УДК 517.927.2
https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.41

К. И. УСМАНОВ, К. Ж. НАЗАРОВА, Ж. С. ЕРКИШЕВА

Международный Казахско-Турецкий университет им. А.Ясави, Туркестан, Казахстан.
e-mail: y_kairat@mail.ru, gjnazarova@mail.ru, jazira78@mail.ru

ОБ УСЛОВИИ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Рассматривается краевая задача для нелокального дифференциального уравнения второго порядка. Такие задачи возникают при рассмотрении разрешимости краевых и начально-краевых задач для нелокальных дифференциальных уравнений в частных производных. В работе исследуется разрешимость краевой задачи типа Дирихле для дифференциального уравнения $y''(1-x)+\lambda^2 y(x)=f(x), 0\le x\le 1.$ *Для решения задачи был применен метод параметризации профессора Д.Джумабаева. Для этого вводится параметры* $\mu_1=y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2=y'\left(\frac{1}{2}\right)$ *и выполняется замена переменных* $y(x)=u(x)+\mu_1+\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$. *Тем самым рассматриваемая задача разбивается на две части – это задача Коши для исходного уравнения и система линейных уравнений, относительно введенных параметров. Доказывается эквивалентность исходной краевой задачи и полученной задачи с параметрами. Параметры введены так, чтобы задача Коши для рассматриваемого уравнения с инволютивным преобразованием имела единственное решение. Определяя решение задачи Коши и подставляя его в краевые условия, получим систему линейных уравнений относительно параметров* μ_1, μ_2. *Считая матрицу данной системы обратимой, определяем значение параметров. Подставляя полученные выражение для* $u(x)$ *и* μ_1, μ_2 *в* $y(x)=u(x)+\mu_1+\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ *находим решение исходной задачи. Если матрица необратима, то получаем условие разрешимости задачи, в виде* $\int_0^1 \sin\lambda\xi f(\xi)d\xi=0,$ *где* $\lambda=(2k+1)\pi$.

Ключевые слова: *инволюция, краевая задача, метод параметризации, параметр, задача Коши, разрешимость.*

Қ. Ы. УСМАНОВ, К. Ж. НАЗАРОВА, Ж. С. ЕРКИШЕВА

Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті,
Түркістан, Қазақстан
e-mail: y_kairat@mail.ru, gjnazarova@mail.ru, jazira78@mail.ru

ИНВОЛЮЦИЯЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕЛЕР ҮШІН ДИРИХЛЕ ТҮРІНДЕГІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІНІҢ ШАРТЫ ТУРАЛЫ

Бұл мақалада локальды емес екінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп қарастырылады. Мұндай есептер локальды емес дербес туындылы теңдеулер үшін шеттік және бастапқы шеттік есептердің шешілімділігін қарастыру кезінде туындайды. Бұл жұмыста мынадай $y''(1-x)+\lambda^2 y(x)=f(x), 0\le x\le 1.$ *дифференциалдық теңдеу үшін Дирихле типті шеттік есептің шешілімділігі зерттеледі. Есепті шешу үшін профессор Д.С.Джумабаевтың параметрлеу әдісі қолданылды. Ол үшін* $\mu_1=y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2=y'\left(\frac{1}{2}\right)$ *параметрлері енгізіледі де, мынадай* *алмастыру* $y(x)=u(x)+\mu_1+\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ *жасалынады. Сонымен, қарастырылып отырған шеттік есеп екі бөлікке бөлінеді, бұл бастапқы теңдеу үшін Коши есебі және енгізілген параметрлерге қатысты сызықтық теңдеулер жүйесі. Бастапқы шеттік есеп пен алынған параметрлі есептің эквиваленттілігі дәлелденеді. Параметрлер қарастырылып отырған теңдеу үшін Коши есебінің жалғыз шешімі болатындай етіп енгізілген. Коши есебінің шешімін анықтау және оны шеттік шарттарға қою арқылы енгізілген* μ_1, μ_2 *параметрлерге қатысты сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйенің матрицасының кері матрицасы бар деп есептей отырып, қарастырылып отырған шеттік есептің шешімін табамыз. Алынған* $u(x)$ *және* μ_1, μ_2 *өрнектерін* $y(x)=u(x)+\mu_1+\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ *функциясына қойып, бастапқы есептің шешімін табамыз. Егер матрица қайтарымды болмаса, онда есептің шешілімділік шартын* $\int_0^1 \sin\lambda\xi f(\xi)\,d\xi=0,$ *мұндағы* $\lambda=(2k+1)\pi$ *осы түрде аламыз.*

