – носители соответствующих структур (M, N, ...).

Определение 1. Пусть $\mathfrak{M}$ – линейно упорядоченная структура. Множество A является выпуклым в множестве $B \supseteq A$, если для всех $a, b \in A$ и всех $c \in B$, если $a < c < b$, тогда $c \in A$. Множество A выпукло, если оно выпукло в множестве M.

Определение 2. [1,2] Пусть $\mathfrak{M}$ – линейно упорядоченная структура. Формула $\varphi(x,\bar{y},\bar{a})$ $(\bar{a} \in M)$ является выпуклой, если для всех $\bar{b} \in M$ множество $\varphi(M,\bar{b},\bar{a})$ выпукло в каждой модели теории $Th(\mathfrak{M})$, содержащей $\bar{b}$ и $\bar{a}$.

Пусть $\psi(x)$ – A – определимая 1-формула. Обозначим

$$E_\psi(x,y) := \psi(x) \wedge \psi(y) \wedge \Big(x \le y \to \forall z\big(x \le x \le y \to \psi(z)\big)\Big) \wedge \Big(y \le x \to \forall z\big(y \le z \le x \to \psi(z)\big)\Big).$$

---

* E-mail корреспондирующего автора: umbetbayev@math.kz

$E_\psi(x, y)$ задаёт отношение эквивалентности с выпуклыми классами на $\psi(M)$. [12,13]

Определение 3. [3 - 5] Пусть $\mathfrak{M}$ – линейно упорядоченная структура, $A \subseteq M$, $\mathfrak{M}$ – $|A|^+$ – насыщенная и неалгебраический.

1) A-определимая формула $\varphi(x, y)$ является p-сохраняющей, если существуют α, $\gamma_1, \gamma_2 \in p(\mathfrak{M})$ такие, что $p(\mathfrak{M}) \cap (\varphi(M,\alpha)\backslash\{\alpha\}) \neq \emptyset$ и $\gamma_1 < \varphi(M,\alpha) < \gamma_2$.

2) p-сохраняющая формула $\varphi(x, y)$ является выпуклой вправо (влево) на p, если существуют $\alpha \in p(\mathfrak{M})$ такие, что $p(\mathfrak{M}) \cap \varphi(M, \alpha)$ выпукло во множестве $p(\mathfrak{M})$ (то есть, $\gamma_1, \gamma_2 \in \big(p(\mathfrak{M}) \cap \varphi(M,\alpha)\big)$, $\delta \in p(\mathfrak{M})$ и $\gamma_1 < \delta < \gamma_2$ влечёт $\delta \in \varphi(M,\alpha)$), α – есть левая (правая) концевая точка множества $\varphi(M,\alpha)$, и $\alpha \in \varphi(M,\alpha)$.

3) p-сохраняющая выпуклая вправо (влево) формула $\varphi(x, y)$ является квази-следованием на p, если для всякого $\alpha \in p(\mathfrak{M})$ и всякого $\beta \in (\varphi(M,\alpha)\backslash\{\alpha\}) \cap p(\mathfrak{M})$

$$p(\mathfrak{M}) \cap [\varphi(M,\beta) \setminus \varphi(M,\alpha)] \neq \emptyset.$$

Обзор литературы. В статье [6] Л. Майер доказала **гипотезу Воота** для класса о-минимальных теорий. Гипотеза **Воота** для почти о-минимальных была подтверждена С.В. Судоплатовым совместно с Б.Ш. **Кулпешовым** [7]. Для слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1 гипотеза Воота была доказана А. Алибек, Б.С. Байжановым, Б.Ш. Кулпешовым и Т.С. Замбарной [8]. Для бинарных стационарно упорядоченных теорий гипотезу **Воота** подтвердили С. **Моконя** и П. **Танович** [9]. А для слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпуклости гипотеза **Воота** была подтверждена Б.Ш. **Кулпешовым** [10]. Важным является рассмотрение случая максимальности счётного спектра упорядоченных теорий, так как он упрощает переход к изучению счётного спектра в общем. [11 - 14].

Методы и материалы. В данной статье используется один из главных методов теории моделей – изучение свойств моделей полных теорий при помощи типов, а для определения локальной совместности множества формул необходима теорема компактности.

