УДК 681.5.03
https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.39

***М. М. МОЛДАБЕКОВ[1], А. С. СУХЕНКО[1], Е. Е. ОРАЗАЛЫ[2], А. Е. АДЕН[2]****

*[1]Институт космической техники и технологий, Алматы, Казахстан;*
*[2]Алматинский университет энергетики и связи им. Г. Даукеева, Алматы, Казахстан.*
*e-mail: *a.aden@aues.kz*

# НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ СПУТНИКА

*В статье изложены результаты исследования устойчивости нелинейной системы управления ориентацией спутника (СУОС) на основе представления уравнений ее динамики в виде линейной системы дифференциальных уравнений с переменными во времени параметрами. Получены необходимые и достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости СУОС и показано, что область ее глобальной асимптотической устойчивости в пространстве параметров закона управления зависит от начальных условий по угловым скоростям спутника и маховиков.*

***Ключевые слова:*** *спутник, система управления ориентацией, динамика, асимптотическая устойчивость.*

***М. М. МОЛДАБЕКОВ[1], А. С. СУХЕНКО[1], Е .Е. ОРАЗАЛЫ[2], Ә. Е. ӘДЕН[2]****

*[1] Ғарыштық техника және технологиялар институты, Алматы, Қазақстан;*
*[2] Ғ. Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан.*
*e-mail: *a.aden@aues.kz*

# СПУТНИКТІҢ БАҒДАРЫН БАСҚАРУДЫҢ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ЖҮЙЕСІНІҢ ҒАЛАМДЫҚ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ТҰРАҚТЫЛЫҒЫНЫҢ ҚАЖЕТТІ ЖӘНЕ ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТТАРЫ

*Мақалада уақыт параметрлері айнымалы дифференциалдық теңдеулердің сызықтық жүйесі түрінде оның динамикасының теңдеулерін ұсыну негізінде спутниктің бағдарын басқарудың (СББЖ) сызықтық емес жүйесінің тұрақтылығын зерттеу нәтижелері келтірілген. СББЖ-ның ғаламдық асимптотикалық тұрақтылығының қажетті және жеткілікті шарттары алынды және оның басқару Заңының параметрлері кеңістігіндегі Ғаламдық асимптотикалық тұрақтылық аймағы спутник пен ұшқыштардың бұрыштық жылдамдығындағы бастапқы жағдайларға байланысты екендігі көрсетілді.*

***Түйін сөздер:*** *спутник, бағытты басқару жүйесі, динамика, асимптотикалық тұрақтылық.*

*M. MOLDABEKOV[1], A. SUKHENKO[1], Y. ORAZALY[2], A. ADEN[2]**

*[1] Institute of Space Engineering and Technology, Almaty, Kazakhstan;*
*[2] Almaty University of Power Engineering and Telecommunications named after G.Daukeyev, Almaty, Kazakhstan.*
*e-mail: *a.aden@aues.kz*

# NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR GLOBAL ASYMPTOTIC OF NONLINEAR SATELLITE ORIENTATION CONTROL SYSTEM STABILITY

*The paper presents the results of a study of the stability of a nonlinear satellite attitude control system (SACS) based on the representation of the equations of its dynamics in the form of a linear system of differential equations with time-varying parameters. The necessary and sufficient conditions for the global asymptotic stability of the SACS are obtained, and it is shown that the area of its global asymptotic stability in the parameter space of the control law depends on the initial conditions for the satellite and flywheel angular velocities.*

***Key words:*** *satellite, orientation control system, dynamics, asymptotic stability.*

**1. Введение.** При разработке закона автоматического управления ориентацией спутников используется, как правило, PD – регулятор [1-3]. При этом динамика системы управления ориентацией спутника (СУОС) описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, решения которых не выражаются в явном виде. В этой связи для анализа устойчивости движения СУОС используются их линеаризованные уравнения динамики [1,4,5].

Очевидным недостатком использования линеаризованных уравнений движения является то, что они описывают динамику СУОС приближенно. При этом в процессе анализа динамики системы управления не решается вопрос о глобальной асимптотической устойчивости исходной системы нелинейных уравнений, так как из теории устойчивости известно [6], что из асимптотической устойчивости линеаризованной системы следует локальная асимптотическая устойчивость исходной нелинейной системы, но не следует ее глобальная асимптотическая устойчивость.