Түйін сөздер: *инволюция, шеттік есеп, параметрлеу әдісі, параметр, Коши есебі, шешімділік.*

K. I. USMANOV, K. ZH. NAZAROVA, J. S. ERKISHEVA

A.Yasavi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan
e-mail: y_kairat@mail.ru, gjnazarova@mail.ru, jazira78@mail.ru

ON THE CONDITION FOR SOLVABILITY OF A BUNDARY VALUE PROBLEM OF DIRICHLET TYPE FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INVOLUTION

This article considers a boundary value problem for a nonlocal second-order differential equation. Such problems arise when considering the solvability of boundary value and initial boundary value problems for nonlocal partial differential equations. This paper investigates the solvability of a Dirichlet type boundary value problem for the differential equation $y''(1-x)+\lambda^2 y(x)=f(x),\ 0\le x\le 1.$*. To solve the problem, the parameterization method of Professor D. Dzhumabaev was used. To do this, the* $\mu_1=y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2=y'\left(\frac{1}{2}\right)$ *parameters are introduced and the* $y(x)=u(x)+\mu_1+\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ *variables are replaced. Thus, the problem under consideration is divided into two parts: this is the Cauchy problem for the original equation and a system of linear equations with respect to the entered parameters. The equivalence of the original boundary value problem and the resulting problem with parameters is proved. The parameters are introduced so that the Cauchy problem for the equation under consideration with an involutive transformation has a unique solution. By determining the solution to the Cauchy problem and substituting it into the boundary conditions, we obtain a system of linear equations with respect to the introduced parameters. Considering the matrix of this system to be invertible, we determine the values of the parameters. Substituting the resulting expressions for* $u(x)$ *and* μ_1, μ_2 *into* $y(x)=u(x)+\mu_1+\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ *we find the solution to the original problem. If the matrix is not invertible, then we obtain the condition for the solvability of the problem in the form* $\int_0^1 \sin\lambda\xi f(\xi)\,d\xi=0,$ *where* $\lambda=(2k+1)\pi$.

Key words: *Involution, boundary value problem, parameterization method, parameter, Cauchy problem, solvability.*

Введение. Известно, что дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами играют важную роль при исследовании задач медицины, биологии, экономики и т.д. Например, в работе [1] рассмотрена экономическая модель, описывающая взаимосвязь между приростом населения и производством сельскохозяйственной продукции. Показано, что если рассмотреть в модели запаздывания с положительной дисперсией, то динамика экономики определяется системой дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Некоторые из таких отклонений обладают свойствами $\alpha:[0,T]\to[0,T]$ и $\alpha^2(t)=\alpha(\alpha(t))=t$. В дифференциальных уравнениях, в которых вместе с искомой функцией $x(t)$ имеется значение $x(\alpha(t))$ и $\dot{x}(\alpha(t))$ называют уравнениями со сдвигами Карлемана [2] или уравнениями с инволютивными преобразованиями. На отрезке в качестве такого преобразования можно рассмотреть преобразование вида $\alpha(t) = 1 - t$.

Разрешимости различных дифференциальных уравнений с инволюцией посвящены монографии D. Przeworska-Rolewicz [3], J. Wiener [4]. J. Wiener исследовал существование решения уравнения в частных производных с инволюцией методом разделения переменных. Свойства таких преобразовании рассматривались в работах N.Karapetiants и S.Samko [5]. Работа авторов Alberto Cabada и F. Tojo посвящена созданию функции Грина для одномерных дифференциальных уравнений с инволюцией [6].

