УДК 519.6
https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.17

А. К. КАЙРАКБАЕВ[1]*, Ж. С. ТУТКУШЕВА[2]

[1]Казахско-Русский международный университет, Актобе, Казахстан;
[2]Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан,
kairak@mail.ru, zhailan_k@mail.ru

О СВОЙСТВАХ ОДНОЙ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА

Исследуются свойства одной вспомогательной функции (ВФ) для вычисления глобального оптимума функции многих переменных. Рассматриваемая ВФ построена путем преобразования целевой функции с помощью интеграла Лебега и является функцией одной переменной. Несмотря на то, что в предыдущих работах эта ВФ применялась для нахождения глобального минимума гладких функций на выпуклых замкнутых множествах с помощью алгоритма деления отрезка пополам, ее свойства не были изучены. Здесь эта ВФ используется для вычисления глобального экстремума непрерывных функций, заданных на ограниченных замкнутых множествах многомерного евклидового пространства. Установлены основные свойства ВФ для любой непрерывной целевой функции такие, как неотрицательность, положительная однородность, равномерная непрерывность, дифференцируемость и строгая выпуклость, более того, найдены производные до некоторого порядка. Сформулирован критерий оптимальности. Основной критерий оптимальности состоит в том, что значение свободной переменной, при котором ВФ и ее производные до некоторого порядка равны нулю, совпадает с глобальным минимумом целевой функции. Из данного критерия оптимальности следует, что для вычисления глобального минимума целевой функции достаточно найти нуль ВФ или ее какой-нибудь производной до некоторого порядка.

Ключевые слова: *вспомогательная функция, глобальный экстремум, детерминированные методы, методы оптимизации, многоэкстремальность, статические задачи, критерий оптимальности, свойства вспомогательной функции.*

Введение. Суть задачи нахождения глобального экстремума состоит в том, чтобы найти решение с минимальным (максимальным) значением целевой функции. В настоящее время о методах и проблемах глобальной оптимизации известно и написано очень много [1-5]. Тем не менее, из-за их практической важности, задачи глобальной оптимизации непрерывно возникают и исследуются во многих областях науки [6-9]. Тем самым постоянно порождается потребность в разработках новых методов и подходов их решения, поскольку универсального алгоритма их решения не существует.

На сегодняшний день все известные методы глобальной оптимизации можно разделить на две категории [1, 4, 5], детерминированные методы [1, 2] и стохастические методы [10, 11]. И также задачи оптимизации принято делить на два типа: статические и динамические. К статическому типу относят задачи, при решении которых необходимо определить значения аргументов, доставляющих целевой функции экстремальное значение. Динамическим типом считают задачи, когда должна быть определена функция, называемая управляющей функцией, при которой целевой функционал принимает свое максимальное или минимальное значение.

* E-mail корреспондирующего автора: kairak@mail.ru

При решении статических задач с нелинейной целевой функцией возникают большие сложности. Основные трудности связаны с многоэкстремальностью, большой размерностью и невыпуклостью целевой функции. К текущему моменту опубликовано не малое число работ, посвященных на преодоление вышеуказанных трудностей [9, 12, 13].

В настоящей работе предложен новый метод нахождения глобального минимума, основанный на идее вспомогательных функций. При этом объектом исследования является не сама целевая функция, а вспомогательная функция одной переменной, построенная путем преобразования исходной функции цели с помощью интеграла Лебега. Следует отметить, что изученная в данной работе вспомогательная функция рассматривалась в работе [14]. В ней с ее помощью был предложен алгоритм деления отрезка пополам вычисления глобального экстремума для гладких и многоэкстремальных функций нескольких переменных, определенных на выпуклых компактных множествах. В настоящей статье, в отличие от работы [14], подробно исследованы основные свойства указанной вспомогательной функции для любой непрерывной функции цели. Установлен критерий оптимальности.

Постановка задачи. Рассмотрим измеримое пространство с мерой $(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \mathfrak{B}, \mu)$, где $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ – евклидово *n* мерное пространство, $\mathfrak{B}$ - Борелевская σ-алгебра в пространстве $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**,** μ мера Лебега над $\mathfrak{B}$.

