УДК 517.54
https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.56

Ф. Ф. МАЙЕР[1]*, А. Т. БАЙМАНКУЛОВ[1], Т. А. ЖУАСПАЕВ[2]

[1]Костанайский региональный университет имени А.Байтурсынұлы, Костанай, Казахстан;
[2]Костанайский инженерно-экономический университет им. М. Дулатова, Костанай, Казахстан.
**E-mail: maiyer@mail.ru*

ОБ ОБОБЩЕНИИ КЛАССОВ ВЫПУКЛЫХ В НАПРАВЛЕНИИ И ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Майер Федор Федорович – кандидат физико-математических наук, Костанайский региональный университет имени А.Байтурсынұлы, Костанай, Казахстан;
E-mail: maiyer@mail.ru; ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2278-2723
Байманкулов Абдыкарим Тунгушбаевич – доктор физико-математических наук, Костанайский региональный университет имени А.Байтурсынұлы, Костанай, Казахстан;
E-mail: bat_56@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6435-9560
Жуаспаев Талгат Амангельдинович – кандидат физико-математических наук, Костанайский инженерно-экономический университет им. М.Дулатова, Костанай, Казахстан.
E-mail: g_talgat_a@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0009-0000-2240-9729

В статье вводится подкласс $C_\delta(\lambda,\ \alpha,\gamma)$ почти выпуклых функций $f(z)$, обобщающий классы функций, выпуклых в определенном направлении, а также класс функций с ограниченным вращением. Установлены геометрические свойства функций этого класса, уточняющие свойства всего класса почти выпуклых функций, а также получены точные теоремы искажения и радиусы выпуклости. С помощью соотношения $F(z) = zf'(z)$, где $f(z)\in C_\delta(\lambda,\ \alpha,\gamma)$, вводится класс $T_\delta(\lambda,\ \alpha,\gamma)$ функций $F(z)$, обобщающий классы почти звездообразных и типично-вещественных функций. Полученные для класса $C_\delta(\lambda,\ \alpha,\gamma)$ результаты переносятся на класс $T_\delta(\lambda,\ \alpha,\gamma)$. В частных случаях классов $C_\delta(\lambda,\ \alpha,\gamma)$ и $T_\delta(\lambda,\ \alpha,\gamma)$ для функций, выпуклых в определенном направлении, функций с ограниченным вращением, типично-вещественных и почти звездообразных функций получаются ранее известные, в том числе и классические результаты.

Ключевые слова: *оценки голоморфных функций, радиусы выпуклости, почти выпуклые функции, типично-вещественные функции.*

Ф. Ф. МАЙЕР[1]*, А. Т. БАЙМАНКУЛОВ[1], Т. А. ЖУАСПАЕВ[2]

[1]А.Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай, Қазақстан;
[2]М. Дулатов атындағы Қостанай инженерлік-экономикалық университеті, Қостанай, Қазақстан.
**E-mail: maiyer@mail.ru*

ДӨҢЕС ЖӘНЕ ТИПТІК НАҚТЫ ФУНКЦИЯЛАР КЛАСТАРЫН ЖАЛПЫЛАУ ТУРАЛЫ

Майер Федор Федорович – физика-математика ғылымдарының кандидаты, А. Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай, Қазақстан;

E-mail: maiyer@mail.ru; ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2278-2723

Байманкулов Абдыкарим Тунгушбаевич – физика-математика ғылымдарының докторы, А. Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай, Қазақстан;

E-mail: bat_56@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6435-9560

Жуаспаев Талгат Амангельдинович – физика-математика ғылымдарының кандидаты, М. Дулатов атындағы Қостанай инженерлік-экономикалық университеті, Қостанай, Қазақстан.

E-mail: g_talgat_a@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0009-0000-2240-9729

Мақалада белгілі бір бағытта дөңес функциялар кластарын және шектеулі айналмалы функциялар класын қорытындылайтын $f(z)$ дөңес функциялардың $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ кіші класы енгізіледі. Осы класс функцияларының геометриялық қасиеттері орнатылып, дөңес функциялардың бүкіл класының қасиеттерін нақтылайды, сонымен қатар бұрмаланудың нақты теоремаларымен дөңес радиустары алынады. $F(z) = zf'(z)$ қатынасын қолдана отырып, мұндағы $f(z) \in C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$, $F(z)$ функцияларының $T_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ класы енгізіліп, жұлдыз тәрізді және типтік-нақты функциялардың кластарын жалпылайды. $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ класы үшін алынған нәтижелер $T_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ класына ауыстырылады. $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ және $T_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ кластарының ерекше жағдайларында белгілі бір бағытта дөңес функциялар, шектеулі айналу функциялары, типтік-нақты және жұлдызтәрізді функциялар үшін бұрын белгілі, соның ішінде классикалық нәтижелер алынады.