В настоящее время корректность краевых и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с различными видами инволюции, их качественные свойства решений, а также их спектральные вопросы достаточно хорошо изучены в работах [7-10]. Спектральные задачи для дифференциального оператора второго порядка изучались в [8-9]. В работе [10] исследуются собственные функции и собственные значения краевой задачи для нелокального уравнения Лапласа с кратной инволюцией.

Многие вопросы разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений с инволютивными преобразованиями исследованы достаточно хорошо. Однако некоторые вопросы разрешимости остаются открытыми. В данной работе с помощью метода параметризации будут определены условия разрешимости одной из таких задач.

2. Метод параметризации. В данной работе на отрезке [0, 1] исследуется краевая задача для неоднородного уравнения с инволюцией

$$y''(1-x)+\lambda^2 y(x)= f(x), 0\le x\le 1, \qquad (1)$$

$$y(0)=a, \quad y(1)=b \qquad (2)$$

где функция $f(x)$ непрерывна на [0, 1], $\lambda \neq 0$. В случае, когда $\lambda = 0$ краевая задача (1), (2) переходит в краевую задачу для обыкновенного уравнения с разделяющими переменами.

Разрешимость краевой задачи (1), (2) будем исследовать методом параметризации, предложенным профессором Джумабаевым Д.С. [11]. Метод параметризации изначально был применен для исследования однозначной разрешимости краевой задачи для систем дифференциальных уравнений. Позже методом параметризации были исследованы разрешимости различных краевых задач [12-13].

Введя обозначения $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right), \quad \mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и используя замену $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, из краевой задачи (1), (2) перейдем к следующей эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$u''(1-x) + \lambda^2 u(x) = f^*(x), \tag{3}$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad u'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{4}$$

$$u(0) + \mu_1 - \frac{\mu_2}{2} = a, \tag{5}$$

$$u(1) + \mu_1 + \frac{\mu_2}{2} = b. \tag{6}$$

где $f^*(x) = f(x) - \lambda^2\mu_1 - \lambda^2\mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Лемма 1. Задачи (1), (2) и (3) – (6) эквивалентны.

Доказательство. Пусть $y(x)$ – решение краевой задачи (1), (2). Тогда определяемая в виде $u(x) = y(x) - \mu_1 - \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ функция удовлетворяет (3) - (6), где $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Действительно, $u''(x) = y''(x)$ и $u''(1-x) = y''(1-x)$. Тогда

$$u''(1-x) + \lambda^2 u(x) = y''(1-x) + \lambda^2\left(y(x) - \mu_1 - \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= y''(1-x) + \lambda^2 y(x) - \lambda^2\left(\mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = f(x) - \lambda^2\mu_1 - \lambda^2\mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right) = f^*(x),$$

т.е. $y(x)$ удовлетворяет (3). Так как, $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right), \quad \mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$, то $u\left(\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) - \mu_1 =$ $= \mu_1 - \mu_1 = 0$. $u'(x) = y'(x) - \mu_2$, $u'\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right) - \mu_2 = \mu_2 - \mu_2 = 0$.

Условия (5), (6) следует из

$$u(0) + \mu_1 - \frac{\mu_2}{2} = \left(y(0) - \mu_1 + \frac{\mu_2}{2}\right) + \mu_1 - \frac{\mu_2}{2} = y(0) = a,$$

$$u(1)+\mu_1+\frac{\mu_2}{2}=\left(y(1)-\mu_1-\frac{\mu_2}{2}\right)+\mu_1+\frac{\mu_2}{2}=y(1)=b.$$

Обратно пусть $u(x)$, μ_1, μ_2 решение задачи (3) – (6). Тогда определяемая в виде $y(x)=u(x)+\mu_1+\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ функция удовлетворяет (1), (2). Действительно, $y''(x)=u''(x)$ и $y''(1-x)=u''(1-x)$. Тогда

$$y''(1-x)+\lambda^2 y(x)=u''(1-x)+\lambda^2 u(x)+\lambda^2\mu_1+\lambda^2\mu_2\left(\frac{1}{2}-x\right)=f^*(x)+\lambda^2\mu_1+$$

$$+\lambda^2\mu_2\left(\frac{1}{2}-x\right)=\left(f(x)-\lambda^2\mu_1-\lambda^2\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+\lambda^2\mu_1+\lambda^2\mu_2\left(\frac{1}{2}-x\right)=f(x),$$

