

С. Х. ДОСТАНОВА^{1*}, Д. Е. ИСАХАНОВА², Д. Е. ЖУМАБЕК³

¹ Сампаев Университет, Алматы, Казахстан;

² КазНМУ им. С.Д. Асфендиярова, Алматы, Казахстан;

³ СЗГМУ им. Мечникова, Санкт-Петербург, Россия.

e-mail: dostanova0109@mail.ru*, djamilya.issakhanova@gmail.com;
rossparty@protonmail.com

МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДЕФОРМАЦИЙ И МОРФОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ОБОЛОЧКИ ГЛАЗА

В работе представлены различные механические модели, используемые в офтальмологии для прогноза возникновения глаукомы, связанные с образованием экскавации (прогиба) решетчатой пластинки диска зрительного нерва. Представленный обзор современных исследований по механическому и математическому моделированию совместного деформирования роговицы и склеры глаза включает линейную и нелинейную теорию тонких оболочек, включая особенности сосудов зрительного нерва, характеристики внутриглазного давления и параметров оболочечной системы. Полученные результаты рассмотренных исследований различаются количественно и качественно. В связи с этим авторами приведена простая механическая модель решетчатой пластинки диска зрительного нерва, которая представлена в виде тонкой упругой мембраны, находящейся под действием внутреннего и внешнего давления. Для решения используются разрешающие уравнения для пластины с большими прогибами. Используя приближенные методы решения, представлены формулы для максимальных значений прогибов, изменения толщины и модулей упругости материала пластины. Приведен пример устойчивого состояния мембраны в «малом», т.е. соответствующее первой форме потери устойчивости (образование одной вмятины). В результате использования механической модели можно получить значительный объем информации для диагностики и прогнозирования глаукомы.

Ключевые слова: глаукома, механическая модель, решетчатая пластинка, мембрана, прогиб, толщина, модуль упругости, устойчивость.

С. Х. ДОСТАНОВА^{1*}, Д. Е. ИСАХАНОВА², Д. Е. ЖУМАБЕК³

¹ Сампаев Университет, Алматы, Қазақстан;

² С.Д. Әсфендияров атындағы ҚазҰМУ, Алматы, Қазақстан;

³ И.И. Мечников атындағы СБММУ, Санкт-Петербург, Ресей.

e-mail: dostanova0109@mail.ru*, djamilya.issakhanova@gmail.com;
rossparty@protonmail.com

КӨЗ ҚАБЫҒЫНЫҢ ДЕФОРМАЦИЯСЫ МЕН МОРФОЛОГИЯЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМЫН ЗЕРТТЕУГЕ АРНАЛҒАН МЕХАНИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕР

Жұмыста офтальмологияда глаукоманың пайда болуын болжау үшін қолданылатын, оптикалық нерв дискінің торлы пластинкасының экскавациясының (іілуінің) пайда болуымен байланысты әртүрлі механикалық модельдер келтірілген. Көздің қабығы мен склерасының бірлескен деформациясын механикалық және математикалық модельдеу бойынша заманауи зерттеулерге ұсынылған шолу жұқа қабықтардың сызықтық және сызықты емес теориясын

қамтиды. Оптикалық нервтің тамырларының ерекшеліктері, көзішілік қысымның сипаттамалары және қабық жүйесінің параметрлері ескеріледі. Қаралған зерттеулердің нәтижелері сандық және сапалық жағынан ерекшеленеді. Осыған байланысты авторлар ішкі және сыртқы қысымның әсерінен жұқа серпімді мембрана ретінде ұсынылған оптикалық дискінің торлы пластинкасының қарапайым механикалық үлгісін ұсынады. Шешім үшін үлкен иілім бар пластинаның шешуші теңдеулері қолданылады. Шамамен шешу әдістерін қолдана отырып, пластина иілімдарының, қалыңдығының өзгеруінің және материалының серпімділік модулінің максималды мәндері үшін формулалар ұсынылған. «Кіші» мембрананың тұрақты күйінің мысалы, яғни, бүктелудің бірінші түріне сәйкес келеді (бір ойықтың түзілуі). Механикалық модельді қолдану нәтижесінде глаукоманың диагностикасы мен болжамы үшін ақпараттың айтарлықтай көлемін алуға болады.

Түйін сөздер: глаукома, механикалық модель, тор пластина, мембрана, орын ауыстыру, қалыңдық, серпімділік модулі, тұрақтылық.