Түйін сөздер: *аналитикалық функцияларды бағалау, дөңес радиустар, дөңес функциялар, типтік-нақты функциялар.*

F. F. MAIYER[1]*, A. T. BAIMANKULOV[1], T. A. ZHUASPAEV[2]

[1]Kostanay Regional University named after A.Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan;
[2]Kostanay Engineering and Economics University named after M. Dulatov, Kostanay, Kazakhstan.
**E-mail: maiyer@mail.ru*

ON A GENERALIZATION OF CLASSES OF CONVEX IN THE DIRECTION AND TYPICALLY REAL FUNCTIONS

Maiyer Fedor – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Kostanay Regional University named after A.Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan;

E-mail: maiyer@mail.ru; ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2278-2723

Baimankulov Abdykarim – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Kostanay Regional University named after A.Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan;

E-mail: bat_56@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6435-9560

Zhuaspayev Talgat – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Kostanay University of Engineering and Economics named after M.Dulatov, Kostanay, Kazakhstan.
E-mail: g_talgat_a@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0009-0000-2240-9729

The article introduces a subclass $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ of close-to-convex functions $f(z)$, generalizing classes of functions convex in a certain direction and a class of functions with bounded turning. The geometric properties of functions of this class are established, clarifying the properties of the entire class of close-to-convex functions, and exact distortion theorems and convexity radii are obtained. Using the ratio $F(z) = zf'(z)$, where $f(z)\in C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$, the class $T_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ of functions $F(z)$ is introduced, generalizing classes of close-to-starlike and typically real functions. The results obtained for the class $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ are transferred to the class $T_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$.

In special cases of classes $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ and $T_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ for functions convex in a certain direction, functions with limited rotation, typically real and close-to-starlike functions, previously known, including classical, results are obtained.

Keywords: *estimates of holomorphic functions, radii of convexity, close-to-convex functions, typically real functions.*

1. Введение, постановка задачи. Пусть $\mathcal{H}$ – класс голоморфных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(x)$, нормированных условием $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Через S, S^0 и K будем обозначать соответственно классы однолистных, выпуклых и почти выпуклых в круге E функций $f(z)\in\mathcal{H}$. Класс введен Одзаки и Капланом (см. [1], §4) с помощью условия

$$Re\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) \geq 0,\quad g(z) \in S^0, z\epsilon E. \tag{1}$$

С каждой функцией $g(z)$ связан подкласс $K_g \subset K$, функции которого в определенной степени наследуют свойства функции $g(z)$. При этом $K = \bigcup_{g(z)\in S^0} K_g$.

В статьях [2-3] исследовались классы функций $f(z) \in \mathcal{H}$, определяемые условиями

$$C_1:\quad Re\,[(1-z^2)f'(z)] > 0, \tag{2}$$
$$C_2:\quad Re\,[(1-z)^2 f'(z)] > 0, \tag{3}$$

С классами C_1, C_2 тесно связаны классы $\hat{C}_1 = \{\hat{f}(z) \in \mathcal{H}: Re\,[(1+z^2)\hat{f}'(z)] > 0\}$ и $\hat{C}_2 = \{\hat{f}(z) \in \mathcal{H}: Re\,[(1+z)^2\hat{f}'(z)] > 0\}$, к которым легко перейти с помощью преобразований $\hat{f}(z) = (1/i)f(iz)$ и $\hat{f}(z) = -f(-z)$. Функции классов $C_1, C_2, \hat{C}_1, \hat{C}_2$ являются почти выпуклыми, так как удовлетворяют условию (1), соответственно, с выпуклой функцией

$$g_1(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},\quad g_2(z) = \frac{z}{1-z}, \hat{g}_1(z) = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz},\quad \hat{g}_2(z) = \frac{z}{1+z}.$$

Функции классов $C_1, C_2, \hat{C}_1, \hat{C}_2$ обладают наглядными геометрическими свойствами. Например, область $f(E)$ для $f(z)$ из C_1 является выпуклой в направлении мнимой оси [2], а для $f(z)$ из C_2 – выпуклой в положительном направлении действительной оси [3].