т.е. удовлетворяет (3). Докажем, что $y(x)=u(x)+\mu_1+\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет и краевые условия (2). Так как $y(0)=u(0)+\mu_1-\frac{\mu_2}{2}$, то подставляя вместо $u(0)=-\mu_1+\frac{\mu_2}{2}+a,$ получим $y(0)=u(0)+\mu_1-\frac{\mu_2}{2}=\left(-\mu_1+\frac{\mu_2}{2}+a\right)+\mu_1-\frac{\mu_2}{2}=a.$

Используя (6), можно показать, что $y(x)=u(x)+\mu_1+\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет и $y(1)=b.$

Применяя метод параметризации, мы формально исходную задачу разделили на две части, т.е. задача Коши (3), (4), для исходного уравнения и в систему линейных алгебраических уравнений (5), (6), для определения введенных параметров μ_1, μ_2.

3. Решение задачи Коши. В работе [14] было доказано существование и единственность решения задачи Коши (3), (4), т.е. доказана Лемма, что если начальные условия задаются на середине рассматриваемого отрезка, то задача Коши для уравнения с инволютивным преобразованием имеет единственное решение. Поэтому параметры μ_1, μ_2 введены так, чтобы задача Коши имело единственное решение.

Рассмотрим уравнение (3), (4) в точках $x^*=1-x$, тогда

$$u''(x)+\lambda^2 u(1-x)=f^*(1-x), \tag{7}$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right)=0,\quad u'\left(\frac{1}{2}\right)=0. \tag{8}$$

Складываем уравнения (3) и (7). Обозначим через $\vartheta(x)=u(x)+u(1-x)$, тогда

$$\vartheta''(x)+\lambda^2\vartheta(x)=f_+^*(x), \tag{9}$$

$$\vartheta\left(\frac{1}{2}\right)=0,\quad \vartheta'\left(\frac{1}{2}\right)=0, \tag{10}$$

где $f_+^*(x) = f^*(x) + f^*(1-x)$. Вычитаем уравнения (3) от уравнения (7). Обозначим через $w(x) = u(x) - u(1-x)$, тогда

$$w''(x) - \lambda^2 w(x) = f_-^*(x), \tag{11}$$

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{12}$$

где $f_-^*(x) = -f^*(x) + f^*(1-x)$. Несложно показать, что решение задачи Коши (9), (10) определяется в виде

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{x} \sin\lambda(x-\xi)\, f_+^*(\xi)\,d\xi, \tag{13}$$

а решение задачи Коши (11), (12) определяется в виде

$$w(x) = \frac{1}{\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{x} sh\lambda(x-\xi)\, f_-^*(\xi)\,d\xi. \tag{14}$$

Так как $\vartheta(x) = u(x) + u(1-x)$ и $w(x) = u(x) - u(1-x)$, то $u(x) = \frac{1}{2}\left(\vartheta(x) + w(x)\right)$,

т.е.
$$u(x) = \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{x} \sin\lambda(x-\xi)\, f_+^*(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{x} sh\lambda(x-\xi)\, f_-^*(\xi)\,d\xi \tag{15}$$

Лемма 2. Решение задачи Коши (3), (4) определяется равенствами (15).

Доказательство. Из (15) следует, что $u\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$ Так как

$$u'(x) = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{x} \cos\lambda(x-\xi)\, f_+^*(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{x} ch\lambda(x-\xi)\, f_-^*(\xi)\,d\xi\ ,$$

то $u'\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$ т.е. (15) удовлетворяет условию (4). Определим вторую производную от (15)

$$u''(x) = \frac{1}{2}\left(f_+^*(x) + f_-^*(x)\right) - \frac{\lambda}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{x} \sin\lambda(x-\xi)\, f_+^*(\xi)\,d\xi + \frac{\lambda}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{x} sh\lambda(x-\xi)\, f_-^*(\xi)\,d\xi\ , \tag{16}$$

или значение (16) в точках $x^* = 1-x$

$$u''(1-x) = f^*(x) - \frac{\lambda}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1-x} \sin\lambda(1-x-\xi)\, f_+^*(\xi)\,d\xi + \frac{\lambda}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1-x} sh\lambda(1-x-\xi)\, f_-^*(\xi)\,d\xi\ , \tag{17}$$

здесь учтены, что $f_+^*(x) = f^*(x) + f^*(1-x)$, $f_-^*(x) = -f^*(x) + f^*(1-x)$.

