МРНТИ 28.17.19
https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.13

***Н. ТАСБОЛАТҰЛЫ[1]*, А. К. ЕРДЕНОВА[1,2], А. Е. НАЗЫРОВА[1,2], Г. Б. БАХАДИРОВА[1], С. С. АЛИШЕВА[2]***

*[1]Международный университет Астана, Астана, Казахстан;*
*[2]Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
*[1]tasbolatuly@gmail.com, [2]erdenova_aigerim@mail.ru, [3]ayzhan.nazyrova@gmail.com, [4]gulnaz.bahadirova.84@mail.ru, [5]sandu_alish@mail.ru*

# ГЛОБАЛЬНОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ОТСЛЕЖИВАНИЕ ВЫХОДНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ КЛАССА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

*В этой статье рассматривается проблема глобального практического управления выходных данных с помощью обратной связи по выходу для класса неопределенных нелинейных систем с изменяющейся во времени задержкой. Во-первых, однородный контроллер с обратной связью по выходу разработан для номинальной неопределенной по своей сути системы благодаря добавлению технологии силового интегратора. Затем с помощью соответствующего функционала Ляпунова-Красовского и наблюдателя пониженного порядка, используя подход однородного доминирования и добавляя метод интегратора мощности, успешно разрабатывается контроллер с обратной связью по выходу, гарантирующий, что все состояния замкнутой системы остаются ограниченными и одновременно делают ошибку отслеживания сколь угодно малой.*

***Ключевые слова:*** *нелинейные системы управления, устойчивость по Ляпунову, обратная связь, математическое моделирование.*

**Введение.** Проблема отслеживания выходных данных нелинейных систем привлекла большое внимание за последние десятилетия [1-16]. Из-за отсутствия общего и эффективного подхода к проектированию нелинейного наблюдателя отслеживание выходных данных с обратной связью для неопределенных изначально нелинейных систем является очень сложным по сравнению со случаем с обратной связью по состоянию. Поэтому разработка теории управления с обратной связью по выходу для решения этой проблемы шла относительно медленно. Многие исследования требуют точного знания нелинейных функций, которые необходимы для построения нелинейных наблюдателей. Когда нелинейные члены неизвестны, наблюдатели, предложенные в выше указанных работах, теряют свою актуальность. Чтобы справиться с неопределенными нелинейными членами, в исследовании [17] был разработан метод доминирования обратной связи для достижения глобальной стабилизации системы с обратной связью по выходу. В этой работе показано, что наблюдатель и контроллер могут быть сконструированы без знания нелинейностей, а глобальная стабилизация может быть достигнута при условии линейного роста.

В статьях [3, 5-7, 9-11] сообщается об отдельных результатах, которые помогают решить проблему отслеживания выходных данных с обратной связью для изначально нелинейных систем с помощью метода однородного доминирования, предложенного в [17]. Преимущество метода доминирования с обратной связью по сравнению с другими методами заключается в том, что контроллер и наблюдатель построены только

* E-mail корреспондирующего автора: tasbolatuly@gmail.com

на основе номинальной системы исследуемой нелинейной системы. Никакой точной информации о нелинейностях функции не требуется. Другими словами, один и тот же динамический контроллер может быть применен к различным нелинейным системам до тех пор, пока они удовлетворяют предположению в работе [17]. Это свойство позволяет иметь дело с нелинейными системами с неизвестными возмущениями. Недавно эта проблема была распространена на стохастические нелинейные системы и нелинейные системы с коммутацией высокого порядка [14-16].

В различных инженерных и физических системах и т.д. часто встречаются временные задержки. Тем не менее, в приведенной выше работах не рассматриваются последствия временных задержек. Как всем известно, явление временной задержки ухудшит производительность системы и даже окажет негативное влияние на стабильность системы. Поэтому очень важно исследовать проблемы стабильности или отслеживания выходных данных нелинейных систем с временной задержкой. В последние годы было довольно много докладов по вопросам стабилизации, но есть всего несколько ссылок, которые похожи на систему, рассмотренную в этом исследовании [18-27]. Существует не так много работ об исследованиях проблемы временной задержки управления с отслеживанием выходных данных по сравнению со случаем проблемы стабилизации. Недавно было получено несколько интересных результатов исследований по проблемам отслеживания выходных данных с помощью обратной связи по выходу [28-31].

В данной статье рассматривается проблема глобального практического отслеживания выходных данных с помощью обратной связи по выходу для класса неопределенных нелинейных систем с изменяющейся во времени задержкой. С помощью соответствующего функционала Ляпунова-Красовского и наблюдателя пониженного порядка, используя подход однородного доминирования и добавляя метод интегратора мощности, успешно разработан контроллер с обратной связью по выходу, гарантирующий, что все состояния системы с замкнутым контуром остаются ограниченными и одновременно делают ошибку отслеживания сколь угодно малой.

В данной статье мы рассматриваем класс неопределенных нелинейных систем с изменяющимся во времени запаздыванием следующего вида:

$$\begin{aligned} &E_i(t) = \alpha_i x_{i+1}(t)^{pi} + \varphi_i(t, x(t), x_1(t - d_1(t)), \ldots, x_n(t - d_n(t)), u(t)) \\ &E_n(t) = \alpha_n u(t) + \varphi_n(t, x(t), x_1(t - d_1(t)), \ldots, x_n(t - d_n(t)), u(t)) \\ &y(t) = \alpha_0 x_1(t) - y_r(t) \end{aligned} \tag{1}$$

здесь $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T \in R^n, u(t) \in R,$ и $y(t) \in R$ состояние, управление и выход системы, соответственно. $d_i(t) \geq 0, i = 1, \ldots, n$ являются изменяющимися во времени задержками. $0 \leq d_i(t) \leq d_i$ константы для $d_i$, начальное состояние системы $x(\theta) = \varphi_0(\theta),\ \ \theta \in [-d, 0]$ с $d \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}.\varphi_i(\cdot), i = 1, \ldots, n$ , неизвестные непрерывные функции и $\alpha_i, i = 0, 1, \ldots, n$ неизвестные константы. Предполагается, что единственным измеряемым сигналом в системе (1) является выходной сигнал $y.p_i \in R_{odd}^{\geq 1}$.

Основной вклад этой работы можно выделить следующим образом: во-первых, рассматриваемые нелинейные системы являются неопределенными по своей сути системами с изменяющимися во времени задержками. Из-за появления неопределенных по своей сути нелинейных членов и изменяющихся во времени задержек наблюдатели и функционалы Ляпунова-Красовского неприменимы к системе (1). Поэтому выбор подходящего функционала Ляпунова-Красовского и построение доступного наблюдателя – непростая работа. В этой работе мы вводим новый функционал Ляпунова-Красовского и используя подход однородного доминирования, преодолеваем ряд трудностей, возникших при анализе и проектировании, например, из-за нелинейных членов, не являющихся точно известными, или функционалом Ляпунова-Красовского. Кроме того, из-за многократных задержек, изменяющихся во времени, неизбежно возникнет множество более сложных нелинейных терминов. Во-вторых, для рассматриваемой системы предлагается контроллер обратной связи на выходе с наблюдателем с использованием рекурсивного подхода к проектированию, и гарантируется отслеживание выходных данных соответствующей системы с замкнутым контуром.