Пусть *E* – замкнутое множество пространства $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ и $F\colon \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ – непрерывная целевая функция с вещественными значениями. Из непрерывности *F* следует измеримость множества $\mathrm{E}(F, \alpha) = \{x \in \mathrm{E} | F(x) \leq \alpha\}$ для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$. Кроме того, будем полагать, что $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ множество $\mathrm{E}(F, \alpha)$ компактное, непустое и $F \in L_m(E, \mu)$, для некоторого целого положительного числа *m*.

Рассмотрим задачу

$$\bar{\alpha} = \mathrm{globmin}_{x \in \mathrm{E}} F(x). \tag{1}$$

Введем вспомогательную функцию

$$g_m(F, \alpha) = \int_E [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m d\mu, \tag{2}$$

играющую важную роль при дальнейшем изложении. Здесь *m* некоторое заданное натуральное число.

Целью настоящей работы является изучение основных свойств функций (2) и на их основе построение эффективного численного метода решения задачи (1).

Свойства вспомогательной функции. Лемма 1. *Вспомогательная функция (2) имеет следующие свойства:*

1) $g_m(F, \alpha) \geq 0$;

2) $g_m(\mathrm{C}, \alpha) = 0$ *для любой постоянной* $\mathrm{C} \geq \alpha$;

3) $g_m(kF, k\alpha) = k^m g_m(F, \alpha)$, *для вещественного числа* $k \geq 0, \alpha \geq \bar{\alpha}$;

4) $g_m(k + F, k + \alpha) = g(F, \alpha)$, *для любого вещественного k и всех* $\alpha \geq \bar{\alpha}$;

5) $g_m(\alpha + F, \alpha) = g_m(F, 0)$, *для всех* $\alpha \geq \bar{\alpha}$;

6) $g_m(\alpha F, \alpha) = \alpha^m g_m(F, 1)$ *для каждого* $\alpha \geq 0$;

7) равномерно непрерывна в промежутке $\alpha \geq \alpha_0$, *где* $\forall \alpha_0 > \bar{\alpha}$;

8) является строго выпуклой в промежутке $\alpha \geq \alpha_0$, *где* $\forall \alpha_0 > \bar{\alpha}$.

Доказательство.

1) $g_m(F, \alpha) = \int_{E \setminus \mathrm{E}(F,\alpha)} [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m d\mu + \int_{\mathrm{E}(F,\alpha)} [|F(x) - \alpha| - F(x) +$

$$\alpha]^m d\mu = \int\limits_{E \setminus \mathrm{E}(F,\alpha)} [(F(x) - \alpha) - F(x) + \alpha]^m d\mu + \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha)} [-(F(x) - \alpha) - F(x) + \alpha]^m d\mu =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha)} \left[2\left(\alpha - F(x)\right)\right]^m d\mu \geq 0,$$

поскольку выражение под последним интегралом неотрицательно на множестве $\mathrm{E}(F, \alpha)$.

2) $g_m(\mathrm{C}, \alpha) = \int_E [|\mathrm{C} - \alpha| - \mathrm{C} + \alpha]^m d\mu = \int_E [(\mathrm{C} - \alpha) - \mathrm{C} + \alpha]^m d\mu = 0.$

3) $g_m(kF, k\alpha) = \int_E [|kF(x) - k\alpha| - kF(x) + k\alpha]^m d\mu = k^m \int_E [|F(x) - \alpha| -$

$- F(x) + \alpha]^m d\mu = k^m g_m(F, \alpha).$

4) $g_m(k + F, k + \alpha) = \int_E [|k + F(x) - k - \alpha| - k - F(x) + k + \alpha]^m d\mu =$

$= \int_E [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m d\mu = g_m(F, \alpha).$

5) $g_m(\alpha + F, \alpha) = \int_E [|\alpha + F(x) - \alpha| - \alpha - F(x) + \alpha]^m d\mu =$

$$= \int\limits_E [|F(x) - 0| - F(x) + 0]^m d\mu = g_m(F, 0).$$

6) $g_m(\alpha F, \alpha) = \int_E [|\alpha F(x) - \alpha| - \alpha F(x) + k\alpha]^m d\mu = \alpha^m \int_E [|F(x) - 1| -$