S. H. DOSTANOVA¹*, D. E. ISAKHANOVA², D. E. ZHUMABEK³

¹ Satpayev University, Almaty, Kazakhstan;

² KazNMU named after S.D. Asfendiyarov, Almaty, Kazakhstan;

³ at North-Western named after И.И. Mechnikov State Medical University, St. Petersburg, Russia.

e-mail: dostanova0109@mail.ru*, djamilya.issakhanova@gmail.com;

rossparty@protonmail.com

MECHANICAL MODELS FOR THE STUDY OF DEFORMATIONS AND MORPHOLOGICAL STRUCTURE OF THE EYE SHELL

The paper presents various models used in ophthalmology to predict the occurrence of glaucoma associated with the formation of excavation (deflection) of the latticed plate of the optic disc. The presented review of modern studies on mechanical and mathematical modeling of joint deformation of the cornea and sclera of the eye includes a linear and nonlinear theory of thin shells, including features of the vessels of the optic nerve, characteristics of intraocular pressure and parameters of the shell system. The results of the reviewed studies differ quantitatively and qualitatively. In this regard, the authors present a simple mechanical model of the latticed plate of the optic disc, which is presented as a thin elastic membrane under the action of internal and external pressure. For the solution, the resolving equations for a plate with large deflections are used. Using approximate solution methods, formulas are presented for the maximum values of deflections, thickness changes, and moduli of elasticity of the plate material. An example of a stable state of the membrane in the "small", i.e. corresponding to the first form of buckling (formation of one dent). An example of a stable state of the membrane in the "small", i.e. corresponding to the first form of buckling (formation of one dent). As a result of using a mechanical model, a significant amount of information can be obtained for the diagnosis and prognosis of glaucoma.

Key words: glaucoma, mechanical model, lattice plate, membrane, deflection, thickness, modulus of elasticity, stability.

Введение. Для понимания механизма сложных процессов часто используют механические модели с соответствующим математическим аппаратом. Моделирование охватывает все сферы человеческой деятельности, включая медицину, технику, строительство и др. В настоящее время в Казахстане постоянно возрастает количество людей с глазными заболеваниями, среди которых по распространенности глаукома занимает одно из первых мест. Все существующие ныне теории, изучающие механизм возник-

новения глаукомы, условно относятся к двум направлениям — механической и сосудистой. Для решения проблем, связанных с интенсивным лечением и прогнозированием глаукомы, необходим многовекторный подход, среди которых имеет свое место совершенствование и развитие механических моделей в задачах офтальмологии [1-7].

Повышение внутриглазного давления приводит к разрушению зрительного нерва, что связано с дефектом поля зрения, который появляется в области решетчатой пластины диска зрительного нерва. Решетчатой пластинкой (РП) называется участок склеры недалеко от заднего полюса глаза. Решетчатая пластинка в 5-6 раз тоньше склеры и ослаблена множеством отверстий, поэтому ее можно рассматривать как круглую или близкую к круглой пластину с жестко заделанным краем. Деформацию решетчатой пластины можно изучать отдельно от деформации склеральной оболочки, что облегчает учет особенностей ее строения — анизотропию и неоднородность.

Механическая модель позволяет рассматривать тело как упруго-пластическое, состояние которого определяется не только внешним воздействием, но и внутренними свойствами тела, такими как податливость и жесткость материала. Согласно принципу Лагранжа, деформации тела под действием внешних воздействий таковы, что полная энергия тела должна иметь стационарное значение, т.е. $\delta\Pi - \delta A = 0$, где Π - потенциальная энергия деформации, A - работа внешних сил. Это означает, что из всевозможных форм деформирования тело выбирает то состояние, при котором полная энергия стремится к минимуму. Отсюда вытекает, что деформации и напряженное состояние тела имеют вполне определенную закономерность. Эта закономерность должна быть учтена в расчетных моделях, с помощью которых можно получить картину изменений напряжений и деформаций, возникающих под внешним воздействием.