В (17) выполним замену переменных $\xi = 1 - z$, получим

$$u''(1-x) = f^*(x) + \frac{\lambda}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{x} \sin\lambda(x-z)\, f_+^*(z)\,dz - \frac{\lambda}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{x} sh\lambda(x-z)\, f_-^*(z)\,dz \ . \qquad (18)$$

(15) и (18) подставляем в (3), т.е. (15) удовлетворяет уравнению (3).

Далее определяем значение введенных параметров. Подставим в (15) вместо $f_+^*(x)$, $f_-^*(x)$ их выражения $f_+^*(x) = f^*(x) + f^*(1-x)$, $f_-^*(x) = -f^*(x) + f^*(1-x)$, где $f^*(x) = f(x) - \lambda^2\mu_1 - \lambda^2\mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, тогда

$$u(x) = \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{x} \sin\lambda(x-\xi)\left[f(\xi) + f(1-\xi)\right]d\xi - \mu_1\left(1 - \cos\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{x} sh\lambda(x-\xi)\left[f(1-\xi) - f(\xi)\right]d\xi - \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\mu_2}{\lambda} sh\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Далее, выполняя замену $f(1-\xi)$, в интегральных членах $f(1-\xi)$, получим

$$u(x) = \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{x} \sin\lambda(x-\xi)\, f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1-x} \sin\lambda(1-x-\xi)\, f(\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1-x} sh\lambda(1-x-\xi)\, f(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{x} sh\lambda(x-\xi)\, f(\xi)\,d\xi -$$

$$-\mu_1\left(1 - \cos\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) - \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\mu_2}{\lambda} sh\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right). \qquad (19)$$

Подставим (19) в условия (5), (6)

$$\frac{1}{2\lambda}\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin\lambda\xi\cdot f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sin\lambda(1-\xi)\, f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1} sh\lambda(1-\xi)\, f(\xi)\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\int_{0}^{\frac{1}{2}} sh\lambda\xi f(\xi)\,d\xi - \mu_1\left(1 - \cos\frac{\lambda}{2}\right) + \frac{\mu_2}{2} - \frac{\mu_2}{\lambda} sh\frac{\lambda}{2} + \mu_1 - \frac{\mu_2}{2} = a, \qquad (20)$$

$$\frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sin\lambda(1-\xi)\cdot f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\lambda}\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin\lambda\xi f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\lambda}\int_{0}^{\frac{1}{2}} sh\lambda\xi f(\xi)\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1} sh\lambda(1-\xi)\, f(\xi)d\xi-\mu_1\left(1-\cos\frac{\lambda}{2}\right)-\frac{\mu_2}{2}+\frac{\mu_2}{\lambda}sh\frac{\lambda}{2}+\mu_1+\frac{\mu_2}{2}=b. \tag{21}$$

или

$$\mu_1\cos\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu_2}{\lambda}sh\frac{\lambda}{2}=a-\frac{1}{2\lambda}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\lambda\xi\cdot f(\xi)d\xi-\frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sin\lambda(1-\xi)\, f(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1} sh\lambda(1-\xi)\, f(\xi)d\xi+\frac{1}{2\lambda}\int_0^{\frac{1}{2}} sh\lambda\xi f(\xi)d\xi\ , \tag{22}$$

$$\mu_1\cos\frac{\lambda}{2}+\frac{\mu_2}{\lambda}sh\frac{\lambda}{2}=b-\frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sin\lambda(1-\xi)\cdot f(\xi)d\xi-\frac{1}{2\lambda}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\lambda\xi f(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\int_0^{\frac{1}{2}} sh\lambda\xi f(\xi)d\xi+\frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1} sh\lambda(1-\xi)\, f(\xi)d\xi. \tag{23}$$