$- F(x) + 1]^m d\mu = \alpha^m g_m(F, 1).$

7) Выберем произвольные α_1, α_2 такие, что $\alpha_1 > \alpha_2 \geq \alpha_0$. Оценим модуль разности $|g_m(F, \alpha_1) - g_m(F, \alpha_2)| =$

$$= \left| \int\limits_E [|F(x) - \alpha_1| - F(x) + \alpha_1]^m d\mu - \int\limits_E [|F(x) - \alpha_2| - F(x) + \alpha_2]^m d\mu \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha_1)} \left[2\left(\alpha_1 - F(x)\right)\right]^m d\mu - \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha_2)} \left[2\left(\alpha_2 - F(x)\right)\right]^m d\mu \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha_2)} \left[2\big(\alpha_1 - F(x)\big)\right]^m d\mu + \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha_1)\setminus \mathrm{E}(F,\alpha_2)} \left[2\big(\alpha_1 - F(x)\big)\right]^m d\mu - \right.$$

$$\left. \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha_2)} \left[2\big(\alpha_2 - F(x)\big)\right]^m d\mu \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha_2)} \left[2(\alpha_1 - \alpha_2)\left(\Big(2\big(\alpha_1 - F(x)\big)\Big)^{m-1} + \Big(2\big(\alpha_1 - F(x)\big)\Big)^{m-2}\Big(2\big(\alpha_2 - F(x)\big)\Big) + \cdots \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \Big(\Big(2\big(\alpha_1 - F(x)\big)\Big)\Big)\Big(2\big(\alpha_2 - F(x)\big)\Big)^{m-2} + \Big(2\big(\alpha_2 - F(x)\big)\Big)^{m-1}\right)\right] d\mu \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha_1)\setminus \mathrm{E}(F,\alpha_2)} \left[2\big(\alpha_1 - F(x)\big)\right]^m d\mu \right| = J_1 + J_2.$$

Заметим, что выполнены следующие неравенства. На множестве $\mathrm{E}(F,\alpha_2)$: $\Big(2\big(\alpha_1 - F(x)\big)\Big)^{m-1} \leq \big(2(\alpha_1 - \alpha_0)\big)^{m-1} = K$,

$$\Big(2\big(\alpha_2 - F(x)\big)\Big)^{m-1} \leq \big(2(\alpha_1 - \alpha_0)\big)^{m-1} = K.$$

И на множестве $\mathrm{E}(F,\alpha_1)\setminus \mathrm{E}(F,\alpha_2)$:

$$\Big(2\big(\alpha_1 - F(x)\big)\Big)^{m} = \Big(2\big(\alpha_1 - F(x)\big)\Big)^{m-1} 2\big(\alpha_1 - F(x)\big) \leq 2K|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Используя их, легко получить оценки:

$J_1 \leq 2mK|\alpha_1 - \alpha_2|\mu\big(\mathrm{E}(F,\alpha_2)\big) \leq 2mK|\alpha_1 - \alpha_2|\mu(\mathrm{E}) = B_1|\alpha_1 - \alpha_2|$, где

$B_1 = 2mK\mu(\mathrm{E})$;

$J_2 \leq 2K|\alpha_1 - \alpha_2|\Big(\mu\big(\mathrm{E}(F,\alpha_1)\big) - \mu\big(\mathrm{E}(F,\alpha_2)\big)\Big) =$

$= 2K|\alpha_1 - \alpha_2|\mu\big(\mathrm{E}(F,\alpha_1)\big) \leq 2K\mu(\mathrm{E}) \leq B_2|\alpha_1 - \alpha_2|$, где $B_2 = 2K\mu(\mathrm{E})$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ достаточно взять число $\delta = \varepsilon/(B_1 + B_2)$, что для произвольных α_1, α_2,, для которых $|\alpha_1 - \alpha_2| < \delta$ имеет место неравенство

$$|g_m(F,\alpha_1) - g_m(F,\alpha_2)| \leq J_1 + J_2 < (B_1 + B_2)|\alpha_1 - \alpha_2| < \frac{(B_1 + B_2)\varepsilon}{(B_1 + B_2)} = \varepsilon.$$

Это и доказывает равномерную непрерывность.