В [4-5] введен подкласс $K(\gamma) \subset K$ функций, однолистных и почти выпуклых, порядка γ:

$$\left|arg\ \frac{f'(z)}{g'(z)}\right| \le \gamma\frac{\pi}{2},\ \ 0 \le \gamma \le 1,\ \ z \in E, \tag{4}$$

где $g(z) \in S^0$, как и в условии (1). Функции класса $K(\gamma)$ характеризуются тем, что для каждой граничной точки области $f(E)$ можно построить угол раствора $(1-\gamma)\pi$ с вершиной в этой точке и биссектрисой, уходящей в ∞, целиком принадлежащий внешности $f(E)$.

Подклассами класса $K(\gamma)$, аналогичными классам C_1, C_2, являются классы

$$C_1(\gamma):\quad |arg\ ((1-z^2)f'(z))| \le \gamma\,\pi/2, \tag{2´}$$
$$C_2(\gamma):\quad |arg\ ((1-z)^2 f'(z))| \le \gamma\,\pi/2. \tag{3´}$$

Как показано в [6-7], функции классов $C_1(\gamma)$, $C_2(\gamma)$ характеризуются достижимостью извне области $f(E)$ углами раствора $(1-\gamma)\pi$, соответственно, в направлении мнимой оси и в положительном направлении действительной оси.

Наряду с геометрическими характеристиками, в ряде статей были найдены оценки $|f(z)|,|f'(z)|$. Например, для класса $K(\gamma)$ – в [4], для класса C_1 – в [2], для $C_1(\gamma)$ – в [6].

По аналогии с условием (1) М.Рид [8] ввел класс CS^* почти звездообразных функций $F(z)$ из $\mathcal{H}$, удовлетворяющих условию

$$Re\,\frac{F(z)}{g(z)} \ge 0, \text{где}\ g(z) \in S^*, z \in E. \tag{5}$$

Его подклассами являются классы CS_1^*, CS_2^* [9-11] почти звездообразных функций $F(z)$ из $\mathcal{H}$

$$CS_1^*:\qquad Re\,\{(1-z^2)F(z)/z\} \ge 0, \tag{6}$$
$$CS_2^*:\qquad Re\,\{(1-z)^2F(z)/z\} \ge 0, \tag{7}$$

связанные с классами C_1, C_2 соотношением $f(z) \in C_k \Leftrightarrow F(z) = zf'(z) \in CS_k^*,\ k = 1{,}2$. При условии, что функция $F(z)$ принимает вещественные значения в точках $z \in (-1,1)$, класс CS_1^* совпадает с классом T типично вещественных в круге E функций, введенным в [12].

В настоящей статье как обобщение классов $C_1(\gamma)$, $C_2(\gamma)$ и класса функций с ограниченным вращением вводится класс $C_\delta(\lambda,\alpha,\gamma),\ \ \lambda,\alpha,\gamma \in [0;1], \delta \in [-\pi;\pi]$, функций $f(z) \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих условию

$$|\,arg\ \ [(1-\varepsilon z)^{1+\alpha}(1+\varepsilon z)^{1-\alpha}f'\,(z)]| \le \gamma\frac{\pi}{2},\ \ \varepsilon = \lambda e^{-i\delta},\ \ z \in E. \tag{8}$$

Также с помощью соотношения $F(z) = zf'(z)$, где $f(z) \in C_\delta(\lambda,\alpha,\gamma)$, вводится класс

$$T_\delta(\lambda,\alpha,\gamma) = \left\{F(z) \in \mathcal{H}\colon \left|\arg\left((1-\varepsilon z)^{1+\alpha}(1+\varepsilon z)^{1-\alpha}\frac{F(z)}{z}\right)\right| \le \gamma\frac{\pi}{2},\ \ \varepsilon = \lambda e^{-i\delta}\right\}, \tag{9}$$

обобщающий классы почти звездообразных и типично-вещественных функций.

В статье исследуются геометрические свойства функций класса $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$, а также получены точные теоремы искажения/роста и радиусы выпуклости/звездообразности классов $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ / $T_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$, которые обобщают многие ранее известные результаты для функций, выпуклых в определенном направлении, функций с ограниченным вращением, типично-вещественных и почти звездообразных функций.

2. Методы и материалы. Основными методами исследования являются метод конформных отображений и метод подчиненности голоморфных функций [1, 13].

3. Геометрическая характеристика функций класс $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$. Нетрудно заметить, что $C_0(1, 0, \gamma)$ и $C_0(1, 1, \gamma) = C_2(\gamma)$ и при $\gamma = \lambda = 1$ при определенных значениях δ и α классы $C_1,\ C_2,\ \hat{C}_1, \hat{C}_2$ являются подклассами класса $C_\delta(1, \alpha, 1)$. Кроме того, при $\lambda \to 0$ осуществляется простой параметрический переход от класса $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ к подклассу функций с ограниченным вращением (см. [1;§4]), заданному условием $|\arg f'(z)| \le \gamma\,\pi/2$.