Результаты исследования и их обсуждение. Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ – счётная насыщенная модель малой линейно упорядоченной теории T, и пусть для каждого $n < \omega$ существует $m_n \geq n$ такой, что в $\mathfrak{M}$ имеется дискретная цепь длины m_n. Тогда существуют 2-A-формула $\varphi(x,y)$, где A – конечное подмножество M, и 1-тип $p \in S_1(A)$, такие, что $\varphi(x, y)$ является квази-следованием на $p(x)$.*

Доказательство теоремы 4. Пусть $r(x_1, x_2) := \{x_1 < x < x_2\} \cup \{\Theta_n(x_1,x_2) | n < \omega\}$, где $\Theta_n(x_1,x_2) := \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n \Big(x_1 \leq y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n \leq x_2 \wedge \forall z \Big(x_1 < z < x_2 \rightarrow$
$\exists z_1 \exists z_2 \big(x \leq z_1 < z < z_2 \leq x_2 \wedge \forall v(x_1 \leq v < z \rightarrow v \leq z_1) \wedge \forall w(z < w \leq x_2 \rightarrow z_2 \leq w)\big)\Big)\Big)$.

Множество r совместно и, следовательно, существует кортеж ab реализующий r, и такой, что интервал (a, b) является дискретно упорядоченным множеством, содержащим копии $(\mathbb{Z}, <)$. Пусть $\Gamma(x, a, b) := \{\psi_i(x, a, b) | i < \alpha\}$ – множество всех формул $\psi_i(x, a, b)$ таких, что для каждого $n < \omega$ есть $E_{\psi_i}(x, y)$ – класс с более чем n элементами и $\models \forall x(\psi_i(x,a,b) \to a < x < b)$. Здесь α – это либо конечный кардинал, либо ω. Для $i < \alpha$ обозначим $r_i(x_1, x_2, a, b) := \{a < x_1 < x < x_2 < b \wedge \psi_i(x_1) \wedge \psi_i(x_2)\} \cup$ $\cup \{\Theta_{n,i}(x_1,x_2) | n < \omega\}$,, где $\Theta_{n,i}(x_1,x_2) := \forall t(x_1 \le t \le x_2 \to \psi_i(t)) \wedge \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n \Big(x_1 \le$ $\le y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n \le x_2 \wedge \forall z\Big(x_1 < z < x_2 \to \exists z_1 \exists z_2(x \le z_1 < z < z_2 \le$ $\le x_2 \wedge \forall v(x_1 \le v < z \to v \le z_1) \wedge \forall w(z < w \le x_2 \to z_2 \le w))\Big)\Big)$.

Пусть $I_0 := \{i < \alpha \mid \exists m(i) < \omega, \forall x((a < x < b \wedge \neg\psi_i(x)) \to |E_{\neg\psi_i}(M,x)| < m(i)\}$. Заметим, что для всякого $i \in \alpha$, $i \notin I_0$, существует $j < \alpha$, $i \notin I_0$ такой, что $\neg\psi_i(x) = \psi_j$.

Зададим последовательность интервалов $\langle(a_i, b_i) \mid i < \alpha\rangle$ таких, что $(a_i, b_i) \subseteq$ $\subseteq (a_{i+1}, b_{i+1})$ и для 1-формулы $\psi_i(x)$ верно одно из следующего:

a) существуют натуральные числа $m(i)$, $k(i) < \omega$ такие, что $\mathfrak{M} \models \forall x\Big(a_i < x < b_i \to$ $\Big(|E_{\psi_i}(M,x)| < k(i)\Big) \wedge |E_{\neg\psi_i}(M,x)| < m(i)\Big)$;

b) $\mathfrak{M} \models \forall x(a_i < x < b_i \to \psi_i(x))$;

c) $\mathfrak{M} \models \forall x(a_i < x < b_i \to \neg\psi_i(x))$.

Так как для любых $j > i$, $(a_i, b_i) \subseteq (a_j, b_j)$ выполняется:

a) $\mathfrak{M} \models \forall x\Big(a_j < x < b_j \to \Big(|E_{\psi_i}(M,x)| < k(i)\Big) \wedge |E_{\neg\psi_i}(M,x)| < m(i)\Big)$.

b) $\mathfrak{M} \models \forall x\Big(a_j < x < b_j \to \psi_i(x)\Big)$.

c) $\mathfrak{M} \models \forall x\Big(a_j < x < b_j \to \neg\psi_i(x)\Big)$.

Шаг 0. Рассмотрим совместное множество формул $r_0(x_1, x_2, a, b)$. Пусть a_0b_0 – реализация типа r_0. Из определения частичного типа r_0 следует, что $\mathfrak{M} \models \forall x(a_0 <$ $< x < b_0 \to \psi_0(x))$.