8) Выберем произвольные α_1, α_2 такие, что $\alpha_1 > \alpha_2 \geq \alpha_0$. Пользуясь неравенством Коши, $(u_1 + u_2)^m \leq 2^{m-1}(u_1^m + u_2^m)$, для любых $u_1, u_2 \geq 0$ и $m \in \boldsymbol{N}$. Покажем справедливость неравенства

$$g_m\left(F, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(g_m(F, \alpha_1) + g_m(F, \alpha_2\,)\right).$$

$$g_m\left(F, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) = \int\limits_E \left[\left|F(x) - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right| - F(x) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right]^m d\mu =$$

$$= \frac{1}{2^m}\int\limits_E [|2F(x) - (\alpha_1 + \alpha_2)| - 2F(x) + (\alpha_1 + \alpha_2)]^m d\mu \leq$$

$$\frac{1}{2^m}\int [|F(x) - \alpha_1 + F(x) - \alpha_2| - (F(x) - \alpha_1) - (F(x) - \alpha_2)]^m d\mu \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^m}\int\limits_E [(|F(x) - \alpha_1| - F(x) + \alpha_1) + (|F(x) - \alpha_2| - F(x) + \alpha_2)]^m d\mu = I.$$

Согласно утверждению 1) леммы 1, два выражения в круглых скобках под последним интегралом имеют неотрицательные значения, поэтому, применив вышеприведенное неравенство Коши, получим следующую оценку.

$$I \leq \frac{1}{2^m}\int\limits_E 2^{m-1}[(|F(x) - \alpha_1| - F(x) + \alpha_1)^m + (|F(x) - \alpha_2| - F(x) + \alpha_2)^m]\,d\mu =$$

$$= \frac{1}{2}\left(g_m(F, \alpha_1) + g_m(F, \alpha_2\,)\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Вспомогательная функция (2) дифференцируема в каждой точке* $\alpha > \bar{\alpha}$, *где* $\bar{\alpha} = min_E\, F(x)$.

Доказательство. Пусть $\alpha + h > \alpha > \bar{\alpha}$, рассмотрим приращение вспомогательной функции

$$g_m(F, \alpha + h) - g_m(F, \alpha) =$$

$$= \int\limits_E [|F(x) - (\alpha + h)| - F(x) + (\alpha + h)]^m d\mu - \int\limits_E [|F(x) - \alpha| - F(x) + \alpha]^m d\mu =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha+\mathrm{h})} \left[2\left(\alpha + h - F(x)\right)\right]^m d\mu - \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha)} \left[2\left(\alpha - F(x)\right)\right]^m d\mu =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha)} \left[2\left(\alpha + h - F(x)\right)\right]^m d\mu + \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha+\mathrm{h})\setminus \mathrm{E}(F,\alpha)} \left[2\left(\alpha + h - F(x)\right)\right]^m d\mu$$

$$- \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha)} \left[2\left(\alpha - F(x)\right)\right]^m d\mu =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha)} \Big[2h\Big(\big(\alpha + h - F(x)\big)^{m-1} + \big(\alpha + h - F(x)\big)^{m-2}\big(\alpha - F(x)\big) + \ \ldots$$

$$+ \big(\alpha - F(x)\big)^{m-2}\big(\alpha + h - F(x)\big) + \big(\alpha - F(x)\big)^{m-1}\Big)\Big] d\mu +$$

$$+ \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha+\mathrm{h})\setminus\mathrm{E}(F,\alpha)} \big[2\big(\alpha + h - F(x)\big)\big]^{m} d\mu = I_1 h + I_2.$$

Легко проверить, что

$$\lim_{h\to 0} I_1 = 2 \int\limits_{\mathrm{E}(F,\alpha)} m\big[2\big(\alpha - F(x)\big)\big]^{m-1} d\mu = 2m g_{m-1}\big((F,\alpha)\big).$$

Нетрудно видеть, что I_2 является бесконечно малой при $h \to 0$,, поскольку выражение под интегралом в квадратных скобках не превосходит $2h$, и в силу непрерывности меры μ имеет место

$$0 \le I_2 \le (2h)^m \mu\Big(\mathrm{E}(F, \alpha + \mathrm{h}) - \mu\big(\mathrm{E}(F, \alpha)\big)\Big) \to 0.$$

Таким образом,

$$\frac{dg_m}{d\alpha} = 2m g_{m-1}\big((F,\alpha)\big).$$

Лемма 2 доказана.