*Обозначение:* $R^n$ обозначает действительное $n$-мерное пространство и $R^+ := [0, \infty)$. Для любого вектора $x := (x_1, \dots, x_n)\ T \in R^n$, $\|x\|$ обозначает евклидову норму $x$. Функция $f : r^n \to R$ называется функцией $C^k$, если ее частные производные существуют и непрерывны до порядка $k$, $1 \le k < \infty$. Функция $C^0$ означает, что она непрерывна. Функция $C^\infty$ означает, что она гладкая, то есть она имеет непрерывные частные производные любого порядка. Кроме того, аргументы функций (или функционалов) иногда опускаются или упрощаются. Например, мы иногда обозначаем функцию $f(x(t))$ через $f(x)$, $f(\cdot)$ или $f$.

*Определение и леммы.*

*Определение.* Для действительных чисел $r_i > 0,\ i = 1,\dots,n$ и фиксированных координат $x = (x_1,\dots,x_n) \in R^n, \forall \varepsilon > 0$

• $\Delta_\varepsilon^r(x)$ расширение определяется с помощью $\Delta_\varepsilon^r(x) = (s^{r1}x_1,\dots,s^{rn}x_n)$ для $\forall \varepsilon > 0$, что называется весами координаты. Для простоты определим вес расширения $\Delta = (r_1,\dots,r_n)$.

• Функция $V \in C(R^n, R)$ называется однородной степени $m$, если существует действительное число $m \ge 0$, такое, что $\forall x \in R^n / \{0\}, V(\Delta_\varepsilon^m(x)) = \varepsilon^m V(x_1,\dots,x_n)$.

• Векторное поле $f = (f_1,\dots,f_n)^T \in C(R^n, R^n)$ называется однородным степени $m$, если существует действительное число $m \in R$, такое, что для $i = 1,\dots,n$, $\forall x \in R^n / \{0\},\ f_i(\varepsilon^{r_1}x_1,\dots,\varepsilon^{r_n}x_n) = \varepsilon^{m+r_1} f_i(x_1,\dots,x_n)$.

• Однородная $p$-норма определяется как $\|x\|_{\Delta,p} = (\sum_{i=1}^n |x_i|^{p/r_i})^{1/p},\ \forall x \in R^n$ для константы $p \ge 1$. Для простоты выберем $p = 2$ и запишем $\|x\|_\Delta$ для $\|x\|_{\Delta,2.}$.

Лемма 1. Учитывая вес расширения $\Delta$, предположим, что $V_1(x)$ и $V_2(x)$ являются однородными функциями степени $m_1$ и $m_2$ соответственно. Тогда $V_1(x)$, $V_2(x)$ по-прежнему является однородной функцией относительно того же веса расширения $\Delta$. Более того, однородная степень $V_1(x)$, $V_2(x)$ равна $m_1 + m_2$.

*Лемма 2***.** Предположим, что $V : R^n \to R$ является однородной функцией степени $m$ относительно веса расширения $\Delta$. Затем выполняется следующее:

(i) $\partial V / \partial x_i$ является однородным по степени $m - r_1$, причем $r_1$ является однородным весом $x_i$.

(ii) Существует такая константа $\bar{\sigma} > 0$, что $V(x) \le \sigma \|x\|_{\Delta}^{m}$. Более того, если $V(x)$ положительно определено, то $\sigma \|x\|^m \le V(x)$ для константы $\sigma > 0$.

*Лемма 3.* Для $x \in R$, $y \in R$ и $p \ge 1$ выполняется следующее:

$$\left|x + y\right|^p \le 2^{p-1}\left|x^p + y^p\right|, \ \left(|x| + |y|\right)^{1/p} \le |x|^{1/p} + |y|^{1/p} \le 2^{(p-1)/p}\left(|x| + |y|\right)^{1/p}.$$

Если $p > 0$ нечетным целым числом, выполняется следующее:

$$\left|x - y\right|^p \le 2^{p-1}\left|x^p - y^p\right|, \left|x^{1/p} - y^{1/p}\right| \le 2^{(p-1)/p}\left|x - y\right|^{1/p}.$$

*Лемма 4.* Для $x \in R$, $y \in R$ и действительного числа $p > 0$ выполняется следующее: $|x^p - y^p| \le p|x - y|\left|x^{p-1} + y^{p-1}\right| \le c|x - y|\left|(x - y)^{p-1} + y^{p-1}\right|$. Где $c = p$ для $1 < p \le 2$ и $c = 2^{p-1}p$ для $p > 2$.

*Лемма 5.* Пусть *x, y* – вещественные переменные. Тогда для любых положительных вещественных чисел *a, b, m* и *n* выполняется следующее:

$$a|x|^m|y|^n \le b|x|^{m+n} + \frac{n}{m+n}\left(\frac{m+n}{n}\right)^{-m/n} a^{(m+n)/n} b^{-m/n}|y|^{m+n}.$$

**Постановка задачи, цели, история.** Целью данной статьи является решение проблемы глобального практического отслеживания выходных данных с помощью контроллера обратной связи на основе наблюдателя для системы (1). Описание сформулируем следующим образом.

Проблема глобального практического отслеживания с помощью выходной обратной связи: при любом заданном допуске $\varepsilon > 0$ конструкция контроллера выходной обратной связи имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{\zeta} = \alpha(\zeta, y), \ \zeta \in R^m \\ &u(t) = g(\zeta, y) \end{aligned} \tag{2}$$

такие, что все состояния систем с замкнутым контуром (1) и (2) хорошо определены и глобально ограничены на $[0, \infty)$, и для любого начального условия $\left(x(0), \ \zeta(0)\right)$ существует конечное время $T\left(\varepsilon, \ x(0), \ \zeta(0)\right) > 0$, что делает ошибку отслеживания систем (1) и (2) удовлетворяющей

$$|y(t)| = |x_1(t) - y_r(t)| < \varepsilon, \ \ \forall t \ge T > 0 \tag{3}$$

**Методы исследования.**

Для достижения поставленной цели необходимы следующие гипотеза.

*Гипотеза 1.* Для *i = 0, 1, . . . , n* существуют положительные константы $\alpha$ и $\bar{\alpha}$ такие, что $\alpha \le |\alpha_i| \le \bar{\alpha}$.

*Гипотеза 2.* Существуют константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и $\tau \ge 0$ такие, что

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_i(t, x(t), x_1(t-d_1(t)),\dots,x_n(t-d_n(t)),u(t))\le \\
&C_1\left(\sum_{j=1}^{i}|x_j(t)|^{(r_i+\tau)/r_j}+\sum^{i}|x_j(t-d_j(t))|^{(r_i+\tau)/r_j}\right)+C_2
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где

$$
r_1 = 1,\ r_{i+1} = \left(r_i + \tau\right)/\, p_i > 0, \quad i = 1, \dots, n \tag{5}
$$

и $p_n = 1$.

*Гипотеза 3.* Временные задержки $d_i(1)$ дифференцируемы и удовлетворяют $0 \le d_i(t) \le d_i$, $d_i(t) \le \gamma_i < 1$ для констант $d_i, \gamma_i$, $i = 1, \dots, n$.

*Гипотеза 4.* Опорный сигнал $y_r(t)$ непрерывно дифференцируется. Более того, существует постоянная $M > 0$, такая, что $|y_r(t)| \le M$, $|\dot{y}_r(t)|(t) \le M$, $\forall t > -d$.