В работах [2,5] приводятся результаты по исследованию асимптотической устойчивости нелинейной системы с использованием второго метода Ляпунова, но как известно [6], второй метод Ляпунова дает достаточные условия устойчивости нелинейной системы, но не дает необходимых условий ее устойчивости.

В работе [7] изложены результаты исследования динамики СУОС с PD – регулятором, кинематика которой описывается в углах поворота вокруг осей координат. Показано, что на основе теоремы об изменении кинетического момента механической системы, приведенной в работах [8], нелинейные уравнения динамики СУОС могут быть представлены в виде линейной системы дифференциальных уравнений с переменными во времени параметрами.

В данной статье получены необходимые и достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости нелинейной СУОС, кинематика которой описывается уравнениями в кватернионах, на основе использования уравнений ее движения в виде линейной системы дифференциальных уравнений с переменными во времени параметрами.

**2. Математическая модель системы управления ориентацией спутника.** Для описания ориентации спутника введем следующие системы координат и их обозначения (Рисунок 1): *OXYZ* – неподвижная инерциальная система координат (ИСК), начало которой находится в центре масс Земли (точка О), ось *OX* лежит в экваториальной плоскости и направлена в точку весеннего равноденствия, ось *OY* совпадает с осью вращения Земли и направлена на северный полюс Земли, ось *OZ* дополняет систему до правой; *Cxyz* – подвижная связанная система координат (ССК), начало которой находится в центре масс спутника (точка С), оси данной системы координат совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

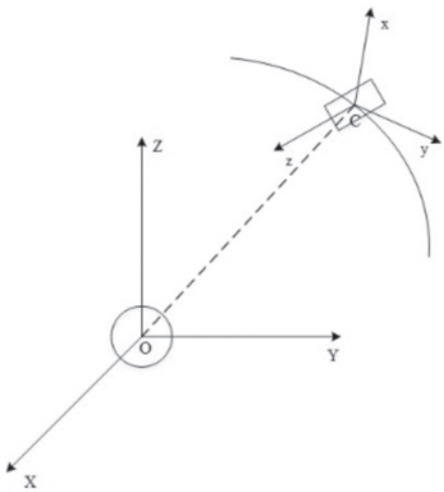


***Рисунок 1*** **–** Системы координат

Исходная нелинейная система дифференциальных уравнений вращательного движения СУОС при описании кинематики вращательного движения спутника кватернионами имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \frac{1}{2}[(1-\hat{\lambda}_0)\omega_1 - \lambda_3\omega_2 + \lambda_2\omega_3] \\ \dot{\omega}_1 = \frac{1}{J_1}[-h_1\omega_1 - \alpha_1\lambda_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + J_{m2}\omega_{m2}\omega_3 - J_{m3}\omega_{m3}\omega_2] \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{1}{2}[\lambda_3\omega_1 + (1-\hat{\lambda}_0)\omega_2 - \lambda_1\omega_3] \\ \dot{\omega}_2 = \frac{1}{J_2}[-h_2\omega_2 - \alpha_2\lambda_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3 + J_{m3}\omega_{m3}\omega_1 - J_{m1}\omega_{m1}\omega_3] \\ \dot{\lambda}_3 = \frac{1}{2}[-\lambda_2\omega_1 + \lambda_1\omega_2 + (1-\hat{\lambda}_0)\omega_3] \\ \dot{\omega}_3 = \frac{1}{J_3}[-h_3\omega_3 - \alpha_3\lambda_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + J_{m1}\omega_{m1}\omega_2 - J_{m2}\omega_{m2}\omega_1] \end{cases} \quad (1)$$

где $J = \{J_1, J_2, J_3,\}$ – диагональная (3x3) матрица тензора инерции спутника; $J_1$, $J_2$, $J_3$ – главные центральные моменты инерции спутника; $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3,)^T$ – вектор абсолютной угловой скорости спутника в проекциях на оси ССК; $J_м = \{J_{м1}, J_{м2}, J_{м3}\}$ – диагональная (3х3) - матрица тензора инерции маховиков; $J_{м1}, J_{м2}, J_{м3}$ – моменты инерции маховиков, установленных вдоль осей $x$, $y$, $z$ соответственно; $\vec{\omega}_м = (\omega_{м1}, \omega_{м2}, \omega_{м3})^T$ – вектор угловых скоростей маховиков; $\lambda_i = \lambda_i(t)$, $(i=\overline{0,3})$ – параметры Родрига-Гамильтона кватерниона $\Lambda(t)$ [9], т.е. $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1\bar{\iota}_1 + \lambda_2\bar{\iota}_2 + \lambda_3\bar{\iota}_3$, $\bar{\iota}_1, \bar{\iota}_2, \bar{\iota}_3$, – единичные орты базиса I в ИСК; $\lambda_0(t) = 1 - \hat{\lambda}_0(t)$, $\dot{\lambda}_0(t) = -\hat{\lambda}_0(t)$; $h_i, \alpha_i, (i=\overline{1,3})$ – неизвестные произвольные параметры закона управления, которые должны быть определены из условий устойчивости движения и обеспечения требуемых характеристик переходного процесса ориентации спутника; параметры кватерниона $\Lambda(t)$ удовлетворяют условию связи между ними: $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ .

Преобразуя систему нелинейных уравнений вращательного движения СУОС (1) в линейную систему дифференциальных уравнений с переменными во времени параметрами по методике, изложенной в работе [7], получим:

$$\dot{X} = [A + C^0 + L(t)]X \ , \tag{2}$$

где $X = (x_1, ..., x_6)^T \equiv (\lambda_1, \omega_1, \lambda_2, \omega_2, \lambda_3, \omega_3,)^T$, $A + C^0 + L(t)$ – сумма (6х6)-матриц, элементы которых имеют постоянные или переменные во времени $t$ слагаемые:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_1}{J_1} & -\frac{h_1}{J_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_2}{J_2} & -\frac{h_2}{J_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_3}{J_3} & -\frac{h_3}{J_3} \end{bmatrix}$$

$$C^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{I3}^0}{J_1} & 0 & \frac{C_{I2}^0}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{I3}^0}{J_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{I1}^0}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_{I2}^0}{J_3} & 0 & \frac{C_{I1}^0}{J_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\hat{\lambda}_0(t)}{2} & 0 & -\frac{\lambda_3(t)}{2} & 0 & \frac{\lambda_2(t)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_3(t)}{J_1} & 0 & \frac{B_2(t)}{J_1} \\ 0 & \frac{\lambda_3(t)}{2} & 0 & -\frac{\hat{\lambda}_0(t)}{2} & 0 & -\frac{\lambda_1(t)}{2} \\ 0 & \frac{B_3(t)}{J_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_1(t)}{J_2} \\ 0 & -\frac{\lambda_2(t)}{2} & 0 & \frac{\lambda_1(t)}{2} & 0 & -\frac{\hat{\lambda}_0(t)}{2} \\ 0 & -\frac{B_2(t)}{J_3} & 0 & \frac{B_1(t)}{J_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_{Ii}^0 (i=\overline{1,3})$ проекции кинетического момента спутника на оси ИСК; $B_i(t)$ – билинейные функции от $\lambda_i = \lambda_i(t), (i=\overline{0,3})$ .

**3. Асимптотические свойства кинетического момента спутника.** Утверждение 1. Если тривиальное решение нелинейной системы уравнений (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову, т.е. углы поворота подвижной ССК относительно ИСК стремятся к нулю

$$\lambda_0(t) \to 1,\ \lambda_i(t) \to 0,\ (i=\overline{1,3}) \text{ при } t \to \infty$$
$$\text{или} \tag{3}$$
$$\hat{\lambda}_0 \to 0\ ,\ \lambda_i(t) \to 0,\ (i=\overline{1,3}) \text{ при } t \to \infty,$$

то для проекций кинетического момента спутника на оси подвижной ССК, выражаемых как

$$C_i(t) = C_{Ii}^0 + B_i(t),\ \ (i=\overline{1,3}), t \in [t_0, \infty] \ , \tag{4}$$

имеют место предельные условия:

$$\lim_{t\to\infty} B_i(t) = 0, (i=\overline{1,3}). \tag{5}$$

Доказательство:

Представление проекций кинетического момента спутника на оси подвижной ССК в компактной форме (4) имеет вид:

$$C_{Ei}(t) = C_{Ii}^0 + \sum_{j=1}^{3} b_{ij}(t) C_{Ij}^0 = C_{Ij}^0 + B_i(t), (i=\overline{1,3}) \ , \tag{6}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}(t) &= 1 - 2\hat{\lambda}_0(t) + \hat{\lambda}_0^{\,2}(t) + \lambda_1^2(t) - \lambda_2^2(t) - \lambda_3^2(t) = 1 + b_{11}(t);\\
a_{22}(t) &= 1 - 2\hat{\lambda}_0(t) + \hat{\lambda}_0^{\,2}(t) + \lambda_2^2(t) - \lambda_1^2(t) - \lambda_3^2(t) = 1 + b_{22}(t);\\
a_{33}(t) &= 1 - 2\hat{\lambda}_0(t) + \hat{\lambda}_0^{\,2}(t) + \lambda_3^2(t) - \lambda_1^2(t) - \lambda_2^2(t) = 1 + b_{33}(t);\\
a_{12}(t) &= 2[\lambda_1(t)\lambda_2(t) - (1 - \hat{\lambda}_0(t))\lambda_3(t))] = b_{12}(t);\\
a_{13}(t) &= 2[\lambda_1(t)\lambda_3(t) + (1 - \hat{\lambda}_0(t))\lambda_2(t))] = b_{13}(t);\\
a_{21}(t) &= 2[\lambda_1(t)\lambda_2(t) + (1 - \hat{\lambda}_0(t))\lambda_3(t))] = b_{21}(t);\\
a_{23}(t) &= 2[\lambda_2(t)\lambda_3(t) - (1 - \hat{\lambda}_0(t))\lambda_1(t))] = b_{23}(t);\\
a_{31}(t) &= 2[\lambda_1(t)\lambda_3(t) - (1 - \hat{\lambda}_0(t))\lambda_2(t))] = b_{31}(t);\\
a_{32}(t) &= 2[\lambda_2(t)\lambda_3(t) + (1 - \hat{\lambda}_0(t))\lambda_1(t))] = b_{32}(t).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отсюда, если тривиальное решение системы уравнений (2) асимптотически устойчиво, т.е. имеют место условия (3), то из выражений (7) следует, что $b_{ij}(t) \to 0$ при $t \to \infty (i, j=\overline{1,3}), t \in [t_0, \infty]$ и, соответственно, условия (5) выполнены.

**4. Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости системы управления ориентацией спутника.** Прежде всего, покажем, что задачу об асимптотической устойчивости нелинейной системы (1) можно свести к задаче об асимптотической устойчивости однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными элементами, получаемой из линейной системы (2).

Утверждение 2: для того, чтобы нелинейная система (1) была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы была асимптотически устойчивой линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными элементами матрицы:

$$\dot{X} = [A + C^0]X \ . \tag{8}$$

и было выполнено условие

$$\lim_{t\to\infty} L(t) = 0 \ . \tag{9}$$

Доказательство:

Достаточность. Действительно, согласно теореме 2, гл.2, п.12 [6], если выполнено условие (9) и линейная система с постоянными элементами матрицы вида (8) асимптотически устойчива, то возмущенная линейная система с переменными параметрами (2) также асимптотически устойчива. Отсюда в силу эквивалентности возмущенной линейной системы (2) и нелинейной системы уравнений (1) следует, что последняя также асимптотически устойчива.

Необходимость. Если нелинейная система (1) асимптотически устойчива, то в силу эквивалентности этой системы и возмущенной линейной системы (2) последняя также асимптотически устойчива. При этом выполняется условие (9) и система с постоянными параметрами (8) асимптотически устойчива, так как постоянные элементы ее матрицы равны предельным значениям переменных элементов матрицы возмущенной линейной системы (2), т.е. $A + C^0 = \lim_{t\to\infty}[A + C^0 + L(t)]$ .

Следствие 1: Если нелинейная система (1) асимптотически устойчива, то она глобально асимптотически устойчива, так как согласно работе [6], если линейная система с постоянными параметрами (8) асимптотически устойчива, то она также глобально асимптотически устойчива.

Следствие 2: Область глобальной асимптотической устойчивости нелинейной системы (1) в пространстве параметров закона управления можно найти по условиям асимптотической устойчивости линейной системы с постоянными параметрами (8).

Как известно [6], устойчивость системы ориентации спутника, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными параметрами (8), определяется расположением корней ее характеристического уравнения:

$$\det[(A + C^0) - sE] = 0 \ . \tag{10}$$

Распределение корней характеристического уравнения (10) определяется значениями постоянных элементов матриц $A$ и $C^0$. При этом элементы матрицы $A$ зависят от параметров $h_i, \alpha_i (i = \overline{1,3})$ закона управления, а элементы матрицы $C^0$ определяются значениями проекций кинетического момента спутника на оси ИСК $C^0_{li} (i = \overline{1,3})$ .