Следствие 1. *При m=1*

$$\frac{dg_1}{d\alpha} = 2\mu(E(F,\alpha)).$$

Следствие 2. *Для любого заданного натурального числа m справедливо равенство*

$$\frac{d^m g_m}{d\alpha^m} = (2)^m m!\, \mu(E(F,\alpha)).$$

Лемма 3. *Пусть* $\{\alpha_i\}$ *– убывающая последовательность, предел которой при* $i \to \infty$ *равен* $\alpha_0 \ge \bar{\alpha} = \min\limits_{E} F(x)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\lim_{i\to\infty} g_m(F,\alpha_i) = g_m(F,\alpha_0).$$

Доказательство. Рассмотрим абсолютное значение разности $|g_m(F,\alpha_i) - g_m(F,\alpha_0)|$

$$= \left| \int\limits_E [|F(x) - \alpha_i| - F(x) + \alpha_i]^m d\mu - \int\limits_E [|F(x) - \alpha_0| - F(x) + \alpha_0]^m d\mu \right| \to 0.$$

Стремление к нулю следует из равномерной непрерывности (лемма 1 утверждение 7).

Лемма 3 доказана.

Основной результат.

Теорема 1. Пусть E – замкнутое множество пространства $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ и $F\colon \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ – непрерывная целевая функция с вещественными значениями. *Глобальный минимум* $\bar{\alpha}$ *задачи (1) достигается в точке* $\bar{x}$ *(где* $\bar{\alpha}$*=*$F(\bar{x})$ *и* $\bar{\alpha} = sup\{\alpha \in \mathbb{R}|\ g_m(F,\alpha) = 0\}$ *тогда и только тогда, когда*

$$g_m(F,\bar{\alpha}) = 0. \tag{3}$$

Доказательство необходимости. Предположим – $\bar{x}$ ' точка глобального минимума, где имеет место $\bar{\alpha}$=F($\bar{x}$) *и* $\bar{\alpha} = sup\{\alpha \in \mathbb{R}|\ g_m(F,\alpha) = 0\}$, , поэтому $F(x) \geq \bar{\alpha},$ для любого $x \in E.$ Следовательно,

$$g_m(F,\bar{\alpha}) = \int\limits_E [|F(x)-\bar{\alpha}| - F(x) + \bar{\alpha}]^m d\mu = \int\limits_E [(F(x)-\bar{\alpha}) - F(x) + \bar{\alpha}]^m d\mu = 0.$$

Необходимость доказана.

Докажем достаточность от противного. Допустим, что выполнено (3) и $\bar{\alpha}$ не является точкой глобального минимума, где имеет место $\bar{\alpha}$=$F(\bar{x})$ *и* $\bar{\alpha} =\ sup\{\alpha \in \mathbb{R}|\ g_m(F,\alpha) = 0\}$. Пусть значение глобального минимума равно $\tilde{\alpha}.$ Обозначим $2\beta = \bar{\alpha} - \tilde{\alpha} > 0$ и заметим, что в этом случае $\mathrm{E}(F,\tilde{\alpha})$ строго содержится во множестве $\mathrm{E}(F,\bar{\alpha})$, поэтому $\mu\big(\mathrm{E}(F,\bar{\alpha})\big) > \mu\big(\mathrm{E}(F,\tilde{\alpha})\big)$.

$$g_m(F,\bar{\alpha}) = \int\limits_E [|F(x)-\bar{\alpha}| - F(x) + \bar{\alpha}]^m d\mu = \int\limits_{E\setminus E(F,\bar{\alpha})} [|F(x)-\bar{\alpha}| - F(x) + \bar{\alpha}]^m d\mu +$$

$$+ \int\limits_{E(F,\bar{\alpha})} [|F(x)-\bar{\alpha}| - F(x) + \bar{\alpha}]^m d\mu =$$

$$= \int\limits_{E\setminus \mathrm{E}(F,\bar{\alpha})} [(F(x)-\bar{\alpha}) - F(x) + \bar{\alpha}]^m d\mu + \int\limits_{\mathrm{E}(F,\bar{\alpha})} [-(F(x)-\bar{\alpha}) - F(x) + \bar{\alpha}]^m d\mu =$$

$$= \int_{\mathrm{E}(F,\bar{\alpha})} \left[2\big(\bar{\alpha} - F(x)\big)\right]^m d\mu.$$