Шаг $i + 1$. Случай 1. $i + 1 \in I_0$.

Случай 1.1. Существует $k(i + 1) < \omega$ такой, что $\mathfrak{M} \models \forall x\Big(a_i < x < b_i \to$ $\to |E_{\psi_{i+1}}(M,x)| < k(i+1)\Big)$. Обозначим $a_{i+1} := a_i, b_{i+1} := b_i$.

Случай 1.2. Для 1-формулы $\psi_{i+1}(x,a,b)$ выполняется следующее: для любого $n < \omega$ существует $E_{\psi_{i+1}}(x,y)$-класс, имеющий более чем n элементов и лежащий между a_i и b_i. Рассмотрим $r_{i+1}(x_1, x_2, a_i, b_i)$. Данное множество 1-формул совместно и, следовательно, существует кортеж $a_{i+1}b_{i+1}$, реализующий тип r_{i+1}, и верно следующее: $\mathfrak{M} \models \forall x(a_{i+1} < x < b_{i+1} \to \psi_{i+1}(x))$.

Случай 2. $i+1 \notin I_0$. В этом случае, $\neg\psi_{i+1} = \psi_j$ для некоторого $j < \alpha$. Предположим, что $i+1 < j$.

Случай 2.1. Существуют два натуральных числа $m(i+1), k(i+1) < \omega$ такие, что $\mathfrak{M} \vDash \forall x\left(a_i < x < b_i \to \left| E_{\psi_{i+1}}(M,x)\right| < k(i+1)\right)$ и $\mathfrak{M} \vDash \forall x\left(a_i < x < b_i \to \left| E_{\neg\psi_{i+1}}(M,x)\right| < m(i+1)\right)$.

Случай 2.2. Для одной из двух формул, $\psi_{i+1}(x)$, $\neg\psi_{i+1}$ верно следующее: для каждого $n < \omega$ существует $E_{\psi_{i+1}}(x,y)$-класс, имеющий более чем n элементов и лежащий между a_i и b_i, либо для каждого $n < \omega$ существует $E_{\neg\psi_{i+1}}(x,y)$-класс, имеющий более чем n элементов и лежащий между a_i и b_i. Тогда множество $r_{i+1}(x_1, x_2, a_i, b_i)$ совместно, $r_j(x_1, x_2, a_i, b_i)$ совместно, либо совместны оба эти множества. Пусть $a_{i+1}b_{i+1}$ – реализация типа $r_{i+1}(x_1, x_2, a_i, b_i)$, либо типа $r_j(x_1, x_2, a_i, b_i)$. Из определения частичного типа r_i следует, что $\mathfrak{M} \vDash \forall x\big(a_{i+1} < x < b_{i+1} \to \psi_{i+1}(x)\big)$ либо $\mathfrak{M} \vDash \forall x\big(a_{i+1} < x < b_{i+1} \to \neg\psi_{i+1}(x)\big)$.

Рассмотрим следующее совместное множество 2-формул над $\{a_i \mid i < \alpha\} \cup \{b_i \mid i < \alpha\}$:

$$\{a_i < x_1 < x_2 < b_i \mid i < \alpha\} \cup \{\exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n (x_1 < y_1 < y_2 < \ldots y_n < x_2) | n < \omega\}.$$

Пусть $a_\alpha b_\alpha$ – реализация данного множества. Тогда упорядочение интервала (a_α, b_α) должно быть дискретным и если $\psi(x)$ – это имеющая пересечение с интервалом (a_α, b_α) формула, то: либо все элементы этого интервала являются реализациями формулы $\psi(x)$, либо мощность каждого выпуклого класса формулы $\psi(x)$ меньше некоторого $k < \omega$, и также мощность каждого выпуклого класса отрицания этой формулы меньше некоторого $m < \omega$.

