ӘОЖ 517.51
https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.35

С. К. БУРГУМБАЕВА*, Д. И. ТУНГУШБАЕВА, М. АЛДАЙ, Б. С. НУРИМОВ

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, Астана, Қазақстан
*e-mail: *burgumbayeva_sk@enu.kz*

ҮШІНШІ РЕТТІ ГАРМОНИЯЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕР

Кез-келген ретті дербес туындылы күрделі дифференциалдық теңдеулер үшін негізгі шекаралық есептерді жүйелі түрдегі зерттеулері модельдік теңдеулермен шектелген. Лаплас теңдеуіне төрт негізгі шекаралық есептерді қоюға болады, атап айтқанда Шварц, Дирихле, Нейман, Робин есептері. Бұл шекаралық есептер аналитикалық функциялар және жалпы біртекті емес Коши-Риман теңдеуі үшін қарастырылады. Мақалада Дирихле мен Нейманның бірлік шеңберіндегі үш-гармониялық функциялар үшін шекаралық есептерінің негізгі қасиеттері қарастырылып дәлелденеді. Шешімдері нақты түрде интегралдық түрлендірулер арқылы дәлелденген. Негізгі пайдаланған түсініктемелер – Гаусс теоремасы және Коши-Помпейдің анықтамалары, сонымен қатар бірлік шеңберіндегі би-гармониялық дифференциалдық теңдеулер үшін Дирихле мен Нейманның есептері.

Түйін сөздер: *шекаралық есептер, Дирихле, Нейман, бірлік шеңбер, гармониялық функциялар.*

С. К. БУРГУМБАЕВА*, Д. И. ТУНГУШБАЕВА, М. АЛДАЙ, Б. С. НУРИМОВ

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
*e-mail: *burgumbayeva_sk@enu.kz*

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Систематическое исследование основных краевых задач для сложных дифференциальных уравнений в частных производных произвольного порядка ограничено модельными уравнениями. На единичном диске исследуются четыре основные краевые задачи, а именно задачи Шварца, Дирихле, Неймана, Робина для аналитических функций и в более общем плане для неоднородного уравнения Коши-Римана. В статье рассмотрены и доказаны свойства краевых задач Дирихле и Неймана для три-гармонических функций в единичной окружности. Представление решений и условия разрешимости даны в явном виде. Фундаментальными инструментами являются теорема Гаусса *и представление Коши-Помпею, а также задачи Дирихле и Неймана для би-гармонических уравнений на единичной окружности.*

Ключевые слова: *краевая задача, Дирихле, Нейман, единичная окружность, гармонические функции.*

S. K. BURGUMBAYEVA*, D. I. TUNGUSHBAYEVA, M. ALDAI, B. S. HURIMOV

L.N.Gumilyov Eurasian national university, Astana, Kazakhstan
*e-mail: *burgumbayeva_sk@enu.kz*

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE HARMONIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

The study of the main boundary value problems for complex partial differential equations of any order is limited to model equations. Four main boundary value problems are investigated on the unit disk, namely the Schwarz, Dirichlet, Neumann, Robin problems for analytical functions and more generally for the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation. The article considers and proves the properties of Dirichlet and Neumann boundary value problems for three-harmonic functions in a unit disc. The representation of solutions and the conditions of solvability are given explicitly. The fundamental tools are the Gauss theorem and the Cauchy-Pompey representation, as well as Dirichlet and Neumann problems for bi-harmonic equations on a unit circle.

Key words: *boundary value problem, Dirichlet, Neumann, unit disc, harmonic functions.*

Кіріспе. C комплекс жазықтығының $z = x + iy$ айнымалысы берілсін, мұндағы $x, y \in R$. Комплекс жазықтығын белгіленуі: $\hat{C} := C \cup \{\infty\}$.

$\overline{z} = x - iy$ комплекс саны z-қа түйіндес сан. z санының нақты және жорамал бөліктерін Rez, Imz деп белгілейміз.

Комплекс анализда комплекс дербес дифференциалдық операторларды ∂_z және $\partial_{\overline{z}}$ деп белгілеуге ыңғайлы. Нақты дербес дифференциалдық операторлар ∂_x және ∂_y келесідей анықталсын:

$$2\partial_z = \partial_x - i\partial_y, 2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y \tag{1}$$

Формальды түрдегі жазылуы:

$$z = x + iy, \overline{z} = x - iy, x, y \in R,$$

$w = u + iv$ комплексті айнымалы функция екі нақты u және v функциялардан құралған. z және $\overline{z}$ айнымалылары $w(z)$ функциясына тиісті. w тәуелсіз болған жағдайда $\overline{z}$ ол C комплекс жазықтығының ашық жиыны болып табылады. Бұл Коши-Риман жүйесін қанағаттандыратың бірінші ретті дербес дифференциалдық теңдеулер

$$u_x = v_y, u_y = -v_x \tag{2}$$

Бұл

$$w_{\overline{z}} = 0 \tag{3}$$

эквивалент болады

$$2\partial_{\bar{z}} w = (\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = \partial_x u - \partial_y v + i(\partial_x v + \partial_y u) \quad (4)$$

Басқа жағдайда

$$2\partial_z w = (\partial_x - i\partial_y)(u + iv) = \partial_x u + \partial + yv + i(\partial_x v - \partial_y u)$$

$$= 2\partial_x w = -2i\partial_y w = 2w' \tag{5}$$

Қандайда бір нақты облыста үзіліссіз дифференциалданатын екі айнымалыға тәуелді комплекс туындылы функция үшін нақты Гаусс теоремасын пайдаланамыз, яғни тегіс шектік болатын - ∂D, шектік облыс – D және жабық $\overline{D} = D \cup \partial D$ жалғасады, жеңілдеуі комплекс түрде бола алады.