Таким образом,

$$g_m(F,\bar{\alpha}) = \int_{\mathrm{E}(F,\bar{\alpha})} \left[2\big(\bar{\alpha} - F(x)\big)\right]^m d\mu. \tag{4}$$

Далее преобразуем последнее выражение и осуществим оценку снизу:

$$g_m(F,\bar{\alpha}) = \int_{\mathrm{E}(F,\bar{\alpha})\setminus \mathrm{E}(F,\tilde{\alpha}+\beta)} \left[2\big(\bar{\alpha} - F(x)\big)\right]^m d\mu + \int_{\mathrm{E}(F,\tilde{\alpha}+\beta)} \left[2\big(\bar{\alpha} - F(x)\big)\right]^m d\mu \geq$$

$$\geq 2\beta\left(\mu\big(\mathrm{E}(F,\bar{\alpha})\big) - \mu\big(\mathrm{E}(F,\tilde{\alpha})\big)\right) > 0.$$

А это противоречит равенству (3). Теорема доказана.

Доказанная теорема справедлива для каждого фиксированного натурального *m,* поскольку при доказательстве никаких ограничений на *m* не накладывали.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1 и *m=1*. Тогда

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\mu(\mathrm{E}(F,\overline{\alpha}))} \int_{\mathrm{E}(F,\overline{\alpha})} F(x)\, d\mu. \quad (5)$$

При *m*=1 равенство (3) имеет вид

$$\int\limits_{\mathrm{E}(F,\overline{\alpha})} (2(\bar{\alpha} - F(x)))d\mu = 0.$$

Отсюда, выражая $\bar{\alpha}$,, получим (5).

Заключение. Исследованы основные свойства вспомогательной функции. Оказалось, что вспомогательная функция для всякой целевой функции является неотрицательной, положительно однородной, равномерно непрерывной и дифференцируемой. Вычислены производные высших порядков. Установлен и доказан критерий оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1 Agasiyev, T. A., & Karpenko, A. P. (2018). Sovremennyye tekhniki global'noy optimizatsii. Obzor. Informatsionnyye tekhnologii, *24*(6), 370-386. doi: 10.17587/it.24.370-386

2 Locatelli, M., Schoen, F. (Eds.). (2013). Global Optimization: Theory, Algorithms, and Applications. Philadelphia. Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN: 978-1611972665

3 Horst, R., Tuy, H. (2013). Global Optimization: Deterministic Approaches. Third Edition. Springer Science & Business Media. Heidelberg. eBook ISBN: 978-3-662-02598-7. https://doi.org/10.1007/978-3-662-02598-7.

4 Floudas, C. A., Pardalos, P. M. (2014). Recent Advances in Global Optimization, Princeton: Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400862528.

5 Zakharova, Ye. M., & Minashina, I. K. (2014). Obzor metodov mnogomernoy optimizatsii. Informatsionnyye protsessy, 14(3), 256-274.

6 Floudas, C. A., Akrotirianakis, I. G., Caratzoulas, S., Meyer, C. A., Kallrath, J. (2005). Global optimization in the 21st century: Advances and challenges. Comput. Chem. Eng., 29 (2005), pp. 1185–1202. https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2005.02.006.

7 Pint´er, J. D. (2006). Global Optimization: Scientific and Engineering Case Studies, vol. 85, Springer Science & Business Media. New York. https://doi.org/10.1007/0-387-30927-6.

8 Kunde, C., Michaels, D., Micovic, J., Lutze, P., Górak, A., Kienle, A. (2015). Deterministic global optimization in conceptual process design of distillation and melt crystallization. Chemical Engineering and Processing: Process Intensification, Vol. 99, pp. 132-142. https://doi.org/10.1016/j.cep.2015.09.010.

9 Locatelli, M., Schoen, F. (2021). (Global) Optimization: historical notes and recent developments. EURO Journal on Computational Optimization, 100012. https://doi.org/10.1016/j.ejco.2021.100012.