Все функции класса $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ являются однолистными и почти выпуклыми порядка γ, поскольку в силу (8) функция $f(z)$ удовлетворяет условию (4) с выпуклой функцией

$$g(z) = \frac{1}{2\alpha\varepsilon}\left(\left(\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}\right)^{\alpha} - 1\right) \tag{10}$$

и для нее $g'(z) = [(1-\varepsilon z)^{1+\alpha}(1+\varepsilon z)^{1-\alpha}]^{-1}$. Поэтому, как и для $K(\gamma)$, функции $f(z)$ класса $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ обладают свойством достижимости извне области $f(E)$ углами раствора $(1-\gamma)\pi$.

В частных случаях, при $\lambda = 1$, когда $\alpha = 1$ или $\alpha = 0$, можно дать более точную геометрическую характеристику функций $f(z) \in C_\delta(1, \alpha, \gamma)$.

Рассмотрим сложную функцию $\Phi(w) = f[g^{-1}(w)]$, где функция $w = g(z)$ определена по формуле (10). Функция $\Phi(w)$ является голоморфной в области $D = g(E)$. В силу (8)

$$|\arg \Phi'(w)| \le \gamma\,\pi/2,\quad w \in D. \tag{11}$$

Если $\alpha = 1$, то D есть полуплоскость $\{w\colon Re(e^{i\delta}w) > 0\}$. В силу (11) и геометрического смысла аргумента производной касательная к кривой $f(e^{i\theta}), 0 \le \theta \le 2\pi$ в любой граничной точке области $f(E)$ может отклоняться от прямой $Re(e^{i\delta}w) = 0$ на угол, не превосходящий $\gamma\pi/2$. Поэтому для каждой граничной точки области $f(E) = \Phi(D)$ можно построить угол раствора $(1-\gamma)\pi$ с вершиной в этой точке и биссектрисой, перпендикулярной прямой $Re(e^{i\delta}w) = 0$, целиком лежащий в области $f(E)$ или в ее внешности.

При $\alpha \to 0$ функция (10) преобразуется в функцию $g(z) = \frac{1}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}$ и область D есть полоса $\{w\colon |Imw| < \pi/4\}$. Поэтому из условия (11) следует, что область $f(E) = \Phi(D)$ достижима извне углами раствора $(1-\gamma)\pi$ с биссектрисами, перпендикулярными прямой $Im(e^{i\delta}w) = 0$. При $\delta = 0$ этот случай исследован в статье [6].

4. Теоремы искажения в классе $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ и его подклассах.

Теорема 1. *Пусть* $f(z) \in C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$. *Тогда при* $|z| = r, 0 < r < 1,$ *справедливы оценки*

$$|f'(z)| \le \left(\frac{1+\lambda r}{1-\lambda r}\right)^{\alpha} \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma} \frac{1}{1-\lambda^2 r^2}, \tag{12}$$

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2(\alpha+\varepsilon z)\varepsilon z}{1-\varepsilon^2 z^2} \right| \le \frac{2\gamma r}{1-r^2}, \varepsilon = \lambda e^{-i\delta}. \tag{13}$$

Оценки точные и достигаются в точке для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+e^{-i\delta}t}{1-e^{-i\delta}t}\right)^{\gamma} \left(\frac{1+\varepsilon t}{1-\varepsilon t}\right)^{\alpha} \frac{dt}{1-\varepsilon^2 t^2}. \tag{14}$$

Доказательство. Обозначив

$$h(z) = (1-\varepsilon z)^{1+\alpha}(1+\varepsilon z)^{1-\alpha} = \left(\frac{1-\varepsilon z}{1+\varepsilon z}\right)^{\alpha}(1-\varepsilon^2 z^2), \qquad \varphi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\gamma},$$

условие (8) перепишем в виде подчиненности функций $\varphi(z) = h(z)\,f'(z) \prec \varphi_0(z)$. Отсюда

$$|h(z)f'(z)| \le \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma}.$$

Поскольку

$$|h(z)| \ge (1-\lambda^2 r^2)\left(\frac{1-\lambda r}{1+\lambda r}\right)^{\alpha},$$

то

$$(1-\lambda^2 r^2)\left(\frac{1-\lambda r}{1+\lambda r}\right)^{\alpha} |f'(z)| \le |h(z)f'(z)| \le \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma},$$

откуда вытекает оценка (12).