Есептеудің негізгі теоремасы. z_0-ден тәуелді w аналитикалық функция болсын және $z_0 \in C$, яғни z_0 қандай да бір көршілес z-ке қатысты комплекс жазықтығында дифференциалданатын функция

$$w(z) = w(z_0) + \int_{z_0}^{z} w'(\zeta)d\zeta. \tag{6}$$

w функциясы z_0-ге тәуелді аналитикалық функция болсын делік, $z_0 \in C$, онда кез-келген $n \in N$ және мұндағы z ол z_0 маңайына кіреді.

$$w(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} w^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{z_0}^{z} (z - \zeta)^n w^{(n+1)}(\zeta)d\zeta. \tag{7}$$

Гаусс теоремасының комплекс түрі:

Гаусс немесе Гаусс-Остроградский теоремасы ол комплекс жазықтығындағы қарапайым айнымалылар үшін есептеулердің негізгі теоремасы болып табылады. Нақты айта келсек: Коши-Риман операторлары үшін $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ және түйіндес операторлары үшін $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x - i\partial_y$.

$D \subset C$ тұрақты облыс болсын және $w \in C^1(D;C) \cap C(\overline{D};C)$. Онда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(z)dz = \frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\bar{z}}(z)dxdy, \; -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(z)d\bar{z} = \frac{1}{\pi}\int_{D} w_z(z)dxdy. \tag{8}$$

Тұрақты аймақ деп-тегіс шекарасы бар шектеулі аймақты аламыз.

Осы Гаусс теоремаларынан интегралды ұсыну формулалары қатысатын дифференциалдық операторларға іргелі шешім қосу арқылы азаяды. Бұл Коши-Риман операторына арналған (кейбір тұрақты мультипликаторға дейін) $1/\bar{z}$.

Кез-келген нүктені таңдасақ $z \in D$ болатын және Гаусс теоремасына $w(\zeta)/(\zeta - z)$ функциясын пайдаланатын болсақ, онда кез-келген $0 < \varepsilon$ өте кішкентай шексіз шама үшін $D_\varepsilon = D \setminus \{\zeta : |\zeta - z| \leq \varepsilon\}$ және нөлге ұмтылатын формуласына әкеледі. Сол сияқты екінші Гаусс формуласын шығаруға болады.

Коши-Помпей формуласы: Гаусс теоремасының болжамдарын қанағаттандыратын D және w берілсін. Онда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = \begin{cases} w(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \bar{C} \setminus \bar{D}, \end{cases} \tag{9}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\bar{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\zeta}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta - z}} = \begin{cases} w(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \bar{C} \setminus \bar{D}, \end{cases} \tag{10}$$

Мұндағы $\zeta = \xi + i\eta$ деп аламыз. Келесі функция $1/(\zeta - z)$ – Коши ядросы. Интегралды операторды келесідей аламыз:

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{D} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

Коши-Помпей операторы деп атаймыз. f функциясы үшін: $f \in L_p(D;C), 1 \le p$.

Оның қасиеттері тереңірек [] жұмысында жалпыланған аналитикалық функциялар теориясына байланысты зерттелген . Tf әлсіз дифференциалдау (тарату мағынасында):

$$\partial_{\bar{z}} Tf = f, \partial_{z} Tf = \Pi f$$

мұндағы

$$\Pi f(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{D} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

Кальдерон-Зигмунд типті сингулярлық интегралды операторды П - Коши принципінің мәні бойынша интеграл ретінде қабылдануы керек. Бұл альфорс-Берлинг операторының қасиеттерінде зерттелуде [1-2].

D облысындағы w функциясы, яғни D облысында $w_{\bar{z}} = 0$, формуласы аналитикалық функциялар үшін Коши формуласы болып табылады, функциялар теориясының негізгі құралдарының бірі және аналитикалық функциялардың көптеген қасиеттерінің көзі.

Ұсынылып отырған ((9)) және ((10)) формулалары итерацияға жарамды. Бұл, сонымен бірге Коши-Помпейдің жоғары дәрежелі формулаларына, сондай-ақ қатысатын дифференциалдық операторлардың негізгі шешімдеріне әкеледі.

Егер $f \in L_1(D;C)$ онда кез-келген $\varphi \in C_0^1(D;C)$ үшін

$$\int_{D} Tf(z)\varphi_{\bar{z}}(z)dxdy + \int_{D} f(z)\varphi(z)dxdy = 0 \tag{11}$$

мұндағы $C_0^1(D;C)$ ол D облысындағы комплекс-айнымалы функциялар жиыны болып белгіленеді, яғни шекараның маңайында жойылып кетеді.

Шекаралық есептерге келетін болсақ, Коши-Помпей формуласы бірлік шеңбердің жағдайында өзгереді $D = \{z : |z| < 1\}$.

Кез-келген $w \in C^1(D;C) \cap C(\bar{D};C)$ келесідей анықталады

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\operatorname{Re} w(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\operatorname{Im} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left(\frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{z\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}}{1-z\bar\zeta}\right)d\xi d\eta,|z|<1. \tag{12}$$

Кез келген $w\in C^1(D;C)\cap C(\overline{D};C)$ делік, онда

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\operatorname{Re} w(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left(\frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}}{\bar\zeta}\frac{1+z\bar\zeta}{1-z\bar\zeta}\right)d\xi d\eta+i\operatorname{Im} w(0),|z|<1. \tag{13}$$

деп анықталады.