*Замечание 1.* В работах [3-7], даже если все управляющие коэффициенты равны единице, конструкция управления с обратной связью по выходу системы (1) более сложная. Гипотеза 1 ослабляет эти управляющие коэффициенты. По сравнению с [2-4,6,7] гипотеза 2 является более мягким условием; когда $d_i(t) = 0$, это становится гипотезами в [3-8], которые играют важную роль в решении проблемы отслеживания. Когда временные задержки являются постоянными и $p_i = 1$, гипотеза 2 становится допущениями в [28], а когда $d_i \ne 1$ и $p_i \succ 1$, это уменьшает допущения в существующих результатах. Однако, когда $d_i(t) \ne 0$, глобальное отслеживание выходных данных системы (1) с помощью обратной связи по выходу является относительно новой проблемой из-за изменяющейся во времени задержки, вход в состояния системы усложняет конструкцию управления, поскольку наличие эффекта временной задержки делает общее предположение о высокой-нелинейности системы порядка неосуществимы и какие условия должны быть поставлены для нелинейностей, остается без ответа. Гипотеза 4 представляет собой условие опорного сигнала, которое уже можно назвать стандартным условием для решения задачи слежения нелинейных систем (см. [3-8,28]).

В соответствии с гипотезами 1-4, основной целью этой статьи является разработка системы управления обратной связью для решения практической задачи отслеживания выходных данных для неопределенных нелинейных систем с изначально изменяющимися во времени задержками (1). Для достижения этой цели мы осуществляем следующее преобразование:

$$
z_1(t) = \alpha_0 x_1(t), \quad z_i(t) = \tilde{\alpha}_i x_i(t), \quad i = 2,\dots,n \tag{6}
$$

где $\tilde{\alpha}_{i-1} = \prod_{j=1}^{i-2} \alpha_j^{\,1/(p_{i-1}\cdots p_{i-2})}$, $p_0 = 1$. Используя новые координаты (6), система (1) может быть переписана следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\dot{z}_i(t) = z_{i+1}^{pi}(t) + \psi_i(t, z(t), z_1(t-d_1(t)),\dots,z_n(t-d_n(t)),u(t)), \quad i = 1,\dots,n-1,\\
&\dot{z}_n(t) = \tilde{\alpha}_n u(t) + \psi_n(t, z(t), z_1(t-d_1(t)),\dots,z_n(t-d_n(t)),u(t)),\\
&y(t) = z_1(t) - y_r(t)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где,

$$\psi_i(t,z(t),z_1(t-d_1(t)),...,z_n(t-d_n(t)),u(t)) =$$
$$\tilde{\alpha}_{i-1}\varphi_i(t,z(t),z_1(t-d_1(t)),...,z_n(t-d_n(t)),u(t)),\quad i=1,...,n$$

и $\tilde{\alpha}_n = \left(\prod_{j=1}^{n-1}\alpha_{j-1}^{1/(p_{j-1}\cdots p_{n-1})}\right)\alpha_n$.

Используя гипотезу 1, можно легко доказать, что гипотеза 2 также справедлива для $\psi_i$ ,

$$|\psi_i(t,z(t),z_1(t-d_1(t)),...,z_n(t-d_n(t)) \le \bar{C}_1\left(\sum_{j=1}^{i}|z_j(t)\}|^{(r_i+\tau)/r_j} + \sum_{j=1}^{i}\left|z_j(t-d_j(t))\right|^{(r_i+\tau)/r_j}\right) + \bar{C}_2 \quad (8)$$

где $\bar{C}_i, i=1,2$ новые темпы роста.

В дальнейшем мы сначала разработаем стабилизатор с обратной связью по выходу для системы:

$$\begin{aligned} &\dot{\eta}_i(t) = \eta_{i+1}^{p_i}(t),\ i=1,...,n-1,\\ &\dot{\eta}_n(t) = \tilde{\alpha}_n u(t),\\ &y(t) = \eta_1(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Мы используем метод, аналогичный в работе [8], который позволяет построить стабилизатор с обратной связью по состоянию для системы (9), как описано в факте 1.

*Факт 1*. Предположим, что существует стабилизатор с обратной связью по состоянию для системы (9) вида

$$u(\eta) = -\beta_n\xi_n^{(r_n+\tau)/\sigma} = -\beta_n(\eta_n^{\sigma/r_n} + \beta_{n-1}^{\sigma/r_{n-1}}(\eta_{n-1}^{\sigma/r_{n-1}} + ... + \beta_2^{\sigma/r_3}(\eta_2^{\sigma/r_2} + \beta_1^{\sigma/r_2}\eta_1^{\sigma})...))^{(r_n+\tau)/\sigma} \quad (10)$$

с положительно определенной и правильной функцией Ляпунова,

$$V_n = \sum_{i=1}^{n}\int_{*\eta_i}^{\eta_i}(s^{\sigma/r_i} - \eta_i^{*\sigma/r_i})^{(2\sigma-\tau-r_i)/\sigma}ds \quad (11)$$

такой что,

$$\dot{V}_n \le -\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2, \quad (12)$$

где $\xi_i = \eta_i^{\sigma/r_i} - \eta_i^* = -\beta_{i-1}\xi_{i-1}^{r/\sigma}, \eta_1^* = 0, \sigma \ge \max_{1\le i\le n}\{\tau + r_i\}$ и $\beta_i, i=1,...,n$ являются положительными константами. Тогда системы с замкнутым контуром (9) и (10) глобально асимптотически устойчивы.

Когда состояния *$\eta 2$, . . . , $\eta_n$* неизмеримы, он может заменить $\eta_i$ на (9) с помощью принципа эквивалентности определенности и с помощью подхода, аналогичного [8], который может построить стабилизатор с обратной связью по выходу для системы (9), как описано в *факте 2*.

*Факт 2*. Предположим, что существует основанный на наблюдении стабилизатор выходной обратной связи для системы (9) следующего вида

$$\begin{aligned}&\dot{\zeta}_2 = -l_1 \hat{\eta}_2^{p_1}, \hat{\eta}_2^{p_1} = \left(\zeta_2 + l_1 \eta_1\right)^{r_2 p_1 / r_1}\\&\dot{\zeta}_i = -l_{i-1} \hat{\eta}_i^{p_{i-1}}, \hat{\eta}_i^{p_{i-1}} = \left(\zeta_i + l_{l-1} \hat{\eta}_{i-1}\right)^{r_{ip_{i-1}} / r_{i-1}}, i = 3, \ldots, n\end{aligned} \tag{13}$$

$$u(\hat{\eta}) = -\beta_n (\hat{\eta}_n^{\sigma/r_n} + \beta_{n-1}^{\sigma/r_{n-1}} (\hat{\eta}_{n-1}^{\sigma/r_{n-1}} + \ldots + \beta_2^{\sigma/r_3} (\eta_2^{\sigma/r_2} + \beta_1^{\sigma/r_2} \eta_1^{\sigma})\ldots))^{(r_n+\tau)/\sigma} \tag{14}$$

с положительно определенной, непрерывно дифференцируемой и правильной функцией Ляпунова,

$$Q = V_n + \sum_{i=2}^{n} U_i \tag{15}$$

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{\eta_i^*}^{\eta_i} \left(s^{\sigma/r_i} - \eta_i^{*\sigma/r_i}\right)^{(2\sigma-\tau-r_i)/\sigma} ds, U_i = \int_{(\zeta_i + l_{i-1}\eta_{i-1})^{(2\sigma-\tau-r_{i-1})/r_{i-1}}}^{\eta_i^{(2\sigma-\tau-r_{i-1})/r_i}} \left(S^{r_{i-1/(2\sigma-\tau-r_{i-1})}} - (\zeta_i + l_{i-1}\eta_{i-1})\right) ds$$