Возьмём $\psi(x, a, b)$ такую, что $(a_\alpha, b_\alpha) \cap \psi(x, a, b)$ бесконечно и не совпадает с(a_α, b_α). Тогда существуют $m, k < \omega$ такие, что мощность каждого выпуклого класса формулы $\psi(x)$ меньше, чем k, и мощность каждого выпуклого класса $\neg\psi(x)$ меньше, чем m. Тогда мы можем определить $(k-1)$ 1-формул: $\psi^1(x) := \psi(x) \wedge \exists y\big(y < x \wedge \neg\psi(y) \wedge \forall v(v < x \to v \le y)\big)$, $\psi^2(x) := \psi(x) \wedge \exists y\big(y < x \wedge \psi^1(y) \wedge \forall v(v < x \to v \le y)\big)$,..., $\psi^{i-1}(x) := \psi(x) \wedge \exists y\left(y < x \wedge \psi^{i-2}(y) \wedge \forall v(v < x \to v \le y)\right)$.

Рассмотрим следующее множество 1-формул над $\{a_\alpha, b_\alpha\}$:

$$p_0(x, a_\alpha, b_\alpha) := \{\exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n \exists z_1 \ldots \exists z_n (a_\alpha < y_1 < \ldots < y_n < x < z_1 < \ldots < z_n < b_\alpha) \mid n < \omega\}.$$

Пусть G – множество 1-формул над $\{a_\alpha, b_\alpha\}$, имеющих непустое пересечение с $p_0(\mathfrak{M})$, и всякий выпуклый класс этой 1-формулы содержит только один элемент. Можем считать, что для всякой 1-формулы $\psi(x) \in G$ существует $m_\psi < \omega$ такой, что между двумя элементами удовлетворяющими $\psi(x)$, лежит ровно $m_\psi - 2$ элементов, не удовлетворяющих $\psi(x)$. В противном случае, 1-формуле $\neg\psi(x)$ удовлетворяют все элементы интервала (a_α, b_α), согласно условиям построения последовательности $\langle a_i, b_i\rangle_{i<\alpha}$. Пусть – произвольный элемент из $p_0(\mathfrak{M})$ и $p := tp(c \mid a_\alpha, b_\alpha)$.

Лемма 5. *Множество* $G_p := \{\psi(x) \in G \mid \psi(x) \in p\}$ *конечно.*

Доказательство леммы 5. Пусть $S_p := \{(\psi_i(x), m_i) \mid \psi_i(x) \in G_p, m_i < \omega\}$, здесь $m_i - 1$ – это число элементов между соседними элементами ψ_i такими, что для любых $i < j < \omega$, $m_i < m_j$. Возможны следующие два случая:

1) Существует бесконечное число взаимно простых чисел.

2) Существует подмножество $S_0 \subset S_p$ такое, что $\psi_i(x), \psi_j(x) \in S_0$, если $i < j$, тогда существует m_j делящееся на m_i. Мы показываем, что множество S_0 бесконечно. Пусть $\psi_i(x), \psi_j(x) \in G_p$ с соответствующими m_i и m_j, и пусть $r < \omega$ будет наибольшим общим делителем чисел m_i и m_j $(m_i = r * m_i', m_j = r * m_j')$. Тогда $r * m_i' * m_j'$ есть наибольшее число такое, что между двумя элементами, удовлетворяющими $\psi_i(x) \wedge \psi_j(x)$, лежит ровно $r * m_i' * \ m_j' - 1$ элементов из $M \setminus \left(\psi_i(M) \cap \psi_j(M)\right)$. Это означает, что $\psi_i(x) \wedge \psi_j(x) \in G_p$ с $r * m_i' * m_j'$. Рассмотрим новую нумерацию множества S_0 с помощью множества всех натуральных чисел, тогда для всякого $i < \omega$ есть $k_i < \omega$ такой, что $m_{i+1} = m_i * k_i$.

1) Пусть множество $K \subset \omega$ такое, что для любых $i \neq j \in K$, m_i и m_j не имеют общих делителей. Пусть $B \subset K$ – произвольное подмножество счётного множества K. Рассмотрим $q_B := \{\wedge_{i\in I} \psi_i(x) \wedge \wedge_{j \in J} \neg\psi_j(x) \mid I \subset_{finite} B,\ J \subset_{finite} (K \setminus B)\}$. Для любого $B \subset K$, q_B является совместным множеством 1-формул. Действительно, для произвольного конечного множества $I \subset N$ рассмотрим элемент $c_1 (c < c_1)$ такой, что между c и c_1 находится ровно $\prod_{i \in I} m_i$ элементов. Из определения m_i следует что $\mathfrak{M} \vDash \wedge_{i\in I} \psi_i(c_I)$ и для любых $j \in K \setminus I$, $\mathfrak{M} \vDash \neg\psi_j(c_I)$. Так как счётное множество K имеет континуум подмножеств, и, следовательно, существует континуум 1-типов над конечным множеством. Для малой теории это невозможно.