Екінші ретті Коши-Помпей формуласы: $D\subset C$ тұрақты облыс болсын және $w\in C^2(D;C)\cap C^1(\bar D;C)$. Онда $z\in D$ үшін:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}w_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{\pi}\int\limits_{D}w_{\zeta}\bar\zeta(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\xi d\eta \tag{14}$$

және

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}w_{\bar\zeta}(\zeta)\log|\zeta-z|^2\,d\bar\zeta+\frac{1}{\pi}\int\limits_{D}w_{\zeta\bar\zeta}(\zeta)\log|\zeta-z|^2\,d\xi d\eta \tag{15}$$

болады.

Полианалитикалық Коши-Помпей формуласы: кез келген $n\ \geq\ 1$ үшін $w\in C^n(D;C)\cap C^{n-1}(\bar D;C)$ берілсін. Онда

$$w(z)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\partial_{\bar\zeta}^{\nu}w(\zeta)\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu}}{\nu!(\zeta-z)}d\zeta-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{D}\partial_{\bar\zeta}^{n}w(\zeta)\frac{(\overline{z-\zeta})^{n-1}}{(n-1)!(\zeta-z)}d\xi d\eta \tag{16}$$

Полигармоникалық Коши-Помпей формуласы: кез келген $n\ \geq\ 1$ үшін $w\in C^{2n}(D;C)\cap C^{2n-1}(\bar D;C)$ берілсін. Онда

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{(\zeta-z)^{\nu-1}\overline{(\zeta-z)}^{\nu}}{(\nu-1)!\nu!}\Big[\log|\zeta-z|^2-$$

$$-\sum_{\rho=1}^{\nu-1}\frac{1}{\rho}-\sum_{\sigma=1}^{\nu}\frac{1}{\sigma}\Big](\partial_\zeta\partial_{\overline{\zeta}})^{\nu}w(\zeta)d\zeta \tag{17}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{|\zeta-z|^{2(\nu-1)}}{(\nu-1)!^2}\Big[\log|\zeta-z|^2-2\sum_{\rho=1}^{\nu-1}\frac{1}{\rho}\Big]\partial_\zeta^{\nu-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu}w(\zeta)d\overline{\zeta}$$

Аналитикалық функциялар үшін шекаралық есептер. Шварц-Пуассон формуласына байланысты айтылғандай, бірлік шеңбер жағдайында шекаралық есептерді нақты шешуге болады. Осы себепті осы облыс қарастырылады. Бұл қарастырылып отырған мәселелердің сипаты туралы қажетті ақпарат береді. Аналитикалық функцияларға қатысты ең қарапайым, сондықтан іргелі жағдайлар орын алады.

Шварц шекаралық есебі: w-аналитикалық функцияны бірлік шеңберінде табайық, яғни шешімі D облысында $w_{\overline{z}}=0$ қанағаттандырады

$$\operatorname{Re} w=\gamma \text{ on } \partial D, \operatorname{Im} w(0)=c$$

$\gamma\in C(\partial D;R), c\in R$ үшін берілген.

Бұл Шварц есебінің жалғыз шешімі:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+ic \tag{18}$$

Дәлеледемесі Шварц-Пуассон формуласынан шығады [3-4].

Дирихле шекаралық есебі. -аналитикалық функцияны бірлік шеңберінде табайық, яғни шешімі D облысында $w_{\overline{z}}=0$ қанағаттандыратын $\gamma\in C(\partial D;C)$

$$w=\gamma \text{ on } \partial D.$$

Бұл Дирихле есебі $|z|<1$ болғанда ғана шешіледі, яғни егер

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{1-\overline{z}\zeta}=0 \tag{19}$$

болса.

Бұл шешім Коши интегралы үшін жалғыз шешім болып табылады:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} \tag{20}$$

Нейман шекаралық есебі: w-аналитикалық функцияны бірлік шеңберінде табайық, яғни шешімі D облысында $w_{\overline{z}}=0$ қанағаттандыратын $\gamma\in C(\partial D;C)$ және $c\in C$

$$\partial_\nu w=0 \text{ on } \partial D, w(0)=c.$$

Бұл Нейман есебі $|z|<1$ болғанда ғана шешіледі, яғни егер

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta}=0 \tag{21}$$

қанағаттандырса. Онда шешімі келесі түрде беріледі:

$$w(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log(1-z\bar{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{22}$$

Робин шекаралық есебі: ∂D - дағы келесі шартты

$$w+\partial_{\nu}w=\gamma \tag{23}$$

қанағаттандыратын D - бірлік шеңберінде аналитикалық функцияны табайық, мұндағы $\gamma\in C(\partial D;C)$ және ν шекараға ∂D нормальдың сыртқы векторы болып табылады. Біздің жағдайда ∂D шекарасындағы (23) шекаралық шарт $w+zw_z=\gamma$ шартын қабылдайтынын ескереміз.