Для доказательства оценки (13) обозначим $\Phi(z) = (1+\alpha)\ln(1-\varepsilon z) + (1-\alpha)\ln(1+\varepsilon z) + \ln f'(z)$. Тогда $\Phi(z) \prec \Phi_0(z)$, откуда $\Phi(z) = \Phi_0(\omega(z)) = \gamma \ln\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}$, где $w(z)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца. Поэтому $\Phi'(z) = \frac{2\gamma\omega'(z)}{1-\omega^2(z)}$ и с учетом неравенства [13; с.323]

$$|\omega'(z)| \le \frac{1-|\omega(z)|^2}{1-|z|^2}$$

окончательно находим

$$|z\Phi'(z)| = \left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{(1+\alpha)\varepsilon z}{1-\varepsilon z} + \frac{(1-\alpha)\varepsilon z}{1+\varepsilon z} \right| \le \frac{2\gamma r|\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2} \le \frac{2\gamma r}{1-r^2},$$

что после преобразований дает оценку (13).

Докажем точность оценок (12)-(13). Для функции z из (13) имеем

$$(1-\varepsilon z)^{1+\alpha}(1+\varepsilon z)^{1-\alpha} f_0'(z) = \left(\frac{1+e^{-i\delta}z}{1-e^{-i\delta}z}\right)^{\gamma}.$$

Поэтому $f_0(z)$ удовлетворяет условию (8) и, следовательно, $f_0(z) \in C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$. Поскольку

$$f_0'(z) = \left(\frac{1+e^{-i\delta}z}{1-e^{-i\delta}z}\right)^{\gamma}\left(\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}\right)^{\alpha}\frac{1}{1-\varepsilon^2 z^2}, \quad z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} - \frac{2(\alpha+\varepsilon z)\varepsilon z}{1-\varepsilon^2 z^2} = \frac{2\gamma e^{-i\delta}z}{1-(e^{-i\delta}z)^2},$$

то в точке получаем

$$f_0'(z) = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma}\left(\frac{1+\lambda r}{1-\lambda r}\right)^{\alpha}\frac{1}{1-\lambda^2 r^2}, \quad z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} - \frac{2(\alpha+\varepsilon z)\varepsilon z}{1-\varepsilon^2 z^2} = \frac{2\gamma r}{1-r^2}.$$

Следовательно, оценки (12)-(13) улучшить нельзя. Теорема доказана.

При $\lambda = 1$ из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. *Пусть* $f(z) \in C_\delta(1, \alpha, \gamma)$, *то есть* $f(z)$ *удовлетворяет условию*

$$|\arg\,[(1-e^{-i\delta}z)^{1+\alpha}(1+e^{-i\delta}z)^{1-\alpha} f'(z)]| \le \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in E.$$

Тогда при $|z| = r < 1$ *выполняются точные оценки*

$$|f'(z)| \le \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma+\alpha}\frac{1}{1-r^2}, \tag{15}$$

$$|f(z)| \le \frac{1}{2(\gamma+\alpha)}\left(\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma+\alpha} - 1\right), \tag{16}$$

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2(\alpha+e^{-i\delta}z)e^{-i\delta}z}{1-e^{-2i\delta}z^2}\right| \le \frac{2\gamma r}{1-r^2}, \tag{17}$$

которые достигаются в точке $z = e^{i\delta}$ *для функции*

$$f_0(z) = \frac{e^{i\delta}}{2(\gamma+\alpha)}\left(\left(\frac{1+e^{-i\delta}z}{1-e^{-i\delta}z}\right)^{\gamma+\alpha} - 1\right).$$

Оценки (15), (17) сразу вытекают из оценок (12)-(13) при $\lambda = 1$, а оценка (16) вытекает из (15) интегрированием по отрезку от 0 до r с учетом того, то

$$\frac{1}{2(\gamma+\alpha)}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma+\alpha} - 1\right]' = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma+\alpha}\frac{1}{1-r^2}.$$

При $\lambda = 1$, $\alpha = \delta = 0$ получаем класс $C_1(\gamma) = C_0(1, 0, \gamma)$ функций, выпуклых порядка γ в направлении мнимой оси. В этом случае из следствия 1 вытекают оценки из [10]:

$$|f(z)| \le \frac{1}{2\gamma}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma} - 1\right], \ |f'(z)| \le \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma}\frac{1}{1-r^2}, \ \left|z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2z^2}{1-z^2}\right| \le \frac{2\gamma r}{1-r^2}. \quad (18)$$