Таким образом, в общем случае, использование системы (8) при анализе устойчивости СУОС требует знания начальных условий по угловым скоростям спутника и маховиков, так как постоянные элементы матрицы $C^0_{li} (i = \overline{1,3})$ системы (8) принимают заранее неизвестные значения из ограниченной замкнутой области трехмерного пространства в зависимости от начальных условий по угловым скоростям спутника и маховиков.

**5. Выводы**

1. Исследованы асимптотические свойства кинетического момента спутника, обусловленного ненулевыми начальными условиями по угловым скоростям спутника и маховиков, в проекциях на связанную систему координат.

2. Получены необходимые и достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы управления ориентацией спутника.

3. Показано, что область глобальной асимптотической устойчивости системы управления ориентацией спутника в пространстве параметров закона управления зависит от начальных условий по угловым скоростям спутника и маховиков.

**ЛИТЕРАТУРА**

1 Doruk R.O., 2009, Linearization in satellite attitude control with modified Rodriguez parameters, Aircraft engineering and aerospace technology: an international journal, 81/3, 199–203.

2 Moldabekov M., Yelubayev S., Alipbayev K., Sukhenko A, Bopeyev T., Mikhailenko D. Stability analysis of the microsatellite attitude control system // Applied mechanics and materials. – 2015. – Vol. 798. – P. 297-302.

3 Narkiewicz J., Sochacki M., Zakrzewski B. Generic Model of a Satellite Attitude Control System // International Journal of Aerospace Engineering. Volume 2020, Article ID 5352019, 17 pages. https://doi.org/10.1155/2020/5352019.

4 Zhou B. On stability of the linearized spacecraft attitude control system, 2015. https://arxiv.org/pdf/1504.00114.pdf

5 Nasrolahi S.S., Abdollahi F. Lyapunov stability analysis for non-linear satellite attitude control in the presence of states measurement error // Proc. of 2016 4th International conference on control, instrumentation and automation, 2016. DOI: 10.1109/ICCIAutom. 2016. 7483137.

6 Демидович Б.Л. Лекции по математической теории устойчивости. Москва, Наука, 1967 – 472 с.

7 Moldabekov M., Sukhenko A., Shapovalova D., Yelubayev S. Using the linear form of equations of dynamics of satellite attitude control system for its analysis and synthesis // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 59, 1, 2020, pp.109-120. DOI: 10.15632/jtam-pl/129071.

8 Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва, ЧеРо, 1999. – 572 с.

9 Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Москва, Наука, 1973. – 329 с.

**REFERENCES**

1 Doruk R.O., 2009, Linearization in satellite attitude control with modified Rodriguez parameters, Aircraft engineering and aerospace technology: an international journal, 81/3, 199–203.

2 Moldabekov M., Yelubayev S., Alipbayev K., Sukhenko A, Bopeyev T., Mikhailenko D. Stability analysis of the microsatellite attitude control system // Applied mechanics and materials. – 2015. – Vol. 798. – P. 297-302.

3 Narkiewicz J., Sochacki M., Zakrzewski B. Generic Model of a Satellite Attitude Control System // International Journal of Aerospace Engineering. Volume 2020, Article ID 5352019, 17 pages. https://doi.org/10.1155/2020/5352019.

4 Zhou B. On stability of the linearized spacecraft attitude control system, 2015. https://arxiv.org/pdf/1504.00114.pdf

5 Nasrolahi S.S., Abdollahi F. Lyapunov stability analysis for non-linear satellite attitude control in the presence of states measurement error // Proc. of 2016 4th International conference on control, instrumentation and automation, 2016. DOI: 10.1109/ICCIAutom. 2016. 7483137.

6 Demidovich B.L. Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti. Moskva, Nauka, 1967 – 472 s.

7 Moldabekov M., Sukhenko A., Shapovalova D., Yelubayev S. Using the linear form of equations of dynamics of satellite attitude control system for its analysis and synthesis // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 59, 1, 2020, pp.109-120. DOI: 10.15632/jtam-pl/129071.

8 Markeev A.P. Teoreticheskaya mehanika. Moskva, CheRo, 1999. – 572 s.

9 Branec V.N., Shmyglevskij I.P. Primenenie kvaternionov v zadachah orientacii tverdogo tela. Moskva, Nauka, 1973. – 329 s.