Матрицу, соответствующую параметрам μ_1, μ_2 обозначим через

$$Q=\begin{pmatrix}\cos\frac{\lambda}{2} & -\frac{1}{\lambda}sh\frac{\lambda}{2}\\ \cos\frac{\lambda}{2} & \frac{1}{\lambda}sh\frac{\lambda}{2}\end{pmatrix}. \tag{24}$$

4. Основные результаты. Теорема 1. Для однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2) необходима и достаточна обратимость матрицы Q.

Доказательство. Пусть матрица Q обратима. Тогда из системы линейных уравнений (22), (23) однозначно определим параметры μ_1, μ_2. Подставляя полученные значения параметров в (3), (4), найдем единственное решение задачи Коши. По Лемме 1, задачи (1), (2) и (3) – (5) эквиваленты. Так как (3), (4) однозначно разрешимы, то определяем $u(t)$. Подставляя полученные выражения в $y(x)=u(x)+\mu_1+\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$, найдем единственное решение краевой задачи (1), (2).

Обратно пусть краевая задача (1), (2) однозначно разрешима и $y(t)$ – его решение. Введя обозначения $\mu_1=y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2=y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и используя замену $u(x)=y(x)-\mu_1-\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$, от краевой задачи (1), (2), перейдем к эквивалентной краевой задаче с параметрами (3) – (5).

Предположим, что матрица Q необратима. Тогда система линейных уравнений имеет два различных решения μ_1, μ_2 и $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$. Но $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\tilde{\mu}_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\tilde{\mu}_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$, отсюда следует, что матрица Q обратима и $\mu_1 = \tilde{\mu}_1$, $\mu_2 = \tilde{\mu}_2$.

Подставим (19) в $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, тогда

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{x} \sin\lambda(x-\xi) f(\xi)d\xi + \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1-x} \sin\lambda(1-x-\xi) f(\xi)d\xi + \mu_1 \cos\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1-x} sh\lambda(1-x-\xi) f(\xi)d\xi - \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{x} sh\lambda(x-\xi) f(\xi)d\xi + \frac{\mu_2}{\lambda} sh\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right). \quad (25)$$

Пусть матрица Q обратима. Тогда $\frac{2}{\lambda}\cos\frac{\lambda}{2} sh\frac{\lambda}{2} \neq 0$ и

$$\mu_1 = \frac{1}{2\cos\frac{\lambda}{2}}\left\{a + b - \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin\lambda\xi \cdot f(\xi)d\xi - \frac{1}{\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sin\lambda(1-\xi) f(\xi)d\xi\right\}, \quad (26)$$

$$\mu_2 = \frac{\lambda}{2sh\frac{\lambda}{2}}\left\{b - a - \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{\frac{1}{2}} sh\lambda\xi f(\xi)d\xi + \frac{1}{\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{1} sh\lambda(1-\xi) f(\xi)d\xi\right\}. \quad (27)$$

Тогда, подставляя (26), (27) в (25), определяем решение краевой задачи (1), (2).

Если система линейных уравнений (22), (23) совместна определена, то следует следующая теорема.

Теорема 2. Если матрица Q необратима, то для разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы при $a = b = c$ выполнялись условия

$$\int_{0}^{1} \sin\lambda\xi f(\xi)d\xi = 0, \quad \text{где } \lambda = (2k+1)\pi .$$

This research has been/was/is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23488086)

ЛИТЕРАТУРА

1 Ciano T., Ferrara M., Guerrini L. Qualitative analysis of a model of renewable resources and population with distributed delays. Mathematics. – 2022. - 10(8). - P. 1247;

2 Carleman T. La the´orie des e´quations inte´grales singulie´res et ses applications. Annales de l'institut Henri Poincare´. – 1932. – 1. – P. 401–430.

3 Przeworska-Rolewicz D. Equations with Transformed Argument, An Algebraic Approach, 1st ed.; Elsevier Scientific: Amsterdam, The Netherlands, 1973.