2) Для любого $d \in p_0(M)$ и любого i $< \omega$ определим $l_i (0 \le l_i < k_i)$: пусть d_i^1, d_i^2 такие, что $\mathfrak{M} \vDash \psi_i(d_i^1) \wedge \psi_i(d_i^1) \wedge (d_i^1 \le d < d_i^2) \wedge \forall x \left(d_i^1 < x < d_i^2 \to \neg\psi_i(x)\right)$. Интервал $[d_{i+1}^1, d_{i+1}^2)$ содержит k_i интервалов длины m_i. Пронумеруем все интервалы длины m_i, и сопоставим l_i номеру интервала содержащего d. Действительно, $[d_{i+1}^1, d_{i+1}^2) = [d_{i,0}^1, d_{i,0}^2) \cup [d_{i,1}^1, d_{i,1}^2) \cup \ \dots [d_{i,j}^1, d_{i,j}^2) \cup \dots \cup [d_{i,k-1}^1, d_{i,k-1}^2)$, $d_{i+1}^1 = d_{i,0}^1$, $d_{i.0}^2 = d_{i,1}^1$, ..., $d_{i,k-1}^2 = d_{i+1}^2$. Так как $d \in [d_{i+1}^1, d_{i+1}^2)$,, существует $j \ \left(0 \le j \le (j-1)\right)$ такой, что $d \in [d_{i,j}^1, d_{i,j}^2)$.. Тогда $[d_{i,j}^1, d_{i,j}^2) = [d_i^1, d_i^2)$ и обозначим $l_i(d) = j$. Таким образом, для произвольного $d \in p_0(M)$ существует счётная последовательность $\tau_d := \langle l_0(d), l_1(d), l_2(d), \dots, l_i(d), \dots \rangle_{i<\omega}$, где $0 \le l_i(d) \le k_i - 1$.. Заметим, что элемент определяет последовательность $\tau_c = \langle l_0(c), l_1(c), \dots, l_i(c), \dots \rangle_{i<\omega}$ такую, что для любого i имеем $l_i(c) = 0$. So, $\tau_c = \langle 0, 0, \dots \rangle$.

Пусть $\tau = \langle l_0(\tau), l_1(\tau), \dots, l_i(\tau), \dots \rangle_{i<\omega}$ – произвольная последовательность натуральных чисел такая, что $0 \le l_i(\tau) \le k_i - 1$. Тогда рассмотрим множество 1-формул

$q_\tau(x) := p_0(x) \cup \{\Theta_i^\tau(x) | i < \omega\}$, где $\Theta_i^\tau(x) := \exists y_0 \exists y_1 \ldots \exists y_{k_i} \left(y_0 < y_1 < \ldots < y_{k_i} \wedge \psi_{i+1}(y_0) \wedge \psi_{i+1}(y_{k_i}) \wedge \ \forall z \left(y_0 < z < y_{k_i} \to \neg\psi_{i+1}(z)\right) \wedge \wedge_{0 \le j \le k_i} \psi_i(y_j) \wedge y_{l_i(\tau)} \le x < y_{l_i(\tau)+1}\right)$. Для 1-формулы $\Theta_i^\tau(x)$ её класс выпуклости содержит ровно $m_i - 1$ элементов. Для любой последовательности натуральных чисел τ с условием что для любого $i < \omega$, $0 \le l_i < k_i$ множество 1-формул q_τ совместно. Пусть $\tau_1 \ne \tau_2$ – две последовательности натуральных чисел такие, что $l_i(\tau_1) \ne l_i(\tau_2)$. Так как выпуклые классы этих формул не имеют общих элементов, то $\mathfrak{M} \models \neg\exists x \left(\Theta_i^{\tau_1}(x) \wedge \Theta_i^{\tau_2}(x)\right)$. . Таким образом, существует континуум 1-типов над $\{a_\alpha, b_\alpha\}$, что противоречит условию малости теории T.