10 Liberti, L., Sergei, K. (2005). Comparison of deterministic and stochastic approaches to global optimization. Int. Trans. Oper. Res., 12, pp. 263–285. https://doi.org/10.1111/j.1475-3995.2005.00503.x.

11 Zhigljavsky, A., Zilinskas, A. (2007). Stochastic Global Optimization. Springer Science & Business Media, New York, Vol. 9, https://doi.org/10.1007/978-0-387-74740-8.

12 Zhu, W., Ali, M. M. (2009). Solving nonlinearly constrained global optimization problem via an auxiliary function method. Journal of computational and applied mathematics, 230(2), pp. 491-503. https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.12.017.

13 Sergeyev, Y. D., Kvasov, D. E. (2015). A deterministic global optimization using smooth diagonal auxiliary functions. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 21, Issues 1–3, pp. 99-111. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.08.026.

14 Kaidassov, Z., Tutkusheva, Z.S. (2021). Algorithm for calculating the global minimum of a smooth function of several variables. Mathematical Modelling of Engineering Problems, Vol. 8, No. 4, pp. 591-596. https://doi.org/10.18280/mmep.080412.

REFERENCES

1 Agasiyev, T. A., & Karpenko, A. P. (2018). Sovremennyye tekhniki global’noy optimizatsii. Obzor. Informatsionnyye tekhnologii, *24*(6), 370-386. doi: 10.17587/it.24.370-386

2 Locatelli, M., Schoen, F. (Eds.). (2013). Global Optimization: Theory, Algorithms, and Applications. Philadelphia. Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN: 978-1611972665

3 Horst, R., Tuy, H. (2013). Global Optimization: Deterministic Approaches. Third Edition. Springer Science & Business Media. Heidelberg. eBook ISBN: 978-3-662-02598-7. https://doi.org/10.1007/978-3-662-02598-7.

4 Floudas, C. A., Pardalos, P. M. (2014). Recent Advances in Global Optimization, Princeton: Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400862528.

5 Zakharova, Ye. M., & Minashina, I. K. (2014). Obzor metodov mnogomernoy optimizatsii. Informatsionnyye protsessy, 14(3), 256-274.

6 Floudas, C. A., Akrotirianakis, I. G., Caratzoulas, S., Meyer, C. A., Kallrath, J. (2005). Global optimization in the 21st century: Advances and challenges. Comput. Chem. Eng., 29 (2005), pp. 1185–1202. https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2005.02.006.

7 Pint´er, J. D. (2006). Global Optimization: Scientific and Engineering Case Studies, vol. 85, Springer Science & Business Media. New York. https://doi.org/10.1007/0-387-30927-6.

8 Kunde, C., Michaels, D., Micovic, J., Lutze, P., Górak, A., Kienle, A. (2015). Deterministic global optimization in conceptual process design of distillation and melt crystallization. Chemical Engineering and Processing: Process Intensification, Vol. 99, pp. 132-142. https://doi.org/10.1016/j.cep.2015.09.010.

9 Locatelli, M., Schoen, F. (2021). (Global) Optimization: historical notes and recent developments. EURO Journal on Computational Optimization, 100012. https://doi.org/10.1016/j.ejco.2021.100012.

10 Liberti, L., Sergei, K. (2005). Comparison of deterministic and stochastic approaches to global optimization. Int. Trans. Oper. Res., 12, pp. 263–285. https://doi.org/10.1111/j.1475-3995.2005.00503.x.

11 Zhigljavsky, A., Zilinskas, A. (2007). Stochastic Global Optimization. Springer Science & Business Media, New York, Vol. 9, https://doi.org/10.1007/978-0-387-74740-8.

12 Zhu, W., Ali, M. M. (2009). Solving nonlinearly constrained global optimization problem via an auxiliary function method. Journal of computational and applied mathematics, 230(2), pp. 491-503. https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.12.017.

13 Sergeyev, Y. D., Kvasov, D. E. (2015). A deterministic global optimization using smooth diagonal auxiliary functions. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 21, Issues 1–3, pp. 99-111. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.08.026.

14 Kaidassov, Z., Tutkusheva, Z.S. (2021). Algorithm for calculating the global minimum of a smooth function of several variables. Mathematical Modelling of Engineering Problems, Vol. 8, No. 4, pp. 591-596. https://doi.org/10.18280/mmep.080412.