4 Wiener J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations, 1st ed.; World Scientific: Singapore; River Edge NJ, USA; London, UK; Hong Kong, China, 1993.

5 Karapetiants N., Samko S. Equations with Involutive Operators, 1st ed.; World Birkha¨user: Boston, MA, USA, 2001; ISBN 978-1-4612-0183-0.

6 Cabada A.; Tojo F.A.F. Differential Equations with Involutions, 1st ed.; Atlantis Press: Paris, France, 2015; ISBN 978-94-6239-120-8.

7 Al-Salti N., Kerbal S., Kirane M. Initial-boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation. Math. Model. Nat. Phenomena. – 2019. – 14. – P. 312.

8 Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Properties in Lp of root functions for a nonlocal problem with involution. Turk. J. Math. – 2019. – 43. – P. 393–401.

9 Sarsenbi A., Sarsenbi A. On eigenfunctions of the boundary value problems for second order differential equations with involution. Symmetry. – 2021. – 13. – P.1972.

10 Turmetov B., Karachik V. On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with multiple Involution. Symmetry. – 2021. – 13. – P. 1981.

11 Dzhumabayev DS. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. Comput Maths Math Phys. – 1989. – 29(34). P. 34-46.

12 A. T. Assanova, E. A. Bakirova, Z. M. Kadirbayeva, "Numerical Solution to a Control Problem for Integro-Differential Equations", Comput. Math. and Math. Phys. – 2020. – 60(2). – P. 203–221.

13 Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation, Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. – 53(6). – P. 736-758.

14 G. Dildabek, M. B. Ivanova, M. A. Sadybekov. On root functions of nonlocal differential second-order operator with boundary conditions of periodic type. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2021. – Vol. 112, No. 4. – P. 29-44.

REFERENCES

1 Ciano T., Ferrara M., Guerrini L. Qualitative analysis of a model of renewable resources and population with distributed delays. Mathematics. – 2022. - 10(8). - P. 1247;

2 Carleman T. La the´orie des e´quations inte´grales singulie´res et ses applications. Annales de l'institut Henri Poincare´. – 1932. – 1. – P. 401–430.

3 Przeworska-Rolewicz D. Equations with Transformed Argument, An Algebraic Approach, 1st ed.; Elsevier Scientific: Amsterdam, The Netherlands, 1973.

4 Wiener J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations, 1st ed.; World Scientific: Singapore; River Edge NJ, USA; London, UK; Hong Kong, China, 1993.

5 Karapetiants N., Samko S. Equations with Involutive Operators, 1st ed.; World Birkha¨user: Boston, MA, USA, 2001; ISBN 978-1-4612-0183-0.

6 Cabada A.; Tojo F.A.F. Differential Equations with Involutions, 1st ed.; Atlantis Press: Paris, France, 2015; ISBN 978-94-6239-120-8.

7 Al-Salti N., Kerbal S., Kirane M. Initial-boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation. Math. Model. Nat. Phenomena. – 2019. – 14. – P. 312.

8 Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Properties in Lp of root functions for a nonlocal problem with involution. Turk. J. Math. – 2019. – 43. – P. 393–401.

9 Sarsenbi A., Sarsenbi A. On eigenfunctions of the boundary value problems for second order differential equations with involution. Symmetry. – 2021. – 13. – P.1972.

10 Turmetov B., Karachik V. On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with multiple Involution. Symmetry. – 2021. – 13. – P. 1981.

11 Dzhumabayev DS. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. Comput Maths Math Phys. – 1989. – 29(34). P. 34-46.

12 A. T. Assanova, E. A. Bakirova, Z. M. Kadirbayeva, "Numerical Solution to a Control Problem for Integro-Differential Equations", Comput. Math. and Math. Phys. – 2020. – 60(2). – P. 203–221.

13 Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation, Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. – 53(6). – P. 736-758.

14 G. Dildabek, M. B. Ivanova, M. A. Sadybekov. On root functions of nonlocal differential second-order operator with boundary conditions of periodic type. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2021. – Vol. 112, No. 4. – P. 29-44.