■ Лемма 5

Из леммы 5 следует, что множество $G_p = \{\psi_1(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_s(x)\}$ конечно. Пусть m_i – соответствующее натуральное число для 1-формулы $\psi_i(x)$ $(1 \le i \le s)$ такое, что между двумя соседними реализациями $\psi_i(x)$ лежит $m_i - 1$ элементов, не удовлетворяющих $\psi_i(x)$. Пусть $r < \omega$ – наибольший общий делитель $\{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$ $(m_i = r * m_i{}',\ 1 \le i \le s)$. Тогда $m_p = r * \prod_{1 \le i \le s} m_i{}'$. Пусть $\varphi(x, y) :=$ $= \exists z_1 \exists z_2 \ldots \exists z_{m_p} \left(y < z_1 < z_2 < \ldots < z_{m_p} \wedge y \le x \le z_{m_p} \wedge \forall v \left(y < v \le z_{m_p} \to \vee_{1 \le j \le m_p} v = = z_j\right)\right)$.

Из определения 3 следует, что $\varphi(x, y)$ является квази-следованием на типе p.

■ Теорема 4

Предложение 6. Существует плотная, линейно упорядоченная структура, на которой определена 2-формула $\varphi(x, y)$ со свойством квази-следования на 1-типе.

Доказательство предложения 6. Рассмотрим упорядоченную структуру $(\mathbb{Q}, =, <, +)$, теория которой является o-минимальной [15]. Рассмотрим обогащение данной структуры $\mathbb{Q}^+ = (\mathbb{Q}, =, <, +, U^1)$, такое, что $U^1(\mathbb{Q}^+) = \{b \in \mathbb{Q} \,|(\mathbb{R}, =, <) \models 0 \le \le b < \sqrt{2}\}$. Данная теория слабо o-минимальна [1, 16–18]. Для формулы $\varphi(x, y) = = \left(y \le x \wedge U(x - y)\right)$ и любого элемента α из множества $\mathbb{Q}^+$, формула $\varphi(x, \alpha)$ является выпуклой формулой со следующим свойством: для любого β верно $\varphi(\beta, \alpha)$ и следует $\mathbb{R} \models \beta < \alpha + \sqrt{2}$.. Ограничение структуры $\mathbb{Q}^+$ до $\mathbb{Q}' = (\mathbb{Q}, =, <, \varphi(x, y))$ при помощи формулы $\varphi(x, y)$ будет слабо o-минимальным, так как система формульных множеств $\mathbb{Q}'$ является подсистемой формульных множеств Q^+. Так как любые два элемента $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}'$ переводятся автоморфизмом, поэтому $tp(\alpha/\emptyset) = tp(\beta/\emptyset)$. Таким образом, это искомый 1-тип с квази-следованием.

■ Предложение 6

Заключение. Основным результатом является существование 1-типов со свойством квази-следования как с плотным упорядочением, так и с дискретным. Применение метода изучения моделей полных теорий, используя 1-типы с квази-следованием, дает возможность выделять теории с максимальным счётным спектром. Что в свою очередь позволяет переходить к изучению упорядоченных теорий с отсутствием 1-типа с квази-следованием. Это в конечном итоге дает возможность изучения счётного спектра упорядоченных теорий.

Информация о финансировании. Исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант № AP09058169).

ЛИТЕРАТУРА

1 Macpherson D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, Transactions of the American Mathematical Society, 352 (2000), 5435–5483.

2 Baizhanov B.S. Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories, Algebra and Model Theory 2. Collection of papers, eds.: A.G. Pinus, K.N. Ponomaryov. Novosibirsk, NSTU, 1999, 5–28.

3 Baizhanov B.S. One-types in weakly o-minimal theories, Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty, (1996), 77–90.

4 Байжанов Б.С. Определимость 1-типов в слабо о-минимальных теориях, Матем. тр., 8:2 (2005), 3–38.

5 Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories, Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference, eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono, World Scientific, Singapore (2006), 31-40. https://doi.org/10.1142/9789812772749 0003.

6 Mayer L. Vaught's conjecture for o-minimal theories, Journal of Symbolic Logic, 53:1 (1988), 146–159. https://doi.org/10.2307/2274434.

7 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Vaught's conjecture for quite o-minimal theories, Annals of Pure and Applied Logic, 168:1 (2017), 129–149. https://doi.org/10.1016/j.apal.2016.09.002.

8 Alibek A., Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh., Zambarnaya T.S. Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1, Annals of Pure and Applied Logic, 169:11 (2018), 1190-1209. https://doi.org/10.1016/j.apal.2018.06.003.

9 Moconja S., Tanovic P. Stationarily ordered types and the number of countable models, Annals of Pure and Applied Logic, 171:3 (2019), 102765. https://doi.org/10.1016/j.apal.2019.102765.