При исследовании механических моделей, используемых в офтальмологии, можно выделить следующие:

– в работе [1] рассматривалась механическая модель развития отслойки сосудистой оболочки, которую можно представить как одну из форм разрушения – в виде трещины расслоения. В частности, в зонах сжатия может произойти отслоение, причиной которого является местная потеря устойчивости. Используя энергетический критерий Гриффитса, нижняя граница опасного напряжения отслаивания определяется из соотношения:

$$U_1 = U_2 + W$$

где U_1 – упругая энергия сжатия, накопленная в слое толщиной перед выщелкиванием, U_2 – энергия этого слоя после выщелкивания – энергия изгиба, $W = 2\gamma S$ – работа разрушения (S – площадь поверхности отрыва, а γ – удельная работа разрушения). Рассматривалась потеря устойчивости оболочки, находящейся под действием внешнего давления, с образованием одной вмятины. Использована теория пологих оболочек. Решение для сжимающих напряжений получено на основе энергетического принципа Лагранжа;

– в [2] проведено сравнение решений задачи о деформации составной оболочки (склеры и РП) и отдельно задачи о деформации пластинки под действием нормального давления. Расчеты показали, что, как и отмечается в клинических данных офтальмологов, диаметр склерального кольца практически не меняется, и прогибы

пластинки, полученные при рассмотрении составной оболочки и жестко защемленной пластинки, отличаются меньше, чем на 1%;

– в работе [3] представлено построение моделей многослойных оболочек для исследования таких задач, как напряженно-деформированное состояние внешней фиброзной слоистой оболочки глаза и решетчатой пластинки диска зрительного нерва под действием внутриглазного давления, а также исследования влияния многослойности роговицы на показатели измерения внутриглазного давления. Используя трехмерную задачу теории упругости, представлено решение задач о деформации трехслойной изотропной и двухслойной трансверсально-изотропной сферических оболочек под действием нормального давления;

– в работе [4] указаны основные ступени развития глауко-матозного процесса в зрительном нерве: появление экскавации решетчатой пластины, вызванные повышением внутриглазного давления или снижением внутричерепного давления, при увеличении прогибов появляются зоны по периферии, где нарушается прочность соединительно-тканевой структуры мембраны;

– в диссертации [5] рассмотрен изгиб диска зрительного нерва. Исследована зависимость прогиба диска от внутриглазного и внутричерепного давления;

– в [6] учитывается нелинейность упругого поведения роговицы глаза. Роговица моделируется однородной изотропной безмоментной упругой поверхностью.

Представленный обзор современных исследований по механическому и математическому моделированию совместного деформирования роговицы и склеры глаза включает линейную и нелинейную теорию тонких оболочек, включая особенности сосудов зрительного нерва, характеристики внутриглазного давления и параметров оболочечной системы. Рассмотрены также вопросы устойчивости. Полученные результаты рассмотренных исследований различаются количественно и качественно. Это объясняется использованием разных математических моделей и методов их решения. Для анализа полной картины процесса деформирования роговицы и прогнозирования появления глаукомы необходим системный подход, основанный на достоверных алгоритмах, подтвержденных экспериментальными данными и клиническими наблюдениями. Одним из направлений для решения проблем прогнозирования и диагностики глаукомы является использование простых механических моделей и математического аппарата.

Цель и постановка задачи данного исследования. В данной работе в отличие от обзорных исследований рассматривается только сама решетчатая пластинка диска зрительного нерва. Как отмечалось ранее начальные изменения диска зрительного нерва имеют значение для диагностики глаукомы, а их динамика важна для оценки эффективности проводимой терапии. Это делает важным изучение индивидуальных особенностей строения решетчатых пластин, которые могут увеличить предрасположенность к глаукоматозным повреждениям. В виду геометрических и физических характеристик решетчатая пластина в данной работе представлена в виде тонкой упругой мембраны, находящейся под действием внутреннего и внешнего давления. Механическая модель мембраны характеризуется отсутствием сопротивления изгибу, т.е. в ее поверхности возникают только растягивающие усилия, которые приводят ее к выпучиванию. Такую мембрану можно изгибать и сминать, т.к. ее жесткость на

изгиб минимальна. Если такую натянутую силами S мембрану загрузить нормальными к ее плоскости силами p , то в ней возникает двумерное напряженное состояние – всестороннее растяжение, причем напряжения равномерно распределены по толщине. Нагрузка p вызывает значительные прогибы, т.е. перемещения в направлении нормали.

Рассмотрим случай, когда мембрана жестко закреплена по краям. В процессе ее деформирования возможно нарушение жесткости и появление частичной податливости связи и изменения прочностных свойств материала мембраны.