Для класса $C_2(\gamma) = C_0(1, 1, \gamma)$ функций $f(z)$, выпуклых порядка γ в положительном направлении действительной оси, из следствия 1 получаем следующие оценки

$$|f(z)| \le \frac{1}{2(\gamma+1)}\left(\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma+1} - 1\right), |f'(z)| \le \frac{(1+r)^{\gamma}}{(1-r)^{\gamma+2}}, \left|z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2z}{1-z}\right| \le \frac{2\gamma r}{1-r^2}. \quad (19)$$

При $\gamma = 1$ из оценок (18)-(19) вытекают оценки в классах C_1, C_2. Аналогично, полагая $\delta = \pm\pi/2$ или $\delta = \pm\pi$, можно получить оценки в классах $\hat{C}_1, \hat{C}_2$, , а при $\lambda = 0$ – оценки в классе функций с ограниченным вращением, удовлетворяющих условию $|\arg f'(z)| \le \gamma\,\pi/2$.

5. Теоремы искажения в классе $T_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ и его подклассах.

Используя соотношение

$$f(z) \in C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma) \quad \Leftrightarrow \quad F(z) = zf'(z) \in T_\delta(\lambda, \alpha, \gamma), \quad (20)$$

оценки из теоремы 1 можно перенести на класс $T_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ и его подклассы почти звездообразных функций [9-11] и типично вещественных функций [12, 14-15].

Теорема 2. *Для $F(z) \in T_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ при $|z| = r < 1$ справедливы точные оценки*

$$|F(z)| \le \left(\frac{1+\lambda r}{1-\lambda r}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma}\frac{r}{1-\lambda^2 r^2}, \quad (21)$$

$$\left|z\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1+2\alpha\varepsilon z+\varepsilon^2 z^2}{1-\varepsilon^2 z^2}\right| \le \frac{2\gamma r}{1-r^2}, \varepsilon = \lambda e^{-i\delta}, \quad (22)$$

знак равенства в которых достигается в точке $z = e^{i\delta}r$ для функции

$$F_0(z) = e^{i\delta}\left[\left(\frac{1+e^{-i\delta}z}{1-e^{-i\delta}z}\right)^{\gamma}\cdot\left(\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}\right)^{\alpha}\frac{e^{-i\delta}z}{1-\varepsilon^2 z^2}\right] \quad (23)$$

При из теоремы 2 вытекает следующее

Следствие 2. *Пусть $F(z) \in T_\delta(1, \alpha, \gamma)$.Тогда при $|z| = r < 1$ справедливы точные оценки*

$$|F(z)| \le \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma+\alpha}\frac{r}{1-r^2}, \quad (24)$$

$$\left|z\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1+2\alpha e^{-i\delta}z+e^{-2i\delta}z^2}{1-e^{-2i\delta}z^2}\right| \le \frac{2\gamma r}{1-r^2}. \quad (25)$$

$$\left|z\frac{F'(z)}{F(z)}\right| \le \frac{1+2(\gamma+\alpha)r+r^2}{1-r^2}, \quad (26)$$

$$|F'(z)| \le \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma+\alpha}\frac{1+2(\gamma+\alpha)r+r^2}{(1-r^2)^2}. \quad (27)$$

Действительно, учитывая, что в силу (22)

$$\left|z\frac{F'(z)}{F(z)}\right| \leq \frac{2\gamma r}{1-r^2} + \left|\frac{1+2\alpha e^{-i\delta}z + e^{-2i\delta}z^2}{1-e^{-2i\delta}z^2}\right|,$$

получаем оценку (26). Оценка (27) вытекает из оценки (26) с учетом неравенства

$$\left|\frac{z}{F(z)}\right| \geq \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\gamma+\alpha}(1-r^2),$$

вытекающего из (24). Экстремальная функция имеет вид

$$F_0(z) = e^{i\delta}\left(\frac{1+e^{-i\delta}z}{1-e^{-i\delta}z}\right)^{\gamma+\alpha} \cdot \frac{e^{-i\delta}z}{1-e^{-2i\delta}z^2}.$$

При $\alpha = \delta = 0$, $\gamma = 1$ из теоремы 2 вытекают следующие точные оценки

$$|F(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, |F'(z| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \tag{28}$$

$$\left|z\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1+z^2}{1-z^2}\right| \leq \frac{2r}{1-r^2}, \quad \left|z\frac{F'(z)}{F(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}, \tag{29}$$

которые получены другим способом соответственно в [14] и в [15].