10 Kulpeshov B.Sh. Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of finite convexity rank, Izvestiya: Mathematics, 84:2 (2020), 324–347. https://doi.org/10.1070/IM8894.

11 Alibek A.A., Baizhanov B.S., Zambarnaya T.S. Discrete order on a definable set and the number of models, Mathematical Journal, 14:3 (2014), 5–13.

12 Baizhanov B., Baldwin J.T., Zambarnaya T. Finding $2^{\aleph_0}$ countable models for ordered theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, 15:7 (2018), 719–727. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.057.

13 Baizhanov B., Umbetbayev O., Zambarnaya T. Non-existence of uniformly definable family of convex equivalence relations in an 1-type of small ordered theories and maximal number of models, Kazakh Mathematical Journal, 19:4 (2019), 98–106.

14 Baizhanov B.S., Zambarnaya T. Infinite discrete chains and the maximal number of countable models, Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 112:4 (2021), 46–56.

15 Pillay A., Steinhorn C. Definable sets in ordered structures. I, Transactions of the American Mathematical Society, 295:2 (1986), 565–592.

16 Байжанов Б.С. Расширения о-минимальных структур выпуклыми унарными предикатами, В книге: «Исследования по теории алгебраических систем», посвященной памяти Т.Г. Мустафина, Карагандинский государственный университет, (1995), 6–24.

17 Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), 1382– 1414 (First version of this paper: “Classification of 1-types of weakly o-minimal theories and its applications”, 1996). https://doi.org/10.2307/2695114.

18 Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh., Zambarnaya T.S. A.D. Taimanov and model theory in Kazakhstan, Siberian Electronic Mathematical Reports, 17 (2020), 1–58. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.011

REFERENCES

1 Macpherson D., Marker D. and Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, Transactions of the American Mathematical Society, 352 (2000), 5435–5483.

2 Baizhanov B.S. Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories, Algebra and Model Theory 2. Collection of papers, eds.: A.G. Pinus, K.N. Ponomaryov. Novosibirsk, NSTU, 1999, 5–28.

3 Baizhanov B.S. One-types in weakly o-minimal theories, Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty, (1996), 77–90.

4 Baizhanov B.S. Definability of 1-Types in Weakly o-Minimal Theories, Mat. Tr., 8:2 (2005), 3–38. (In Russian).

5 Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories, Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference, eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono, World Scientific, Singapore (2006), 31-40. https://doi.org/10.1142/9789812772749 0003.

6 Mayer L. Vaught’s conjecture for o-minimal theories, Journal of Symbolic Logic, 53:1 (1988), 146–159. https://doi.org/10.2307/2274434.

7 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Vaught’s conjecture for quite o-minimal theories, Annals of Pure and Applied Logic, 168:1 (2017), 129–149. https://doi.org/10.1016/j.apal.2016.09.002.

8 Alibek A., Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. and Zambarnaya T.S. Vaught’s conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1, Annals of Pure and Applied Logic, 169:11 (2018), 1190-1209. https://doi.org/10.1016/j.apal.2018.06.003.

9 Moconja S., Tanovic P. Stationarily ordered types and the number of countable models, Annals of Pure and Applied Logic, 171:3 (2019), 102765. https://doi.org/10.1016/j.apal.2019.102765.

10 Kulpeshov B.Sh. Vaught’s conjecture for weakly o-minimal theories of finite convexity rank, Izvestiya: Mathematics, 84:2 (2020), 324–347. https://doi.org/10.1070/IM8894.

11 Alibek A.A., Baizhanov B.S. and Zambarnaya T.S. Discrete order on a definable set and the number of models, Mathematical Journal, 14:3 (2014), 5–13.

12 Baizhanov B., Baldwin J.T. and Zambarnaya T. Finding $2^{\aleph_0}$ countable models for ordered theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, 15:7 (2018), 719–727. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.057.

13 Baizhanov B., Umbetbayev O. and Zambarnaya T. Non-existence of uniformly definable family of convex equivalence relations in an 1-type of small ordered theories and maximal number of models, Kazakh Mathematical Journal, 19:4 (2019), 98–106.

14 Baizhanov B.S., Zambarnaya T. Infinite discrete chains and the maximal number of countable models, Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 112:4 (2021), 46–56.

15 Pillay A., Steinhorn C. Definable sets in ordered structures. I, Transactions of the American Mathematical Society, 295:2 (1986), 565–592.