такой, что

$$\dot{Q} \leq -\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 - \sum_{j=2}^{n} e_j^2 \tag{16}$$

где $\xi_i = \eta_i^{\sigma/r_i} - \eta_i^{*\sigma/r_i}, \eta_i^* = -\beta_{i-1} \xi_{i-1}^{r_i/\sigma}, \eta_1^* = 0, \sigma \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{\tau + r_i\}, e_i = \left(\eta_i^{p_{i-1}} - \hat{\eta}_i^{p_{i-1}}\right)^{\sigma/(r_i p_{i-1})}$, и $l_i, \beta_i, i = 1, \ldots, n$ – положительные константы. Тогда системы с замкнутым контуром (9), (13) и (14) являются глобально асимптотически устойчивыми.

Доказательства *фактов 1-2* аналогичны как в работе [8], теорема 1, с некоторыми изменениями, и параметры $l_i, i = 1, \ldots, n$ для наблюдателя (13) также могут быть выбраны методом, предложенным в [8]. Поэтому в этой работе пропустим данное доказательство.

Обратите внимание, что из построения $Q$ нетрудно проверить, что $Q$ является положительным, определенным и правильным относительно

$$H := [\eta_1, \ldots, \eta_n, \hat{\eta}_2, \ldots, \hat{\eta}_n]^T \tag{17}$$

Системы с замкнутым контуром (9), (13) и (14) могут быть переписаны как

$$\dot{H} = F(H) = \left[\eta_2^{p1}, \ldots, \eta_n^{p_{n-1}}, \tilde{\alpha} u(\eta_1, \hat{\eta}_2, \ldots, \hat{\eta}_n, f_{n+1}, \ldots, f_{2n-1}\right]^T \tag{18}$$

где $f_{n+1} := \dot{\zeta}_2, f_{n+2} := \dot{\zeta}_3, \ldots, f_{2n-1} := \dot{\zeta}_n$.

Более того, путем введения веса расширения,

$$\Delta = [\underbrace{r_1, r_2, \ldots, r_n,}_{for\,\eta_{1,\ldots,\eta_n}} \underbrace{[r_1, r_2, \ldots, r_{n-1},}_{for\,\hat{\eta}_{2,\ldots,\eta_n}} \tag{19}$$

По *определению* можно проверить, что  имеет однородную степень τ, и поскольку система (18) глобально асимптотически устойчива по *факту 2*, то существует функция Ляпунова $Q(H)$ однородной степени 2σ –τ для веса расширения Δ и удовлетворяет

$$\left|\dot{Q}(H)\right|(18) = \left|\frac{\partial Q(H)}{\partial H} F(H)\right| \leq -c_1 \|H\|^{2\sigma} \tag{20}$$

где $c_1 > 0$ является константой $\|H\| = \left(\sum_{i=1}^{2n-1} |H_i|^{2/r_i}\right)^{1/2}$. И, более того, существует константа $c_2 > 0$, такая, что выполняется следующее:

$$\left|\frac{\partial Q(H)}{\partial H_i}\right| \le -c_1 \|H\|^{2\sigma-\tau-r_i}, c_2 > 0 \tag{21}$$

Затем будет сконструирован контроллер с обратной связью по выходу для решения проблемы глобального практического отслеживания выходных данных.

**Результаты и обсуждения.** *Теорема 1.* Согласно гипотезам 1-4, проблема глобального практического отслеживания выходных данных для системы (7) может быть решена с помощью управления с обратной связью по выходу с использованием форм (13) и (14).

*Доказательство.* Основанный на наблюдении контроллер выходной обратной связи сконструирован путем введения масштабного усиления в контроллер выходной обратной связи, полученный в факте 2. Прежде чем продолжить, мы вводим следующее преобразование координат:

$$\begin{aligned} &x_1(t) := y(t), \\ &L^{K_i} z_i(t) := x_i(t), \quad i = 2,\dots,n, \\ &L^{K_{n+1}} \vartheta(t) := u(t) \end{aligned} \tag{22}$$

где $\kappa_1 = 0$, $\kappa_i = (\kappa_{i-1} + 1)/p_{i-1}, i = 2, \dots, n$ и $L \ge 1$ является константой, подлежащей определению. В соответствии с координатами (22) система (7) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i(t) = Lx_{i+1}^{p_i}(t) + \psi_i(\cdot)/L^{Ki}, i = 1,\dots,n-1, \\ &\dot{x}_n(t) = L\tilde{\alpha}\upsilon(t) + \psi_i(\cdot)/L^{Kn}, \\ &y(t) = x_1(t) \end{aligned} \tag{23}$$

Используя лемму 3 и тот факт, что L ≥ 1, нетрудно доказать, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^{Ki}} |\psi_i(\cdot))| \le \frac{C_1}{L^{Ki}} \Bigg( & \left(|x_1(t)\right) + y_r(t)|^{(r_i+\tau)/r_1} + \sum_{j=2}^{i} |L^{Ki} x_j(t)|^{(r_i+\tau)/r_j} \\ & + |x_1(t-d_1(t)) + y_r(t-d_1(t))|^{(r_i+\tau)/r_1} + \sum_{j=2}^{i} |L^{Kj} x_j(t-d_j(t))|^{(r_i+\tau)/r_j} \Bigg) + \frac{C_2}{L^{Ki}} \end{aligned} \tag{24}$$

Далее, исходя из гипотезам 2, мы можем легко вычислить

$$\frac{1}{L^{Ki}} |\psi_i(\cdot)| \le \bar{C}_1 L^{1-\upsilon} \sum_{j=1}^{i} \left( |x_j(t)|^{\frac{r_i+\tau}{r_j}} + \left|x_j\left(t-d_j(t)\right)\right|^{\frac{r_i+\tau}{r_j}} + |x_j\left(t-d_j(t)\right)|^{\frac{r_i+\tau}{r_i}} \right) + \frac{\bar{C}_2}{L^{Ki}}, i = 1,\dots,n \tag{25}$$

где $\upsilon = \min_{2\le j\le i, 1\le i\le n} \left\{1 - k_j(r_i+\tau)/r_j + k_i\right\} > 0$ и $\bar{C}_i > 0, i = 1,2$ только в зависимости от $C_i$, $\tau$, $\kappa_i$ и $M$.