6. Радиусы выпуклости и звездообразности

Теорема 3. *Пусть* $f(z) \in C_\delta(\lambda,\alpha,\gamma)$. *Тогда* $f(z)$ *является выпуклой в круге* $|z| \leq r^0$, *где* r^0 *– наименьший положительный корень уравнения*

$$\frac{2\gamma r}{1-r^2} + \frac{2(\lambda r)^2}{1+(\lambda r)^2} + \frac{2\alpha\lambda r}{1-(\lambda r)^2} = 1. \tag{30}$$

Доказательство. В силу оценки (13) в круге $|z| \leq r$ имеем

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2(\varepsilon z)^2}{1-(\varepsilon z)^2} - \frac{2\alpha\varepsilon z}{1-(\varepsilon z)^2}\right| \leq \frac{2\gamma r}{1-r^2},$$

откуда

$$Re\, z\frac{f''(z)}{f'(z)} \geq -\frac{2\gamma r}{1-r^2} + \min_{|z|\leq r} Re\frac{2(\varepsilon z)^2}{1-(\varepsilon z)^2} + \min_{|z|\leq r} Re\frac{2\alpha\varepsilon z}{1-(\varepsilon z)^2}. \tag{31}$$

Поэтому, учитывая, что

$$\min_{|z|\leq r} Re\frac{2(\varepsilon z)^2}{1-(\varepsilon z)^2} = \min_{|\zeta|\leq(\lambda r)^2} Re\frac{2\zeta}{1-\zeta} = -\frac{2(\lambda r)^2}{1+(\lambda r)^2}$$

и

$$\min_{|z|\leq r} Re\frac{2\alpha(\varepsilon z)}{1-(\varepsilon z)^2} = \min_{|\zeta|\leq\lambda r} Re\frac{2\alpha\zeta}{1-\zeta^2} = -\frac{2\alpha\lambda r}{1-(\lambda r)^2},$$

получаем

$$Re\, z\frac{f''(z)}{f'(z)} \geq -\frac{2\gamma r}{1-r^2}-\frac{2(\lambda r)^2}{1+(\lambda r)^2}-\frac{2\alpha\lambda r}{1-(\lambda r)^2}.$$

Поэтому в круге $|z| \leq r^0$, где r^0 – наименьший положительный корень уравнения (30), выполняется условие выпуклости $Re\, z\frac{f''(z)}{f'(z)} \geq -1$, что и доказывает теорему 3.

При $\lambda = 1, \alpha = \delta = 0$ из теоремы 3 получается результат [6] о точном радиусе выпуклости класса $C_1(\gamma) = C_0(1, 0, \gamma)$ функций, выпуклых порядка γ в направлении мнимой оси, как наименьший положительный корень уравнения $r^4-2\gamma r^3-2r^2-2\gamma r+1=0$, а при $\gamma = 1$ – полученный в [2] точный радиус выпуклости класса $C_1 = C_0(1, 0, 1)$

$$r^0=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1-\sqrt{2\left(\sqrt{5}+1\right)}\right). \tag{32}$$

При $\lambda = \delta = 0$ получаем точный радиус выпуклости $r_0=\sqrt{\gamma^2+1}-1$ класса $C_0(0,\alpha,\gamma)=\{f(z): |arg f'(z)| \leq \gamma\frac{\pi}{2}, z\epsilon E\}$, который получен в [17] (следствие 1, случай $n = 1$), и при $\lambda = 1$ получаем известный результат о точном радиусе выпуклости $r_0=\sqrt{2}-1$ класса функций с ограниченным вращением.

Используя хорошо известную связь выпуклых и звездообразных функций $f(z) \in S^0 \Leftrightarrow F(z)=zf'(z) \in S^*$, а также соотношение (20), из теоремы 3 получаем

Следствие 3. *Пусть* $F(z) \in T_\delta(\lambda,\alpha,\gamma)$. *Тогда функция* $F(z)$ *является звездообразной в круге* $|z| \leq r^*$, *где* r^* *– наименьший положительный корень уравнения* (30).

При $\alpha = \delta = 0, \gamma = 1$ следствие 3 дает точный радиус звездообразности [15,17] класса типично вещественных функций, определяемый по формуле (32).

Примечание. Если вместо условия звездообразности использовать условие звездообразности порядка β, $0 \leq \beta < 1$, что приведет к замене правой части уравнения (30) на $1 - \beta$, то получим радиус звездообразности порядка β класса $T_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$, обобщающий радиусы звездообразности порядка β класса $\mathcal{K}_3$ из [9] и класса $\mathcal{F}_4$ из [11].