16 Baizhanov B.S. Expansions of o-minimal structures by convex unary predicates, In book: “Issledovaniya po teorii algebraicheskih sistem” [Studies on theory of algebraic systems] dedicated to the memory of T.G. Mustafin, Karaganda State University. – 1995, 6-24. (In Russian).

17 Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), 1382– 1414 (First version of this paper: "Classification of 1-types of weakly o-minimal theories and its applications", 1996). https://doi.org/10.2307/2695114.

18 Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh., and Zambarnaya T.S. A.D. Taimanov and model theory in Kazakhstan, Siberian Electronic Mathematical Reports, 17 (2020), 1–58. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.011.

Б. С. БАЙЖАНОВ[1,2], Т. С. ЗАМБАРНАЯ[1], О. А. УМБЕТБАЕВ[1,3]

[1]Математика және математикалық модельдеу институты,
050010, Алматы қ., Қазақстан
[2]SDU University, 040900, Қаскелең қ., Қазақстан
[3]Қазақстан-Британ техникалық университеті, 050000, Алматы қ, Қазақстан
**E-mail: umbetbayev@math.kz*

ШАҒЫН РЕТТЕЛГЕН ТЕОРИЯЛАР МЕН 1-ТИПТЕГІ КВАЗИ-МҰРАГЕРДІҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Мақала реттелген шағын теориялардағы 1-типтердің қасиеттеріне арналған, атап айтқанда, бүтін сандардағы, тізбектелу функциясы ұғымын кейбір жалпылауы - квази-мұрагер ұғымына. Мақалада дискрет және тығыз ретте 1- типтер мысалдары келтірілген, онда φ(x, y) 2-формуласы әсер етеді, бұл квази-мұрагер. Квази-мұрагер ұғымын алғаш рет авторлар алдыңғы еңбектерінде енгізген. Анықталатын сызықтық реті бар теориялардың санақты модельдерінің қасиеттері мен санын есептеу мәселелерін көптеген ғалымдар зерттеді, олардың ішінде Л. Майер, С.В. Судоплатов, Б.Ш. Кулпешов, Б.С. Байжанов, А. Алибек, Т.С. Замбарная, С. Моконя және П. Танович. Мұрагер қасиеттері бар формулалар санақты модельдерінің максимумын зерттеуде маңызды рөл атқарады. Оқшауланбаған 1-тип үшін компакттық теореманы қолдана отырып, ω + ω типті шексіз дискретті реті бар модель құруға болады. Осы дискретті ретте квази-мұрагер қасиеті бар толық 1-типті ажыратуға болады. Максималды санақты спектрі бар теориялардың ішкі класының толық сипаттамасы анықталған сызықтық реті бар теориялар үшін мүмкін болатын санақты спектрін сипаттауға мүмкіндік береді.*

Түйін сөздер: *шағын теория, дискрет рет, сызықтық рет, 1-типтер.*

B. S. BAIZHANOV[1,2], T. S. ZAMBARNAYA[1], O. A. UMBETBAYEV[1,3]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010, Almaty, Kazakhstan
[2]SDU University, 040900, Kaskelen, Kazakhstan
[3]Kazakh-British Technical University, 050000, Almaty, Kazakhstan
**E-mail: umbetbayev@math.kz*

SMALL ORDERED THEORIES AND QUASI-SUCCESSOR PROPERTIES ON 1-TYPE

The article is dedicated to the properties of 1-types in small ordered theories, specifically focusing on a particular generalization of the concept of a successor function on integers known as a quasi-successor.

The article includes examples of 1-types, present in both discrete and dense orders, on which the 2-formula φ(x, y) acts, which is a quasi-successor. For the first time, the concept of quasi- successor was introduced by the authors in their previous works. The problems of properties and counting the number of countable models of theories with a definable linear order have been studied by many scientists, among them L. Mayer, S.V. Sudoplatov, B.Sh. Kulpeshov, B.S. Baizhanov, A. Alibek, T.S. Zambarnaya, S. Moconja and P. Tanovic. Formulas with properties of succession play an important role in the study of the case of maximal countable models. Using the compactness theorem for a non-isolated 1-type, it is possible to construct a model in which there is an infinite discrete order of the type ω + ω. On this discrete order, a complete 1-type with the quasi-successor property can be distinguished. A complete description of the subclass of theories having the maximal countable spectrum opens up the possibility of describing a possible countable spectrum for theories with a definable linear order.*

Keywords*: small theory, discrete order, linear order, 1-types.*