$g:=w+zw_z$ жиыны және Дирихле есебінің шешімі

$$D \text{ облысында } g_{\bar{z}}=0 \tag{24}$$

$$\text{шекарадағы } g=\gamma \tag{25}$$

(19) теоремаға сүйенсек, онда (24), (25) шешімдерінің жалғыз ғана шешімі :

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta}=0 \tag{26}$$

барлық $|z|<1$ үшін және шешімі келесідей:

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\gamma(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{27}$$

D облысында w Тейлордың кеңеюі $w(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}w_k z^k$ болсын. Онда келесідей беріледі

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)w_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\gamma(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta\}z^k$$

осыдан

$$w_k=\frac{1}{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\gamma(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta$$

және

$$w(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\ln(1-z\bar{\zeta})}{z}d\zeta. \tag{28}$$

Әрі қарай бұл шекаралық есептер Коши-Риманның біртекті емес теңдеуі үшін зерттелетін болады. T операторын қолдана отырып, есептер аналитикалық функцияларға арналған есептерге дейін азаяды. Мұнда Нейман есебі жағдайында қалыпты туынды шекарада орнатылғаны немесе тек $z\partial_z$ функцияға әсер еткені маңызды болады [5-7]

Грин мен Нейманның гармоникалық функциялары және екінші ретті теңдеулерге қатысты шекаралық есептер [8-10].

Грин мен Нейманның гармоникалық функциялары Дирихле мен Нейманның Пуассон теңдеуі үшін шекті есептерін шешудің классикалық құралдары болып табылады. Екеуі де екінші ретті бейнелеу өзгерген кезде өте табиғи түрде пайда болады (16). Бұл формула симметриялы емес. Қос формула

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\zeta}(\zeta)\log|\zeta - z|^2\, d\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta - z|^2\, d\xi d\eta \tag{29}$$

(16) және (30) формулалардың біріктірілуі симметриялық түрлендіру болып келеді. Бірақ бұл тиісті шекаралық есептерді шешуге әкелетін талапқа сәйкес келмейді. Мотивация ретінде бірлік шеңберінде гармоникалық функцияның қарапайым жағдайы, яғни $w_{z\overline{z}} = 0,$ шешімі қарастырылады.

∂D шекарасында D бірлік шеңберіндегі гармониялық функциялар үшін қосулы Дирихле есебі тек тривиальды түрде шешіледі.

Дәлелдеуі: w_z функция $w_{z\overline{z}} = 0$, аналитикалық болсын. w_z аналитикалық функциялармен біріктірілуін $w = \varphi + \overline{\psi}$ көрсетеді, φ және ψ. Жалпы ψ(0) = 0 жоғалтпай қабылдауға болады. $\varphi = -\overline{\psi}$ шекаралық шарттан ∂D төмендегіде көрсетілген:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\overline{\psi(\zeta)}\frac{\overline{z}d\zeta}{1 - z\zeta} =$$

$$\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\psi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}} - \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\psi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}} = \overline{\psi(z)} - \overline{\psi(0)} = \overline{\psi(z)}.$$

Демек D облысында ψ және φ жойылып кетеді, яғни w солай болады.

Бұл дәлелдеу ешқандай максималды принципті қажет етпейді. Пуассон леммасы $w_{z\overline{z}} = f$ теңдеуі үшін Дирихле есебі бірегей берілгенін көрсетеді. Демек, Дирихле есебіне қатысты арналған формуласын алу үшін бірінші ретті туындылары бар ((16)) және ((30)) терминдерінен аулақ болу керек. Бұл әдіс шеңбердің нақты жағдайында жасалады. Гаусс теоремасы негізінде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta - z|^2\, d\overline{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\log|1 - z\overline{\zeta}|^2\, d\overline{\zeta} =$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_D w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|1-z\overline{\zeta}|^2\,d\xi d\eta+\frac{1}{\pi}\int_D w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta$$

және

$$\frac{1}{\pi}\int_D w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta=\frac{1}{\pi}\int_D \partial_{\overline{\zeta}}\left(\frac{\overline{z}w(\zeta)}{1-\overline{z}\zeta}\right)d\xi d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\overline{z}w(\zeta)}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta$$

Мұны (16) формулаға қойсақ, онда

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_D w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{\zeta-z}\right|^2 d\xi d\eta. \tag{30}$$

Функция

$$G_1(z,\zeta)=\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{\zeta-z}\right|^2$$

шеңбер үшін Грин функциясы деп аталады. Ол екі айнымалы $z=\zeta$ үшін де гармониялық болып табылады және бір айнымалы үшін шекарада жоғалады. Пуассон ядросы шекаралық интегралда көрінетіндіктен (30) Дирихле есебінің шешімдеріне әкеледі.

Бірлік шеңберіндегі Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебі

$$w_{z\overline{z}}=f \text{ in } D, \varphi=\gamma \text{ on } \partial D,\ f\in L_1(D;C), \gamma\in C(\partial D;C),$$

бірегей түрде шешіледі:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_D f(\zeta)G_1(z,\zeta)d\xi d\eta. \tag{31}$$

Нейман шекаралық шартына қатысты (9)-ны өзгерту үшін Гаусс теоремасы келесідей көрсетіледі:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_\zeta(\zeta)\log|\zeta-z|^2\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w_\zeta(\zeta)\log|1-z\overline{\zeta}|^2\,d\zeta=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_D w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|1-z\overline{\zeta}|^2\,d\xi d\eta-\frac{1}{\pi}\int_D\partial_\zeta\left[w(\zeta)\frac{z}{1-z\overline{\zeta}}\right]d\xi d\eta=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_D w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|1-z\overline{\zeta}|^2\,d\xi d\eta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{zw(\zeta)}{1-z\overline{\zeta}}d\overline{\zeta}=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_D w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|1-z\overline{\zeta}|^2\,d\xi d\eta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w(\zeta)\frac{z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Мұны (9)-формуласымен біріктірсек, онда