Цель данной работы: разработать механические модели решетчатой пластинки диска зрительного нерва для исследования и оценки взаимного влияния значений прогибов, размеров решетчатой пластины и модуля упругости материала роговицы. В результате мониторинга за деформациями решетчатой пластины можно по изменению прочностных свойств материала роговицы прогнозировать появление глаукомы. В зависимости от внутриглазного давления можно определить предельные значения прогибов и прочностной характеристики материала роговицы, при которых нарушается стабильность процесса и переход к большим деформациям. Для сохранения устойчивости состояния склеры глаза необходим постоянный мониторинг за изменениями решетчатой пластины. Для этого необходимо исследовать устойчивость математической модели в «малом» и в «большом». В «малом» означает равновесное состояние, связанное с появлением одной круговой вмятины; в «большом» означает резкий переход к большим деформациям с образованием нескольких вмятин.

Методы исследования. При решении данной задачи используется приближенный метод решения разрешающих уравнений теории тонких пластин.

Механическая модель – упругое состояние тела. Уточним механическую модель мембраны, используемой в механике деформируемого тела. По определению, мембраны — это тонкие пластины, имеющие отношение толщины к размеру в плане в виде следующего неравенства:

$$\frac{h}{a} < \frac{1}{40}$$

Они тонки и гибки, поэтому, чтобы они могли нести нагрузку, нормальную к срединной поверхности, их часто закрепляют на контуре (рис. 1).

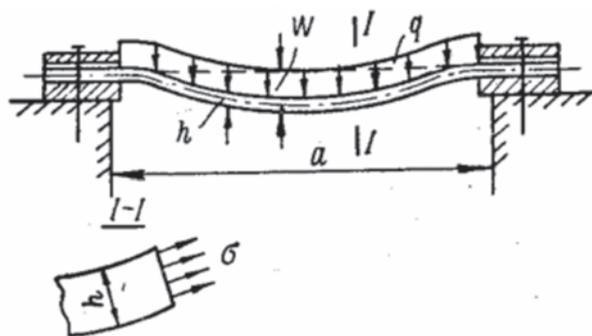


Рисунок 1 – Изгиб мембраны

При этом нагрузка поддерживается мембраной в основном не за счет ее изгиба, а за счет растяжения по всей толщине. Таким образом, можно считать, что нормальные напряжения распределяются равномерно по толщине мембраны и срединная поверхность не свободна от напряжений. Прогибы w мембраны велики и могут в несколько раз превышать ее толщину h . В задачах офтальмологии мембрана будет рассматриваться как круглая пластина радиуса a . В плоскости пластины возникают только цепные усилия (мембранные). Это объясняется тем, что мембрана обладает малой жесткостью на изгиб и поэтому обычно рассчитывается лишь на действие цепных продольных усилий N_x и N_y в срединной плоскости и на вызываемые ими равномерно распределенные по толщине напряжения. Прогибы w мембраны составляют обычно не менее пяти толщин h и в большую сторону не ограничиваются.

Реактивные усилия S на закрепленном контуре (рис. 2) направлены по касательной к изогнутой срединной поверхности мембраны. Они могут быть разложены на составляющие: вертикальную S_z и горизонтальную S_x . Наличие горизонтальной составляющей реактивного усилия (распора), возникающей при действии вертикальной нагрузки, представляет особенность мембраны по сравнению с пластиной средней толщины и плитой. Деформированное состояние мембраны характеризуется двумя параметрами: радиусом кривизны ρ и длиной хорды a (Рис. 2).

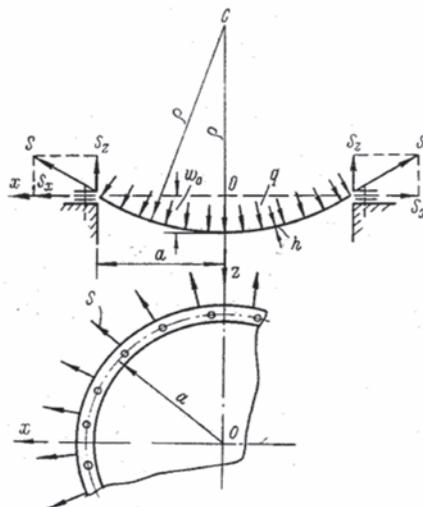


Рисунок 2

Дифференциальное уравнение равновесия для пластины с большими прогибами имеет вид [7-8]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \varphi &= E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \nabla^2 \nabla^2 w &= \frac{1}{D} \left\{ q(x, y) + h \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

Полагая в уравнениях (1) цилиндрическую жесткость D (жесткость на изгиб) равной нулю, получаем уравнение равновесия для мембраны (2). Функцию прогибов w и функцию напряжений φ в мембране можно найти из системы двух уравнений [7-8]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{-q(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (2)$$