Далее мы строим наблюдателя с коэффициентом масштабирования $L$,

$$\begin{aligned}&\dot{\zeta}_2 = -Ll_1\hat{x}_2^{p_1}, \hat{x}_2^{p_1} = (\zeta_2 + l_1 x_1)^{r_2 p_1/r1}\\&\dot{\zeta}_2 = -Ll_{1-1}\hat{x}_i^{p_{i-1}}, \hat{x}_i^{p_{i-1}} = (\zeta_i + l_{i-1}\hat{x}_{i-1})^{r_i p_{i1}/r_{i-1}},\ \ i = 3,...,n\end{aligned} \tag{26}$$

и контроллер, использующий ту же конструкцию (14), т.е.,

$$u(t) = L^{K_n+1}\upsilon(\hat{x}) = -L^{K_n+1}\beta_n(\hat{x}_n^{\sigma/r_n} + \beta_{n-1}^{\sigma/r_n}(\hat{x}_{n-1}^{\sigma/r_{n-1}} + ...\beta_2^{\sigma/r_3}(\hat{x}_2^{\sigma/r_2} + \beta_1^{\sigma/r_3}\hat{x}_1^{\sigma})...))^{(r_{n+\tau})/\sigma}. \tag{27}$$

Очевидно, что, используя те же обозначения (17), система (23), (26) и (27) может быть записана следующим образом

$$\dot{X} = LF(X) + \left[\psi_1(\cdot), \frac{1}{L^{K_2}}\psi_2(\cdot), \psi_3(\cdot), ..., \frac{1}{L^{K_n}}\psi_n(\cdot), 0, ..., 0\right]^T \tag{28}$$

где $F(X)$ является таким же, как определено в (18).

Следовательно, принимая функцию Ляпунова $Q(X)$, как в (15), ее производная по (28) удовлетворяет

$$\begin{aligned}\dot{Q}(X) &= L\frac{\partial Q(X)}{\partial X}F(X) + \frac{\partial Q(X)}{\partial X}[\psi_1(\cdot), \tfrac{1}{L^{K2}}\psi_2(\cdot), \psi_3(\cdot), ..., \tfrac{1}{L^{Kn}}\psi_n(\cdot), 0, ..., 0]^T\\&\le -Lc_1\|X\|^{2\sigma} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q(X)}{\partial X_i}\frac{\psi_i(\cdot)}{L^{K_i}}.\end{aligned} \tag{29}$$

Далее, используя (25), получаем

$$\begin{aligned}&\dot{Q}(X) \le -Lc_1\|X\|^{2\sigma} +\\&\bar{C}_1\sum_{i=1}^{n}L^{1-\upsilon}\left|\frac{\partial Q(X)}{\partial X_i}\right|\left(\sum_{j=1}^{i}|x_j|^{\frac{r_i+\tau}{r_j}} + \sum_{j=1}^{i}|x_j(t-d_j(t))|^{\frac{r_i+\tau}{r_j}}\right) + \bar{C}_2\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{L^{K_i}}\left|\frac{\partial Q(X)}{\partial X_i}\right|\end{aligned} \tag{30}$$

Согласно лемме 2 и [35], $\dfrac{\partial Q(X)}{\partial X_i}$ является однородным по степени $2\sigma - \tau - r_i$, члены $\left|\dfrac{\partial Q(X)}{\partial X_i}\right|\sum_{j=1}^{i}\left|x_j\right|^{(r_i+\tau)/r_j}$ и $\left|\dfrac{\partial Q(X)}{\partial X_i}\right|\sum_{j=1}^{i}\left|x_j(t-d_j(t))\right|^{(r_i+\tau)/r_j}$ являются однородными по степени $2\sigma$, и поэтому из лемм 1 и 2 следует, что существуют $\hat{\omega}_i, \breve{\omega}_i$ положительные константы для $i = 1,...,n$, такие, что

$$\left|\frac{\partial Q(X)}{\partial X_i}\right|\left(\sum_{j=1}^{i}\left|x_j\right|^{(r_i+\tau)/r_j} + \sum_{j=1}^{i}\left|x_j(t-d_j(t))\right|^{(r_i+\tau)/r_j}\right) \le \hat{\omega}_i\|X(t)\|^{2\sigma} + \breve{\omega}_i\|X(t-d_i(t))\|^{2\sigma}.$$

Кроме того, из лемм 2, 4 и 5 следует, что существуют положительные константы $b_1, \bar{b}_2, \tilde{b}_2$ такие, что

$$\left|\frac{\partial Q(X)}{\partial X_i}\right| \le b_1\|X\|^{2\sigma-\tau-r_1} = b_1(L^{\frac{1}{2\sigma}}\|X\|)^{2\sigma-\tau-r_1}(L^{-\frac{2\sigma-\tau-r_1}{2\sigma(\tau+r_1)}})^{\tau+r_1} \le \frac{c_1}{2}L\|X\|^{2\sigma} + \bar{b}_2 L^{-\frac{2\sigma-\tau-r_1}{\tau+r_1}} \tag{31}$$

$$\frac{1}{L^{Ki}}\left|\frac{\partial Q(X)}{\partial X_{i}}\right| \le c_2 \|X\|^{2\sigma-\tau-r_i}\left(L^{-K_i/(\tau+r_i)}\right)^{\tau+r_i} \le \bar{c}_2\|X\|^{2\sigma}+\tilde{b}_2 L^{-2\sigma K_i/(\tau+r_i)}, i=2,\dots,n$$

$$\begin{aligned}\dot{Q}(X(t)) &\le -L\left(\frac{c_1}{2}-(n-1)\bar{c}_2 L^{-1}-L^{-\upsilon}\bar{C}_1\sum_{i=1}^{n}\widehat{\omega}_i\right)\|X(t)\|^{2\sigma}\\ &+\left(L^{1-\upsilon}\bar{C}_1\sum_{i=1}^{n}\breve{\omega}_i\right)\|X(t-d_i(t))\|^{2\sigma}+\bar{b}_2L^{-1}+\tilde{b}_2L^{-1}+\tilde{b}_2(n-1)L^{-K_{\min}}\end{aligned} \tag{32}$$

где $\kappa_{min} = min\{\kappa_i\}$.

Чтобы устранить эффект временных задержек, мы выбрали функционал Ляпунова-Красовского следующим образом:

$$V(X)=Q(X)+S(X),\quad S(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{1-\gamma_i}\int_{t-d_i(t)}^{t}\|X(s)\|^{2\sigma}ds \tag{33}$$

где $\lambda > 0$ это параметр, который будет определен позже.

Поскольку $Q(X) > 0$ непрерывно дифференцируемо и правильно, существуют два класса $K_\infty$ функций, $\pi_1$ и $\pi_2$, такие, что

$$\pi_1(|X|)\le Q(X)\le \pi_2(|X|) \tag{34}$$

Согласно однородной теории, существуют константы $\delta_i > 0,\ i = 1,2$ , такие, что

$$\delta_1\|X\|^{2\sigma}\le W(X)\le \delta_2\|X\|^{2\sigma} \tag{35}$$

где $W(X) > 0$ – функция, однородная степень которой равна $2\sigma$. Следовательно, справедливо следующее:

$$\bar{\pi}_1(|X|)\le W(X)\le \bar{\pi}_2(|X|) \tag{36}$$

с двумя функциями класса $K_\infty$.