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}(\zeta w_{\zeta}(\zeta)+\overline{\zeta}w_{\overline{\zeta}}(\zeta))\log|\zeta-z|^2\frac{d\zeta}{\zeta}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_D w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|(\zeta-z)(1-z\overline{\zeta})|^2\,d\xi d\eta. \tag{32}$$

Мұнда w-ның нормаль туындысы екінші мүшесінде пайда болады

$$N_1(z,\zeta)=-\log|(\zeta-z)(1-z\overline{\zeta})|^2$$

және бірлік шеңберінің теріс екінші ретті Нейман функциясы деп аталады. Грин функциясы $z\notin\zeta$ функция ретінде ол сипаттамалық логарифмдік сингулярлықпен бірге екі айнымалыда да гармониялық болады. Оның шекарадағы қалыпты туындысы, айталық, $z\in D$

$$(\zeta\partial_{\zeta}+\overline{\zeta}\partial_{\overline{\zeta}})N_1(z,\zeta)=-\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}\zeta}{1-\overline{z}\zeta}-\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\overline{\zeta}-z}}+\frac{z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}=-2.$$

Қалыпты шарты

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}N_1(z,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=-\frac{1}{\pi i}\int_{\partial D}\log|1-z\overline{\zeta}|^2\frac{d\zeta}{\zeta}=0.$$

Бірлік шеңберіндегі Пуассон теңдеуі үшін шекаралық есептің

$$w_{z\overline{z}}=f \text{ in } D, w=\gamma_0, w_z=\gamma_1 \text{ on } \partial D,$$

егер $f\in L_p(D;C), 2<p, \gamma)_0, \gamma_1\in C(\partial D;C)$

жалғыз ғана шешімі бар:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{zd\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\log(1-z\overline{\zeta})d\zeta$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}f(\zeta)\log(1-z\overline{\zeta})d\xi d\eta \tag{33}$$

және

$$\frac{\overline{z}}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\overline{z}\zeta}=\frac{\overline{z}}{\pi}\int_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{1-\overline{z}\zeta}. \tag{34}$$

Осыдан, шешімі мына түрде табылады

$$w(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\overline{\zeta}-z}}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\log(1-z\overline{\zeta})d\zeta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}f(\zeta)(\log|\zeta-z|^2-\log(1-\overline{z}\zeta))d\xi d\eta. \tag{35}$$

Дәлелдеуі: $w_z = \omega, \omega_{\bar z} = f$ in $D, w = \gamma_0, \omega = \gamma_1$ on ∂D. берілсін, жалғыз ғана шешімі болады, егер

$$-\frac{z}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\bar\zeta}{1-z\bar\zeta} = \frac{z}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\omega(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{1-z\bar\zeta},$$

$$\frac{z}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\bar z\zeta} = \frac{\bar z}{\pi}\int_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{1-\bar z\zeta}.$$

онда шешімі

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\bar\zeta}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\omega(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta - z}},$$

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}.$$

ω-ны бірінші шартқа қойсақ

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\omega(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{1-z\bar\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tilde\zeta|=1}\gamma_1(\tilde\zeta)\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|=1}\frac{d\xi d\eta}{(\tilde\zeta-\zeta)(1-z\bar\zeta)}d\tilde\zeta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{|\tilde\zeta|<1}f(\tilde\zeta)\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(\tilde\zeta-\zeta)(1-z\bar\zeta)}d\tilde\xi d\tilde\eta$$

және

$$-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{z d\xi d\eta}{(\zeta-\tilde\zeta)(1-z\bar\zeta)} = -\log(1-z\bar{\tilde\zeta}) - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log(1-z\bar\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-\tilde\zeta}$$

$$= -\log(1-z\bar{\tilde\zeta}) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\log(1-z\bar\zeta)}{1-\tilde\zeta\bar\zeta}\frac{d\bar\zeta}{\bar\zeta}$$

$$= -\log(1-z\bar{\tilde\zeta}).$$

w және ω (35) үшін екі интегралды формула шығады:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\omega(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta - z}} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tilde\zeta|=1}\gamma_1(\tilde\zeta)\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(\tilde\zeta-\zeta)(\overline{\zeta - z})}d\tilde\zeta$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{|\tilde\zeta|<1}f(\tilde\zeta)\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(\tilde\zeta-\zeta)(\overline{\zeta - z})}d\tilde\xi d\tilde\eta,$$

мұнда

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(\overline{\zeta - z})(\zeta-\tilde\zeta)} = \log|\tilde\zeta - z|^2 - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log|\zeta - z|^2\frac{d\zeta}{\zeta-\tilde\zeta},$$

$$\log|\tilde{\zeta}-z|^2-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\log(1-\bar{z}\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-\tilde{\zeta}}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\log(1-\bar{z}\zeta)\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}(1-\tilde{\zeta}\bar{\zeta})}$$

$$=\log|\zeta-z|^2-\log(1-\bar{z}\tilde{\zeta}).$$

Осыған ұқсас есепті қарастырсақ:

$$w_{z\bar{z}}=f \text{ in } D, w=\gamma_0, w_{\bar{z}}=\gamma_1 \text{ on } \partial D$$

$f\in L_1(D;C),\gamma_0,\gamma_1\in C(\partial D;C)$ көмегімен шешуге болады.

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}w(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\bar{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1\right)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta)\log\left|\frac{1-z\bar{\zeta}}{\zeta-z}\right|^2 d\xi d\eta$$

Дирихле есебі жағдайында формуламен орындалғандай, интегралдық түрлендірулер әрқашан байланысы бар шекаралық есептерді шешу үшін ғана пайдалана бермейді.