Уравнения (2) решаются приближенно. Если функция напряжений φ найдена, выражения для растягивающих цепных усилий N_x и N_y в мембране могут быть вычислены по формулам

$$N_x = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad N_y = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (3)$$

а соответствующие цепные напряжения найдены из выражений

$$N_y = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \sigma_x = \frac{N_x}{h}.$$

Результаты и их обсуждение. Приближенное определение прогиба и напряжений в круглой мембране:

Учитывая симметрию системы при выводе приближенных формул предполагается, что защемленная на контуре мембрана радиусом r и толщиной h (рис.3) изгибается, образуя шаровую поверхность, и что нагрузка q действует по нормали к этой изогнутой поверхности.

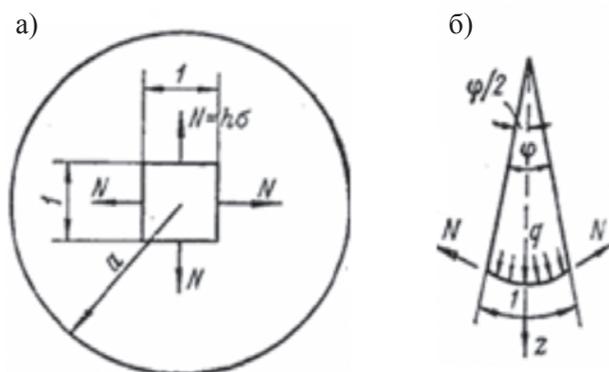


Рисунок 3 – Модель мембраны

При этих условиях усилия N и напряжение σ (рис. 3, а) по кромкам элемента, вырезанного из мембраны двумя взаимно перпендикулярными сечениями, окажутся одинаковыми. При размерах элемента, равных единице,

$$N = 1 \cdot h\sigma \quad (4)$$

Согласно уравнению равновесия сумма проекций нагрузки и усилий, действующих по кромкам элемента на нормаль z к поверхности элемента

$$-4N \sin \frac{\varphi}{2} + q \cdot 1 \cdot 1 = 0 \quad (5)$$

Центральный угол φ выражаем через длину дуги кромки элемента и радиус кривизны ρ . Замена в уравнении (5), ввиду малости φ ,

$$\sin \frac{\varphi}{2} \text{ на } \frac{\varphi}{2}, \text{ а } \varphi \text{ на } \frac{1}{\rho}$$

дает выражение:

$$N = \frac{q}{2\varphi} = \frac{q\rho}{2}$$

для усилия;

$$\frac{1}{\rho} = \frac{q}{2N} \quad (6)$$

для кривизны.

Тогда для напряжения из формулы (4) получим

$$\sigma = \frac{N}{h} = \frac{2\rho}{2h} \quad (7)$$

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности на основании зависимости (6-7) имеет вид:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{q}{2N}.$$

Величина прогиба w в середине мембраны получается на основании закона сохранения энергии:

$$U = A. \quad (8)$$

где U – потенциальная энергия деформации мембраны; A – работа внешних сил на перемещениях, вызванных деформацией мембраны.

Потенциальная энергия мембраны

$$U = \iint_A \sigma \varepsilon dA = \mu \pi a^2 h \quad (9)$$

где A – площадь поверхности сферы, а деформации записаны с учетом закона Гука

$$\varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma - \mu\sigma),$$

Величина μ называется коэффициентом Пуассона, она характеризует сопротивляемость материала в поперечном направлении. Величина “ u ” выражена через напряжение следующим образом:

$$u = 2 \frac{\sigma \epsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{E} (1 - \mu) .$$

Тогда, на основании формулы (7):

$$u = \frac{q^2 \rho^2}{4h^2 E} (1 - \mu) . \quad (10)$$

Зависимость между радиусом кривизны ρ и прогибом w_0 в середине мембраны (рис. 3,б):

$$a^2 + (\rho - w_0)^2 = \rho^2$$

или после возведения скобки в квадрат и отбрасывания w_0^2 как величины высшего порядка малости

$$a^2 - 2\rho w_0 = 0$$

откуда

$$\rho = \frac{a^2}{2w_0} \quad (11)$$

Подстановка этого значения ρ в формулу (10) и значения u в формулу 9) дает выражение для потенциальной энергии