С помощью $0 \le d_i(t) \le d_i$ и $d_i(t) \le y_i < 1$ следует, что

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{1-\gamma_i}\int_{t-d_i(t)}^{t}\|X(s)\|^{2\sigma}ds\le\bar{\delta}_i\int_{t-d_i}^{t}\tilde{\pi}_2(|X(s)|\,ds\le\bar{\delta}_i\int_{-d_i}^{0}\tilde{\pi}_2(|X(\varsigma+t)|\,d(\varsigma+t)\\ &\le\tilde{\delta}_i\sup_{-d_i\le\varsigma\le0}\tilde{\pi}_2\left|X(\varsigma+t)\right|\le\hat{\pi}_2\left(X\left|(\varsigma+t)\right|\right)\end{aligned} \tag{37}$$

Определяя $\pi_2=\breve{\pi}_2+\breve{\pi}_2$ из (33), (34) и (37), следует, что

$$\breve{\pi}_1(|X(t)|)\le S(X(t))\le\pi_2(\sup_{-d\le\varsigma\le0}|X(\varsigma+t)|) \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\dot{Q}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{1-\gamma_i}\|X(t)\|^{2\delta}-\sum_{i=1}^{n}\lambda\|X(t-d_i(t)\|^{2\sigma}\\ &=-L\left(\frac{c_1}{2}-(n-1)\bar{c}_2L^{-1}-L^{-\nu}m_1-L^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{1-\gamma_i}\right)\|X(t)\|^{2\mu}\\ &-(\lambda-L^{1-\upsilon}m_2)\|X(t-d_i(t))\|^{2\mu}+\bar{b}_2(L^{-1}+L^{-K_{\min}})\end{aligned} \tag{39}$$

Следовательно, выбирая $\lambda = m_2 L^{1-\upsilon}$ и с достаточно большим $L$, он удовлетворяет $(n-1)\bar{c}_2 L^{-1} + L^{-\upsilon}\left(m_1 + m_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\gamma_i}\right) \le \frac{c_1}{2}$.

Тогда неравенство (39) становится

$$\dot{V}(X(t)) \le -\frac{c_1 L}{2}\left\|X(t)\right\|^{2\sigma} + \rho_1 \tag{40}$$

В (33) $V_n(z)$ и $S(z)$ являются однородными степени $2\sigma - \tau$ и $2\sigma$ по отношению к весу расширения $\Delta$ соответственно. Следовательно, из леммы 2 следует, что существуют константы $\lambda_1 > 0$ и $v_i > 0$ для $i = 1, 2$ такие, что

$$\lambda_1 \left\|X(t)\right\|^{2\sigma-\tau} \le Q(X(t)) \le \lambda_2 \left\|X(t)\right\|^{2\sigma-\tau} \tag{41}$$

$$\omega_1 \left\|X(t)\right\|^{2\delta} \le S(X(t)) \le \omega_2 \left\|X(t)\right\|^{2\sigma}. \tag{42}$$

Более того, из-за $2\sigma - \tau \le 2\sigma$, $L(\tau - 2\sigma)/\tau < 1$, $\tau - 2\sigma < 0$, $L > 1$ и по лемме 4 мы имеем

$$\lambda_2 \left\|X(t)\right\|^{2\sigma-\tau} = L\left((\lambda_2 / L)^{1/\tau}\right)^{\tau} \left\|X(t)\right\|^{2\sigma-\tau} \le \frac{2\sigma-\tau}{2\sigma} L\left\|X(t)\right\|^{2\sigma} + \frac{\tau L^{(\tau-2\sigma)/\tau}}{2\sigma}\lambda_2^{2\sigma/\tau} \tag{43}$$

Далее, мы имеем

$$V(X(t)) \le \rho_2 L\left\|X(t)\right\|^{2\sigma} + \frac{\tau L^{(\tau-2\sigma)/\tau}}{2\sigma}\lambda_2^{2\sigma/\tau} \tag{44}$$

$$\frac{1}{\rho_2}V(X(t)) \le L\left\|X(t)\right\|^{2\sigma} + \frac{\tau L^{(\tau-2\sigma)/\tau}}{2\sigma\rho_2}\lambda_2^{2\sigma/\tau} \tag{45}$$

где $p =: (\omega_2 + (2\delta - \tau)/2\delta$.

Следовательно, из (33) и (44) следует, что

$$\dot{V}(X(t)) \le -\frac{c_1}{2}\left(L\left\|X(t)\right\|^{2\sigma} + \frac{\tau L^{(\tau-2\sigma)/\tau}}{2\sigma\rho_2}\lambda_2^{2\sigma/\tau}\right) + \frac{\tau L^{(\tau-2\sigma)/\tau}}{2\sigma\rho_2}\lambda_2^{2\sigma/\tau} + \rho_1 \le -\frac{c_1}{2\rho_2}V(X(t)) + \bar{\rho}_1, \tag{46}$$

где $\bar{\rho}_1 = \frac{c_1 \tau L^{(\tau-2\sigma)/\tau}}{4\sigma\rho_2}\lambda_2^{2\sigma/\tau} + \rho_1 = \frac{c_1 \tau \lambda_2^{2\sigma/\tau}}{4\sigma\rho_2} L^{-(2\sigma-\tau)/\tau} + \bar{b}_2 L^{-1} + \tilde{b}_2 L^{-1} + \tilde{b}_2 (n-1) L^{-K_{\min}}$.

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tc_1/(2\rho_2)}V(X(t))\right) \le e^{tc_1/(2\rho 2)}\bar{\rho}_1 \tag{47}$$

принимая интеграл с обеих сторон,

$$e^{tc_1/(2\rho_2)}V(X(t)) - V(X(0)) \le \frac{2\rho_2}{c_1}\bar{\rho}_1\left(e^{tA_1/(2\rho_2)} - 1\right) \tag{48}$$

Следовательно, существует конечное время $T > 0$,

$$V(X(t)) \le e^{-tc_1/\rho_2} V(X(0)) + \frac{2\rho_2}{c_1} \bar{\rho}_1 \left(1 - e^{-tc_1/\rho_2}\right) \le \frac{6\rho_2}{c_1} \bar{\rho}_1 \quad (49)$$

Это приводит к $\left|x_1(t) - y_r(t)\right| = \left|x_1(t)\right| \le \frac{3}{2\sigma L^{(2\sigma-\tau)/\tau}} \lambda_2^{2\sigma/\tau} + \frac{6\bar{b}_2\rho_2}{c_1 L} + \frac{6(n-1)\tilde{b}_2\rho_2}{c_1 L^{K\min}}$, для любых $t > T$.

Таким образом, для любого заданного допуска $\varepsilon > 0$ существует достаточно большой $L$, такой, что $\left|x_1(t) - y_r(t)\right| \le \varepsilon, \quad \forall t > T > 0.$ Это завершает доказательство нашей главной теоремы.

Некоторые интересные проблемы все еще оставались; например, если скорость роста в гипотезе 2 является неизвестной константой, как мы можем спроектировать адаптивный контроллер с обратной связью по выходу для системы (1)? Недавно было получено несколько результатов по переключаемым или стохастическим нелинейным системам высокого порядка с временной задержкой (например, [14-16]), но в этих работах рассматриваются только системы с нелинейным ростом высокого порядка. Важный вопрос заключается в том, могут ли эти результаты быть распространены на переключаемые или стохастические нелинейные системы с нелинейностями низкого порядка или на вышеупомянутые классы нелинейных систем в целом.

**Выводы.** В этой статье решена проблема практического отслеживания глобального выходного сигнала для класса неопределенных нелинейных систем с изначально изменяющимися во времени задержками с помощью управления с обратной связью на основе наблюдателя. С помощью метода однородного доминирования и нового функционала Ляпунова-Красовского в предлагаемый контроллер с обратной связью по выходу вводится масштабирующее усиление, гарантирующее, что все состояния замкнутой системы остаются ограниченными, и одновременно делающее ошибку отслеживания сколь угодно малой. Полученные результаты математического моделирования подтверждаются доказательствами и планируется реализовать предложенный подход вычислительными методами.