Егер ∂D да $\partial_\nu w=\gamma$ – қанағаттандырылса және нормаль *w* кезінде $w_{z\bar{z}}=f$ болса, онда Пуассон теңдеуінің шешімі

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=c$$

болады және де *f* және γ қасиеттері үшін келесідей болады:

$$w(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log|\zeta-z|^2\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\log|(\zeta-z)(1-z\bar{\zeta})|^2 d\xi d\eta. \tag{36}$$

Бірақ бұл формула әрқашан $w_{z\bar{z}}=f$ шешімді қамтамасыз етсе де, тиісті шекаралық сипаттаманы қанағаттандырмайды. Мұндай сипаттама Коши интегралынан да көрінеді.

Бірлік шеңберіндегі Пуассон теңдеуі үшін Нейман есебі

$$w_{z\bar{z}}=f \text{ in } D,\partial_\nu w=\gamma \text{ on } \partial D,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=c, \tag{37}$$

$f\in L_1(D;C),\gamma\in C(\partial D;C),c\in C$ болса ғана шешіледі

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{2}{\pi}\int_{|\zeta|<1}f(\zeta)d\xi d\eta. \tag{38}$$

(36) –да жалғыз ғана шешімі беріледі.

Дәлелдеуі: Нейман функциясы Лаплас операторының іргелі шешімі, ал шекаралық интеграл гармоникалық функция болғандықтан (37) Пуассон теңдеуінің шешімін береді. Шекаралық сипаттаманы тексеру үшін бірінші ретті туындыларды қарастыру керек. Олар

$$w_z(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{(\zeta-z)\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right)d\xi d\eta,$$

$$w_{\overline{z}}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\overline{(\zeta-z}\zeta)}-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}f(\zeta)\left(\frac{1}{\overline{\zeta-z}}+\frac{\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\right)d\xi d\eta,$$

сондай-ақ

$$\partial_\nu w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta-z}}-1\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}f(\zeta)\left[\frac{z}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta-z}}+\frac{z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}+\frac{\overline{z}\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\right]d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta-z}}-2\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)\left[2-\frac{z}{\zeta-z}-\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta-z}}-\frac{1}{1-z\overline{\zeta}}-\frac{1}{1-\overline{z}\zeta}\right]d\xi d\eta$$

Ол $|z|=1$ үшін Пуассон ядросының қасиеті пайдаланылады

$$\partial_\nu w(z)=\gamma(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{2}{\pi}\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)d\xi d\eta.$$

Сондықтан (37) есебі $\partial_\nu w=\gamma$, $|z|=1$ жағдайда ғана орындалады. Соңында нормальға келтіру шартын тексеру керек. Ол $|z|=1$ үшін және $|\zeta-z|=|1-z\zeta|$ дегеннен шығады

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\log|1-z\overline{\zeta}|^2\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\log(1-z\overline{\zeta})\frac{dz}{z}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\log(1-\overline{z}\zeta)\frac{d\overline{z}}{\overline{z}}=0.$$

Алынған нәтижелер:

Теорема: үш-гармониялық Дирихле мәселесі

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^3 w = f \text{ in } D, w = \gamma_0, \partial_z \partial_{\bar{z}} w = \gamma_1, (\partial_z \partial_{\bar{z}})^2 w = \gamma_2 \text{ on } \partial D.$$

$f \in L_p(D;C), 2 < p, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in C(\partial D;C)$ арқылы бірегей түрде шешіледі

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \left[g_1(z,\zeta)\gamma_0(\zeta) + \hat{g}_2(z,\zeta)\gamma_1(\zeta) + \hat{g}_3(z,\zeta)\gamma_2(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{\zeta} - \\ -\frac{1}{\pi} \int_D \hat{G}_3(z,\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta. \tag{39}$$

Мұндағы

$$\hat{g}_3(z,\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D G_1(z,\tilde{\zeta}) \hat{g}_2(\tilde{\zeta},\zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}$$

$$= (1 - |z|^2) \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left((z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1} \right) + 1 \right] -$$

$$-\frac{1-|z|^4}{2} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left((z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1} \right) + \frac{1}{2} \right]$$

түріндей болады (16)

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \hat{g}_3(z,\zeta) = -\frac{1}{2} \partial_{\nu_\zeta} \partial_z \partial_{\bar{z}} \hat{G}_3(z,\zeta) = -\frac{1}{2} \partial_{\nu_\zeta} \hat{G}_2(z,\zeta) = \hat{g}_2(z,\zeta) \text{ for } z,\zeta \in D,$$

$$\hat{g}_3(z,\zeta) = 0 \text{ for } z \in \partial D, \zeta \in D.$$

Дәлелдеуі: есепті жүйелерге бөліп қарастырамыз:

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} w = \omega \text{ in } D, w = \gamma_0 \text{ on } \partial D,$$

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^2 \omega = f \text{ in } D, \omega = \gamma_1, \omega_{z\bar{z}} = \gamma_2 \text{ on } \partial D,$$

бұл жүйенің бір шешімі бар

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g_1(z,\zeta)\gamma_0(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_D G_1(z,\tilde{\zeta}) \omega(\tilde{\zeta}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}$$

$$\omega(\tilde{\zeta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \left(g_1(\tilde{\zeta},\zeta)\gamma_1(\zeta) + \hat{g}_2(\tilde{\zeta},\zeta)\gamma_2(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_D G_2(\tilde{\zeta},\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta$$

w формулаға ω-ны қойсақ, онда (39) шығады.