$$U = \frac{q^2 a^6 \pi}{16 w_0^2 h E} (1 - \mu) . \quad (12)$$

В (12) величина E представляет модуль упругости материала пластины, т.е. величину, определяющую сопротивляемость мембраны растяжению. Модуль E представляет собой физическую константу и определяется экспериментальным путем. В дальнейшем эту величину определим из данных для среднестатистического прогиба мембраны под действием ВГД. Работа A внешних сил получится как интеграл, взятый по площади мембраны, половины произведения элементарной силы $q dx dy$ на прогиб $w(x, y)$:

$$A = \frac{1}{2} q \int_F w(x, y) dx dy \quad (13)$$

Интеграл в выражении (13) представляет собой объем $V_{ш.с.}$ шарового сегмента с высотой w_0 и радиусом a :

$$V_{ш.с.} = \frac{1}{6} \pi w_0 (3a^2 + w_0^2)$$

или, если отбросить w_0^2 ,

$$\int_F w(x, y) dx dy = V_{u.c.} = \frac{\pi w_0 a^2}{2}.$$

Поэтому выражение (13) примет вид

$$A = \frac{q\pi w_0 a^2}{4} \quad (14)$$

При подстановке значений (12) и (14) в выражение (8), получаем

$$\frac{qa^4}{16w_0^2 h E} (1 - \mu) = \frac{w_0}{4}.$$

Тогда прогиб в середине мембраны

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{a^4 q}{4 E h} (1 - \mu)} \quad (15)$$

Полагая коэффициент $\mu = 0$, прогиб в середине пластины равен:

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{a^4 q}{4 E h}} \quad (16)$$

Условия постоянства объема дает следующую формулу для толщины мембраны:

$$h = h_0 \frac{a^2}{a^2 + w_0^2} \quad (17)$$

В норме толщина решетчатой мембраны склеры может варьировать от 119 до 463 мкм. Используя формулу (17), можно определить изменение толщины в зависимости от максимального прогиба. Снижение толщины решетчатой пластины является ранним признаком прогрессирования данной формы глаукомы.

Радиус кривизны ρ связан с радиусом мембраны a и максимальным прогибом в центре следующим выражением:

$$\rho = \frac{a^2 + w_0^2}{2w_0} \quad (18)$$

Чем сильнее изменена морфологическая структура решетчатой мембраны, а именно ее толщина и кривизна, тем быстрее происходит истончение слоя нервных волокон, причем показатель индекса кривизны по сравнению с параметром толщины решетчатой мембраны, является лучшим маркером истончения слоя нервных волокон сетчатки.

Интенсивность растягивающих усилий, т.е. нормальное напряжение σ выражается через внешнее давление q :

$$\sigma = \frac{q\rho}{2h} = \frac{qa}{2h_0} \quad (19)$$

Из (19) можно выразить внешнее давление через напряжение σ :

$$q = \frac{2h_0\sigma}{\rho} \quad (20)$$

Для определения модуля упругости E используем формулу (16), тогда можно записать:

$$E = \frac{a^4 q}{4w_0^3 h} \quad (21)$$

Зависимости (16, 17) позволяют определять прогибы в середине пластины и соответствующие им модули упругости материала.

Рассмотрим состояние, когда появляется пластичность, т.е. нормальное напряжение достигает предела текучести:

$$\sigma = \sigma_T, \quad q = 4h_0\sigma_T \frac{a^2 w_0}{(a^2 + w_0^2)^2} \quad (22)$$

Наибольшие напряжения в мембране появляются по краям, поэтому разрушение осуществляется по периметру в области закрепления, разрушение мембраны связано с полным ее отрывом по краям и образованием отверстий. Это объясняется утончением соединительно структурной ткани решетчатой пластины и появлением мелких отверстий. На рис. 4 представлено распределение вертикальных составляющих цепных усилий N в месте примыкания мембраны к контуру.

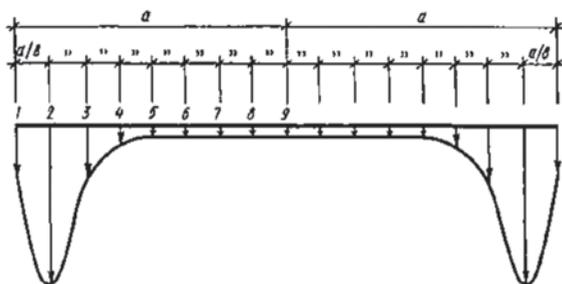


Рисунок 4 – График распределения цепных усилий в мембране в диаметральном направлении

Рассмотрен пример со среднестатистическими данными при появлении глаукомы. Использованы формулы для модулей упругости материала решетчатой пластины. В качестве расчетной модели выбрана мембрана с большими прогибами.