**ЛИТЕРАТУРА**

1 Qian C., Lin W. Practical output tracking of nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2002. – 47. – P.21-36.

2 Lin, W., Pongvuthithum R. Adaptive output tracking of inherently nonlinear systems with nonlinear parameterization // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2003. – 48. – P.1737-1749.

3 Gong Q., Qian C. Global practical output regulation of a class of nonlinear systems by output feedback // Automatica 2007, 43, 184-189.

4 Sun, Z.-Y., Liu, Y.-G. Adaptive practical output tracking control for high-order nonlinear uncertain systems // Acta Automatica Sinica 2008, 34, 984-989.

5 Alimhan K., Inaba H. Robust practical output tracking by output compensator for a class of uncertain inherently nonlinear systems // International Journal of Modelling, Identification and Control 2008, 4, 304-314.

6 Yan X., Liu Y. Global practical tracking for high order uncertain nonlinear systems with unknown control directions // SIAM Journal on Control and Optimization 2010, 48, 4453-4473.

7 Yan X., Liu Y. Global practical tracking by output feedback for nonlinear systems with unknown growth rate // Science China Information Sciences 2011, 54, 2079-2090.

8 Zhai J., Fei S. Global practical tracking control for a class of uncertain non-linear systems // IET Control Theory & Applications 2011, 5, 1343-1351.

9 Alimhan K., Otsuka N., Alimhan K., Otsuka N. A note on practically output tracking control of nonlinear systems that may not be linearizable at the origin // In Communications in Computer and Information Science; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2011; Volume 256, pp. 17-25.

10 Yan X., Liu Y. The further result on global practical tracking for high-order uncertain nonlinear systems // Journal of Systems Science and Complexity 2012, 25, 227-237.

11 Zhai J., Qian C. Global control of nonlinear systems with uncertain output function using homogeneous domination approach // International Journal of Robust and Nonlinear Control 2012, 22, 1543-1561.

12 Alimhan K., Otsuka N., Adamov A.A., Kalimoldayev M.N. Global practical output tracking of inherently non-linear systems using continuously differentiable controllers // Mathematical Problems in Engineering 2015, 2015, 932097.

13 Alimhan K., Otsuka N., Kalimoldayev M.N., Adamov, A.A. Output Tracking Problem of Uncertain Nonlinear Systems with High-Order Nonlinearities // In Proceedings of the 2015 8th International Conference on Control and Automation, Jeju, Korea, 25-28 November 2015; pp. 1-4.

14 Song Z., Zhai J. Practical output tracking control for switched nonlinear systems: A dynamic gain based approach // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 2018, 30, 147-162. Computation 2022, 10, 187.

15 Guo L.C. Practical tracking control for stochastic nonlinear systems with polynomial function growth conditions // Automatika 2019, 60, 443-450.

16 Jiang Y., Zhai J. Practical tracking control for a class of high-order switched nonlinear systems with quantized input // ISA Transactions 2020, 96, 218-227.

17 Qian C. A homogeneous domination approach for global output feedback stabilization of a class of non-linear systems // In Proceedings of the American Control Conference, Portland, OR, USA, 8-10 June 2005; pp. 4708-4715.

18 Sun Z., Liu Y., Xie X. Global stabilization for a class of high-order time-delay nonlinear systems // International Journal of Innovative Computing, Information and Control 2011, 7, 7119-7130.

19 Sun Z., Xie X., Liu Z. Global stabilization of high-order nonlinear systems with multiple time delays // International Journal of Control 2013, 86, 768-778.

20 Sun Z., Zhang X., Xie X. Continuous global stabilization of high-order time-delay nonlinear systems // International Journal of Control 2013, 86, 994-1007.

21 Chai L. Global Output Control for a Class of Inherently Higher-Order Nonlinear Time-Delay Systems Based on Homogeneous Domination Approach // Discrete Dynamics in Nature and Society 2013, 2013, 180717.

22 Zhai J. Global output feedback stabilization for a class of nonlinear time-varying delay systems // Applied Mathematics and Computation 2014, 228, 606-614.

23 Zhang N., Zhang E., Gao F. Global Stabilization of High-Order Time-Delay Nonlinear Systems under a Weaker Condition // In Abstract and Applied Analysis; Hindawi: London, UK, 2014; pp. 1-8.

24 Gao F., Wu Y. Further results on global state feedback stabilization of high-order nonlinear systems with time-varying delays // ISA Transactions 2015, 55, 41-48.

25 Gao F., Wu Y. Global stabilisation for a class of more general high-order time-delay nonlinear systems by output feedback // International Journal of Control 2015, 88, 1540-1553.

26 Gao F., Wu Y., Yuan F. Global output feedback stabilisation of high-order nonlinear systems with multiple time-varying delays // International Journal of Systems Science 2016, 47, 2382-2392.

27 Zhang X., Lin W., Lin Y. Nonsmooth Feedback Control of Time-Delay Nonlinear Systems: A Dynamic Gain Based Approach // IEEE Transactions on Automatic Control 2016, 62, 438-444.

28 Yan X., Song X. Global Practical Tracking by Output Feedback for Nonlinear Systems with Unknown Growth Rate and Time Delay // The Scientific World Journal 2014, 2014, 713081.

29 Jia X., Xu S., Chen J., Li Z., Zou Y. Global output feedback practical tracking for time-delay systems with uncertain polynomial growth rate // Journal of The Franklin Institute 2015, 352, 5551-5568.

30 Jia X., Xu S. Global practical tracking by output feedback for nonlinear time-delay systems with uncertain polynomial growth rate // In Proceedings of the 2015 34th Chinese Control Conference (CCC), Hangzhou, China, 28–30 July 2015; pp. 607-611.

31 Jia X., Xu S., Ma Q., Qi Z., Zou Y. Global practical tracking by output feedback for a class of non-linear time-delay systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information 2016, 33, 1067-1080.

## REFERENCES

1 Qian C., Lin W. Practical output tracking of nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2002. – 47. – P.21-36.

2 Lin, W., Pongvuthithum R. Adaptive output tracking of inherently nonlinear systems with nonlinear parameterization // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2003. – 48. – P.1737-1749.

3 Gong Q., Qian C. Global practical output regulation of a class of nonlinear systems by output feedback // Automatica 2007, 43, 184-189.

4 Sun, Z.-Y., Liu, Y.-G. Adaptive practical output tracking control for high-order nonlinear uncertain systems // Acta Automatica Sinica 2008, 34, 984-989.

5 Alimhan K., Inaba H. Robust practical output tracking by output compensator for a class of uncertain inherently nonlinear systems // International Journal of Modelling, Identification and Control 2008, 4, 304-314.

6 Yan X., Liu Y. Global practical tracking for high order uncertain nonlinear systems with unknown control directions // SIAM Journal on Control and Optimization 2010, 48, 4453-4473.

7 Yan X., Liu Y. Global practical tracking by output feedback for nonlinear systems with unknown growth rate // Science China Information Sciences 2011, 54, 2079-2090.

8 Zhai J., Fei S. Global practical tracking control for a class of uncertain non-linear systems // IET Control Theory & Applications 2011, 5, 1343-1351.

9 Alimhan K., Otsuka N., Alimhan K., Otsuka N. A note on practically output tracking control of nonlinear systems that may not be linearizable at the origin // In Communications in Computer and Information Science; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2011; Volume 256, pp. 17-25.