Пуассон формуласының сипаттамасынан $\hat{g}_2, \hat{g}_3$ және $\hat{G}_3$ $|z| = 1$ болған жағдайда жойылып кетеді

$$\lim_{z \to \zeta} w(z) = \gamma_0(\zeta)$$

$|\zeta|=1$ келесі үшін. Лаплас операторын пайдаланамыз, онда

$$w_{z\bar{z}}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\left\{g_1(z,\zeta)\gamma_1(\zeta)+\hat{g}_2(z,\zeta)\gamma_2(\zeta)\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_D \hat{G}_2(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta$$

алдыңдағыдай

$$\lim_{z\to\zeta} w_{z\bar{z}}(z)=\gamma_1(\zeta)$$

шығады және одан

$$w_{z\bar{z}z\bar{z}}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g_1(z,\zeta)\gamma_2(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_D G_1(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta$$

$$\lim_{z\to\zeta} w_{z\bar{z}z\bar{z}}(z)=\gamma_2(\zeta)$$

Сонымен қатар, $(\partial_z\partial_{\bar{z}})^3 w=f$ соңында G_1 қасиеттерінен көрінеді.

Теорема: үш-гармониялық Нейман есебі [11]

$$(\partial_z\partial_{\bar{z}})^3 w=f \text{ in } D,\ f\in L_p(D;C),\ 2<p<+\infty,$$

$$\partial_\nu w=\gamma_0,\ \partial_\nu\partial_z\partial_{\bar{z}} w=\gamma_1\ \partial_\nu(\partial_z\partial_{\bar{z}})^2 w=\gamma_2 \text{ on } \partial D,\ \gamma_0,\gamma_1,\gamma_2\in C(\partial D;C),$$

қанағаттандыратын

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=c_0,\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\partial_\zeta\partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=c_1,\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}(\partial_\zeta\partial_{\bar{\zeta}})^2 w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=c_2$$

жалғыз шешімі тек сонда ғана болады, егер

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=2c_1-c_2-\frac{1}{16\pi i}\int_{\partial D}\gamma_2(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{\pi}\int_D\left((1-|\zeta|^2)^2-\frac{1}{2}\right)f(\zeta)d\xi d\eta,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=c_1-2c_2-\frac{2}{\pi}\int_D(1-|\zeta|^2)f(\zeta)d\xi d\eta$$

және

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\gamma_2(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{2}{\pi}\int_D f(\zeta)d\xi d\eta$$

Шешімі мына түрде алынды:

$$w(z)=c_0-c_1(1-|z|^2)-c_2\left(\frac{1}{4}(1-|z|^2)^2+\frac{1}{2}(1-|z|^2)\right)+\frac{1}{4\pi i}\int_{\partial D}\left\{N_1(z,\zeta)\gamma_0(\zeta)+\right.$$

$$+N_2(z,\zeta)\gamma_1(\zeta)+N_3(z,\zeta)\gamma_2(\zeta)\}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_D f(\zeta)N_3(z,\zeta)d\xi d\eta$$

Дәлелдеуі: Нейман-3 есебін жүйе ретінде қарастырамыз:

$$(\partial_z\partial_{\bar z})^2 w=\omega \text{ in } D, \partial_\nu w=\gamma_0, \partial_\nu\partial_z\partial_{\bar z}w=\gamma_1 \text{ on } \partial D,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=c_0, \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\partial_\zeta\partial_{\bar\zeta}w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=c_1$$

және

$$\partial_z\partial_{\bar z}\omega=f \text{ in } D, \partial_\nu\omega=\gamma_2 \text{ on } \partial D, \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\omega(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=c_2$$

шешуші жағдайларға әкеледі

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=2c_1-\frac{2}{\pi}\int_D(1-|\zeta|^2)\omega(\zeta)d\xi d\eta \tag{40}$$

және

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{2}{\pi}\int_D\omega(\zeta)d\xi d\eta \tag{41}$$

Сонда шешімі

$$w(z)=c_0-(1-|z|^2)c_1+\frac{1}{4\pi i}\int_{\partial D}\{\gamma_0(\zeta)N_1(z,\zeta)+\gamma_1(\zeta)N_2(z,\zeta)\}\frac{d\zeta}{\zeta}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_D\omega(\zeta)N_2(z,\zeta)d\xi d\eta \tag{42}$$

$$\omega(\zeta)=c_2+\frac{1}{4\pi i}\int_{\partial D}\gamma_2(\tilde\zeta)N_1(\zeta,\tilde\zeta)\frac{d\tilde\zeta}{\tilde\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_D N_1(\zeta,\tilde\zeta)f(\tilde\zeta)d\tilde\xi d\tilde\eta$$

ω-ны (40) шартына қойсақ, онда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=2c_1-\frac{1}{\pi}\int_D(1-|\zeta|^2)\left\{c_2+\frac{1}{4\pi i}\int_{\partial D}\gamma_2(\tilde\zeta)N_1(\zeta,\tilde\zeta)\frac{d\tilde\zeta}{\tilde\zeta}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_D N_1(\zeta,\tilde\zeta)f(\tilde\zeta)d\tilde\xi d\tilde\eta\right\}d\xi d\eta$$

және де

$$\frac{1}{\pi}\int_D(1-|\zeta|^2)N_1(\zeta,\tilde\zeta)d\xi d\eta=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}|\zeta|^2\right)^2-\frac{1}{4}.$$