Пример. Рассмотрим устойчивое состояние мембраны в «малом», т.е. соответствующее первой форме потери устойчивости (образование одной вмятины).

Данные мембраны:

Толщина $h = 17$ микрон $= 0,017$ мм $= 0,017 \times 10^{-3}$ м;

Диаметр $a = 1,76$ мм $= 1,76 \times 10^{-3}$ м; внешнее давление $q_{н\text{ ср}} = 16 - 21$ мм рт. ст. $= 2133,12$ Па $- 2799,72$ Па; $q_{н} = 12 - 16$ мм рт. ст. $= 1599,84 - 2133,12$ Па, $w_0 = 3$ мм $= 3 \times 10^{-3}$ м.

Для указанного диапазона ВГД получаем следующие значения модуля упругости мембраны, характеризующие сопротивляемость мембраны деформации растяжения: для $q_{н\text{ ср}} = 16\text{ мм рт. ст.}$

$$E = \frac{a^4 q}{4w_0^3 h} = \frac{1,76^4 \cdot 10^{-12} \cdot 2133,12}{4 \cdot 0,017 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-9}} \text{ Па} = 10^5 \text{ Па} = 100 \text{ КПа} \quad (23)$$

для $q_{н\text{ ср}} = 21 \text{ мм рт. ст.}$

$$E = \frac{a^4 q}{4w_0^3 h} = \frac{1,76^4 \cdot 10^{-12} \cdot 2799,72}{4 \cdot 0,017 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-9}} \text{ Па} = 1,32 \cdot 10^5 \text{ Па} = 132 \text{ КПа}$$

для $q_{н} = 12 \text{ мм рт. ст.}$

$$E = \frac{a^4 q}{4w_0^3 h} = \frac{1,76^4 \cdot 10^{-12} \cdot 1599,84}{4 \cdot 0,017 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-9}} \text{ Па} = 0,752 \cdot 10^5 \text{ Па} = 75,2 \text{ КПа}$$

Из (23) видно, как изменяется сопротивляемость мембраны растяжению, этот диапазон изменяется от 75,2 Кпа до 132 Кпа. Если существует внутричерепное давление q'' , то в формуле (17 и 18) необходимо вместо q записать разность $(q - q'')$. Зависимость модуля E от внешнего давления представлена на рис. 5. Полученные данные соответствуют устойчивому состоянию мембраны, при нарушении этого соответствия происходит резкое нарастание прогибов, что может привести к разрыву или появлению новых форм искривления (несколько вмятин). Максимальное натяжение соответствует краям пластины. При достижении предельного давления прогибы резко возрастают, при этом значение модуля упругости падает. Это вызвано появлением необратимых деформаций вследствие пластичности.

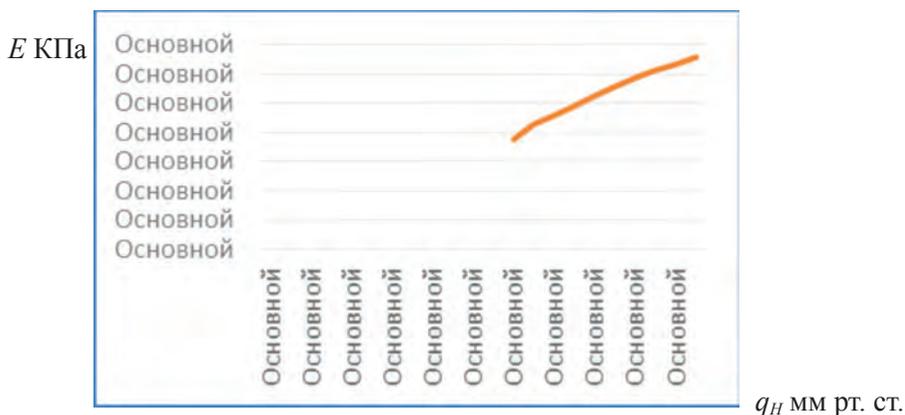


Рисунок 5 – Зависимость модуля E от внешнего давления

Необходимо отметить, что рассматривая мембрану без начальной кривизны, получаем более завышенные результаты в сравнении с оболочечной системой. Рассматривая модель роговицы глаза как оболочку, вследствие ее кривизны сопротивляемость изгибу повышается, что приводит к уменьшению прогибов. В дальнейшем, используя математический аппарат, можно получить более точное решение, т.е. определить про-

гибы по всей поверхности мембраны и учесть изменение податливости связи по краям. Это связано с изменением модуля упругости материала со временем, что приводит к нарушению жесткости связей в процессе жизненного цикла, это возможно учесть, рассматривая вероятностный процесс с использованием случайных функций. Другим направлением для уточнения решения является рассмотрение материала мембраны как анизотропное или многослойное тело. Наиболее простой моделью для получения решения является использование обобщенных параметров: E , h , μ , σ . Для определения прочностных свойств решетчатой пластины склеры необходимо использовать современные методы оптической когерентной томографии, что позволит прогнозировать выявление и прогнозирования глаукомы.