10 Yan X., Liu Y. The further result on global practical tracking for high-order uncertain nonlinear systems // Journal of Systems Science and Complexity 2012, 25, 227-237.

11 Zhai J., Qian C. Global control of nonlinear systems with uncertain output function using homogeneous domination approach // International Journal of Robust and Nonlinear Control 2012, 22, 1543-1561.

12 Alimhan K., Otsuka N., Adamov A.A., Kalimoldayev M.N. Global practical output tracking of inherently non-linear systems using continuously differentiable controllers // Mathematical Problems in Engineering 2015, 2015, 932097.

13 Alimhan K., Otsuka N., Kalimoldayev M.N., Adamov, A.A. Output Tracking Problem of Uncertain Nonlinear Systems with High-Order Nonlinearities // In Proceedings of the 2015 8th International Conference on Control and Automation, Jeju, Korea, 25-28 November 2015; pp. 1-4.

14 Song Z., Zhai J. Practical output tracking control for switched nonlinear systems: A dynamic gain based approach // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 2018, 30, 147-162. Computation 2022, 10, 187.

15 Guo L.C. Practical tracking control for stochastic nonlinear systems with polynomial function growth conditions // Automatika 2019, 60, 443-450.

16 Jiang Y., Zhai J. Practical tracking control for a class of high-order switched nonlinear systems with quantized input // ISA Transactions 2020, 96, 218-227.

17 Qian C. A homogeneous domination approach for global output feedback stabilization of a class of non-linear systems // In Proceedings of the American Control Conference, Portland, OR, USA, 8-10 June 2005; pp. 4708-4715.

18 Sun Z., Liu Y., Xie X. Global stabilization for a class of high-order time-delay nonlinear systems // International Journal of Innovative Computing, Information and Control 2011, 7, 7119-7130.

19 Sun Z., Xie X., Liu Z. Global stabilization of high-order nonlinear systems with multiple time delays // International Journal of Control 2013, 86, 768-778.

20 Sun Z., Zhang X., Xie X. Continuous global stabilization of high-order time-delay nonlinear systems // International Journal of Control 2013, 86, 994-1007.

21 Chai L. Global Output Control for a Class of Inherently Higher-Order Nonlinear Time-Delay Systems Based on Homogeneous Domination Approach // Discrete Dynamics in Nature and Society 2013, 2013, 180717.

22 Zhai J. Global output feedback stabilization for a class of nonlinear time-varying delay systems // Applied Mathematics and Computation 2014, 228, 606-614.

23 Zhang N., Zhang E., Gao F. Global Stabilization of High-Order Time-Delay Nonlinear Systems under a Weaker Condition // In Abstract and Applied Analysis; Hindawi: London, UK, 2014; pp. 1-8.

24 Gao F., Wu Y. Further results on global state feedback stabilization of high-order nonlinear systems with time-varying delays // ISA Transactions 2015, 55, 41-48.

25 Gao F., Wu Y. Global stabilisation for a class of more general high-order time-delay nonlinear systems by output feedback // International Journal of Control 2015, 88, 1540-1553.

26 Gao F., Wu Y., Yuan F. Global output feedback stabilisation of high-order nonlinear systems with multiple time-varying delays // International Journal of Systems Science 2016, 47, 2382-2392.

27 Zhang X., Lin W., Lin Y. Nonsmooth Feedback Control of Time-Delay Nonlinear Systems: A Dynamic Gain Based Approach // IEEE Transactions on Automatic Control 2016, 62, 438-444.

28 Yan X., Song X. Global Practical Tracking by Output Feedback for Nonlinear Systems with Unknown Growth Rate and Time Delay // The Scientific World Journal 2014, 2014, 713081.

29 Jia X., Xu S., Chen J., Li Z., Zou Y. Global output feedback practical tracking for time-delay systems with uncertain polynomial growth rate // Journal of The Franklin Institute 2015, 352, 5551-5568.

30 Jia X., Xu S. Global practical tracking by output feedback for nonlinear time-delay systems with uncertain polynomial growth rate // In Proceedings of the 2015 34th Chinese Control Conference (CCC), Hangzhou, China, 28–30 July 2015; pp. 607-611.

31 Jia X., Xu S., Ma Q., Qi Z., Zou Y. Global practical tracking by output feedback for a class of nonlinear time-delay systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information 2016, 33, 1067-1080.

***Н. ТАСБОЛАТҰЛЫ[1], А. К. ЕРДЕНОВА[1,2], А. Е. НАЗЫРОВА[1,2], Г. Б. БАХАДИРОВА[1], С. С. АЛИШЕВА[2]***

*[1]Астана халықаралық университеті, Астана, Қазақстан;*
*[2]Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Казахстан*
*(E-mail: [1]tasbolatuly@gmail.com, [2]erdenova_aigerim@mail.ru, [3]ayzhan.nazyrova@gmail.com, [4]gulnaz.bahadirova.84@mail.ru, [5]sandu_alish@mail.ru)*

## АНЫҚТАЛМАҒАН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ЖҮЙЕЛЕР КЛАСЫ ҮШІН ГЛОБАЛДЫ ПРАКТИКАЛЫҚ ШЫҒЫСТЫ БАҚЫЛАУ

*Бұл мақалада уақыт бойынша өзгеретін кідірісі бар анықталмаған сызықтық емес жүйелер класы үшін шығыс кері байланыс арқылы шығуды жаһандық практикалық басқару мәселесі* *қарастырылады. Біріншіден, біртекті шығу кері байланыс контроллері қуат интеграторы технологиясын қосудың арқасында номиналды анықталмаған жүйеге бағытталады. Содан кейін, Ляпунов-Красовскийдің сәйкес функционалдығы мен төмен ретті бақылаушының көмегімен біртекті үстемдік тәсілін қолдана отырып және қуат интеграторы әдісін қоса отырып, жабық жүйенің барлық күйлері шектеулі болып қалуын және бір уақытта бақылау қатесін қалағаныңызша аз етуін қамтамасыз ететін шығыс кері байланыс контроллері сәтті жобаланды.*

***Түйін сөздер:*** *сызықтық емес басқару жүйелері, Ляпуновтың тұрақтылығы, кері байланыс, математикалық модельдеу.*

***N. TASBOLATULY[1], A. K. YERDENOVA[1,2], A. E. NAZYROVA[1,2], G. B. BAKHADIROVA[1], S. S. ALISHEVA[2]***

*[1]Astana International University, Astana, Kazakhstan;*
*[2]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
*(E-mail: 1tasbolatuly@gmail.com, 2erdenova_aigerim@mail.ru, 3ayzhan.nazyrova@gmail.com, 4gulnaz.bahadirova.84@mail.ru, 5sandu_alish@mail.ru)*

*Global Practical Output Tracking for a Class of Uncertain Nonlinear Systems*

*This paper addresses the problem of global practical output control using output feedback for a class of uncertain nonlinear systems with time-varying delay. First, a homogeneous output feedback controller is designed for a nominally uncertain system by adding power integrator technology. Then, with the help of an appropriate Lyapunov-Krasovsky functional and a reduced-order observer, using the homogeneous dominance approach and adding a power integrator method, an output feedback controller is successfully designed to ensure that all states of the closed-loop system remain constrained while simultaneously making the tracking error arbitrarily small.*

***Key words:*** *nonlinear control systems, Lyapunov stability, feedback, mathematical modeling.*