Содан кейін ω- ны (42)-ке қоямыз

$$w(z)=c_0-(1-|z|^2)c_1-c_2\left(\frac{1}{\pi}\int_D N_2(z,\zeta)d\xi d\eta\right)+\frac{1}{4\pi i}\int_{\partial D}\{\gamma_0(\zeta)N_1(z,\zeta)+$$

$$+\gamma_1(\zeta)N_2(z,\zeta)\}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{4\pi i}\int_{\partial D}\gamma_2(\tilde{\zeta})\frac{1}{\pi}\int_D N_1(\zeta,\tilde{\zeta})N_2(z,\tilde{\zeta})d\xi d\eta\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_D f(\tilde{\zeta})\frac{1}{\pi}\int_D N_1(\zeta,\tilde{\zeta})N_2(z,\zeta)d\xi d\eta d\tilde{\xi}d\tilde{\eta}$$

Осыдан, келесі шешімді аламыз:

$$w(z)=c_0-c_1(1-|z|^2)-c_2\left(\frac{1}{4}(1-|z|^2)^2+\frac{1}{2}(1-|z|^2)\right)+\frac{1}{4\pi i}\int_{\partial D}\left\{N_1(z,\zeta)\gamma_0+\right.$$

$$\left.+N_2(z,\zeta)\gamma_1(\zeta)+N_3(z,\zeta)\gamma_2(\zeta)\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\int_D f(\zeta)N_3(z,\zeta)d\xi d\eta.$$

Қорытынды: физикалық табиғаты әртүрлі стационарлық процестерді зерттеген жағдайда эллипстік типті теңдеулер шығады. Бұл типті теңдеулердің ішіндегі ең көп тарағаны – Лаплас теңдеуі. Лаплас теңдеуін қанағаттандыратын гармониялық Грин функциясымен шекаралық есептерді шешуге болады. Мақалада алынған нәтижелер электромагниттік өрістің потенциалын, денеге температураның стационарлық үлестірілуін есептеуде пайдалануға болады.

ӘДЕБИЕТ

1 E.Almansi, Sull'integrazion dell'equazione differenziale $\Delta_{2n} = 0$ Ann. Mat.(3)2(1899), 1-59.

2 H.Begehr, Dirichlet problems for the biharmonic equation. Gen. Math. 13(2005), 65-72.

3 H.Begehr, A.Mohammed, The Schwarz problem for analytic functions in torus related domains. Appl. Anal. 85(2006), 1079-1101.

4 H.Begehr, D.Schmersau, The Schwarz problem for polyanalytic function. ZAA 24(2005), 341-351.

5 H.Begehr, C.J.Vanegas, Iterated Neumann problem for the higher order Poisson equation. Math. Nachr. 279(2006), 38- 57.

6 H.Begehr, T.N.H.Vu, Z.-X.Zhang, Polyharmonic Dirichlet problems. Proc. Steklov Inst. Math.255(2006), 13-34.

7 H.Begehr, Boundary value problems for complex Poisson equation. Proc. Intern. Conf. Anal. Appl. Nanjing, 2004.

8 H.Begehr, Six biharmonic Dirichlet problems in complex analysis. Function spaces in complex and Clifford analysis. Proc. 14th Intern. Conf. Finite Infnite Dimensional Complex Anal. Appl., Hue, Vietnam. Eds. Son Le Hung et al. National University Publishers, Hanoi, 2008, 243-25

9 H.Begehr, T.Vaitekhovich. Some harmonic Robin functions in the complex plane. Adv. Pure Appl. Math. 1(2009), 1-13.

10 H.Begehr, Boundary value problems for complex Poisson equation. Proc. Intern. Conf. Anal. Appl. Nanjing, 2004.

11 S.Burgumbayeva, The tri-harmonic Neumann problem. Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series. №4(92)/2018. – P.29-37.

PREFERENCES

1 E.Almansi, Sull'integrazion dell'equazione differenziale $\Delta_{2n} = 0$ Ann. Mat.(3)2(1899), 1-59.

2 H.Begehr, Dirichlet problems for the biharmonic equation. Gen. Math. 13(2005), 65-72.

3 H.Begehr, A.Mohammed, The Schwarz problem for analytic functions in torus related domains. Appl. Anal. 85(2006), 1079-1101.

4 H.Begehr, D.Schmersau, The Schwarz problem for polyanalytic function. ZAA 24(2005), 341-351.

5 H.Begehr, C.J.Vanegas, Iterated Neumann problem for the higher order Poisson equation. Math. Nachr. 279(2006), 38- 57.

6 H.Begehr, T.N.H.Vu, Z.-X.Zhang, Polyharmonic Dirichlet problems. Proc. Steklov Inst. Math.255(2006), 13-34.

7 H.Begehr, Boundary value problems for complex Poisson equation. Proc. Intern. Conf. Anal. Appl. Nanjing, 2004.

8 H.Begehr, Six biharmonic Dirichlet problems in complex analysis. Function spaces in complex and Clifford analysis. Proc. 14th Intern. Conf. Finite Infnite Dimensional Complex Anal. Appl., Hue, Vietnam. Eds. Son Le Hung et al. National University Publishers, Hanoi, 2008, 243-25

9.H.Begehr, T.Vaitekhovich. Some harmonic Robin functions in the complex plane. Adv. Pure Appl. Math. 1(2009), 1- 13.

10 H.Begehr, Boundary value problems for complex Poisson equation. Proc. Intern. Conf. Anal. Appl. Nanjing, 2004.

11 S.Burgumbayeva, The tri-harmonic Neumann problem. Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series. №4(92)/2018. –P.29-37.