Заключение.

1. Несмотря на многочисленные исследования глаукомы, необходимо постоянное совершенствование и развитие теории и практики ее лечения. Одним из направлений исследования глаукомы является рассмотрение различных механических и математических моделей решетчатой пластинки диска зрительного нерва и оболочечной структуры глаза. Развитие этих моделей требует всестороннего и системного подхода. Исследование параметров и морфометрических свойств решетчатой пластины склеры на основе механических моделей дает большой объем информации для диагностики и прогнозирования глаукомы.

2. Для тестирования полученных результатов необходимо расширить мониторинг за состоянием сосудистой оболочки глаза. В результате мониторинга дать оценку проведенных моделей и выявить главное и эффективное направление для дальнейших исследований.

3. При исследовании причин появления глаукомы необходимо использование современных методов оптической когерентной томографии для определения прочностных характеристик решетчатой пластины склеры, а именно, ее сопротивляемость растяжению, т.к. при слабой сопротивляемости появляются большие прогибы, которые провоцируют и приводят к разрыву мембраны или к появлению локальных вмятин.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Морщинина А. А. Математическая модель глаукомы. Модели теории упругости для склеры и сосудов зрительного нерва при глаукоме // Lambert Academic Publishing. 2011. 94 с.
- 2 Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. Модели теории оболочек и пластин в задачах офтальмологии. -Санкт-Петербург, Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 3.
- 3 Карамшина Л.М. Модели многослойных оболочек в задачах офтальмологии. -Санкт-Петербург, Автореферат канд. диссерт., 2011. - 12 С.
- 4 Волков В.В. Биомеханические и другие факторы в патогенезе глаукомы псевдонормального давления. Глаукома. Материалы Всероссийской научно-практической конференции: Глаукома на рубеже тысячелетий:итоги и перспективы. Москва, 1999, с.35-39.
- 5 Керейчук М.А. Математическая модель глаукомы. Диссерт. к.ф.м., 2001.
- 6 Штейн А.А., Моисеева И.Н., Любимов Г.А. Математическая модель роговицы глаза с учетом экспоненциальной нелинейности ее упругих свойств при условии геометрической малости// Российский журнал биомеханики, т.23, №3.- Пермь,2019.- 375-390с.
- 7 Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. Москва, 1963, 880с.
- 8 Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва, 1966, 636с.

REFERENCES

- 1 Morshchinina A. A. Mathematical model of glaucoma. Elasticity theory models for the sclera and optic nerve vessels in glaucoma // Lambert Academic Publishing. 2011. 94 p.
- 2 Bauer S. M., Voronkova E. B. Models of the theory of shells and plates in problems of ophthalmology. St. Petersburg, Bulletin of St. Petersburg State University. Ser. 1. Vol. 1 (59). 2014. Issue. 3.
- 3 Karamshina L.M. Models of multilayer shells in problems of ophthalmology. -St. Petersburg, Abstract of Ph.D. dissertation, 2011.- 12 p.
- 4 Volkov V.V. Biomechanical and other factors in the pathogenesis of pseudonormal pressure glaucoma. Glaucoma. Proceedings of the All-Russian Scientific and Practical Conference: Glaucoma at the turn of the millennium: results and prospects. Moscow, 1999, pp. 35-39.
5. Kereychuk M.A. Mathematical model of glaucoma. Dissert. k.f.m., 2001.
- 6 Stein A.A., Moiseeva I.N., Lyubimov G.A. Mathematical model of the cornea of the eye, taking into account the exponential nonlinearity of its elastic properties under the condition of geometric smallness // Russian Journal of Biomechanics, v.23, No. 3. - Perm, 2019. - 375-390p.
- 7 Volmir A.S. Stability of elastic systems. Moscow, 1963, 880s.
- 8 Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. Plates and shells. Moscow, 1966, 636s.