7. Заключение. В работе вводится подкласс $C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$ класса $K(\gamma)$ функций $f(z)$, однолистных и почти выпуклых порядка γ. При определенных значениях параметров получаются известные классы функций – выпуклых в направлении мнимой оси, выпуклых в положительном направлении действительной оси и функций с ограниченным вращением. В работе исследованы геометрические свойства отображений, осуществляемых функциями $f(z) \in C_\delta(\lambda, \alpha, \gamma)$, найдены теоремы искажения и радиусы выпуклости. Кроме того, аналогичные результаты получены в классе функций, обобщающем классы типично вещественных и почти звездообразных функций. В качестве следствий получены ранее известные, в том числе и классические, результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1 Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // УМН – 1975. – Т. 30, вып. 4(184). – С.3-60. https://doi.org/10.1070/RM1975v030n04ABEH001511

2 Hengartner W., Schober G. Analytic functions close to mappings convex in one direction // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971.– V. 28, №2 – P. 519-524.

3 Bshouty D., Lyzzaik A. Univalent functions starlike with respect to a boundary point // Contemp. Math. – 2005.– V. 382 – P. 83-87.

4 Reade M. The coefficients of close-to-convex functious // Duke Math. J. – 1956.– V. 23, № 3 – P. 459-462. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0

5 Renyi A. Some remarks on univalent functions // An. Univ. Maria Curie-Sklodowska. Sec. – 1959. – A.3 – P. 111-121. http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf

6 Майер Ф.Ф. Геометрические свойства некоторых классов функций, аналитических в круге // Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского, т.14. Геометрическая теория функций, краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2002, С.208-212.

7 Lecko A. The class of functions convex in the negative direction of the imaginary axis of order (α,β) // J. of the Austral. Math. Soc. – 2002.– V. 29, № 11 – P.641–650. https://dx.doi.org/10.1155/S0161171202007810

8 Reade M. On close-to-close univalent functions // Michigan Math. J. – 1955. – V. 3. – P. 59-62. doi: 10.1307/mmj/1031710535

9 Khatter K., Lee S. K., Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions //arXiv preprint arXiv:2006.11744. – 2020.doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744

10 El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. Starlikeness of certain analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11734, 2020 arxiv.org. doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734

11 Sebastianc A., Ravichandran V. Radius of starlikeness of certain analytic functions // Math. Slovaca 71 (2021), No. 1, 83–104. doi: 10.1515/ms-2017-0454

12 Rogosinski W. Über positive harmonischeentwicklungen und typisch-reellepotenzreihen // Math. Zeitschr. – 1932. – V. 35, № 1 – P. 93-121.doi: https://doi.org/10.1007/BF01186552

13 Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного // М: Наука, 1966. – 628 с.

14 Голузин Г.М. О типично вещественных функциях // Матем. сб. – 1950. – вып. 27, № 69 – С.201-218.

15 Гельфер С.А. Типично вещественные функции // Матем. сб. – 1964. – т. 106, № 2 – С.171-184.

16 Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Козловский С.А. Точные оценки и радиусы выпуклости некоторых классов аналитических функций // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». Челябинск – 2022. – т. 14, №1 – С. 42-49. doi: https://doi.org/10.14529/mmph220105

17 Libera R.J. Some radius of convexity problems // Duke Math. J. – 1964. – V.31, №1 – P.143-158.

REFERENCES

1 Avkhadiev, F.G., Aksent'ev, L.A. (1975).“Osnovnyerezul'taty v dostatochnyhuslovijahodnolist nostianaliticheskihfunkcij” [The Main Results on Sufficient Conditions for an Analytic Function to be Schlicht]. UMN, 30(4), 3-60. (In Russian) https://doi.org/10.1070/RM1975v030n04ABEH001511

2 Hengartner, W., Schober, G.(1971).“Analytic functions close to mappings convex in one direction”. Proc. Amer. Math. Soc., 28(2), 519-524.

3 Bshouty, D., Lyzzaik.A. (2005). “Univalent functions starlike with respect to a boundary point.” Contemp. Math., 382, 83-87.

4 Reade, M. (1956). “The coefficients of close-to-convex functions”. Duke Math. J., 23(3), 459-462. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0

5 Renyi, A. (1959). “Some remarks on univalent functions”. An. Univ. Maria Curie-Sklodowska. Sec.A.3, 111-121. http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf

6 Maiyer, F.F. (2002) “Geometricheskiesvojstvanekotoryhklassovfunkcij, analiticheskih v kruge” [Geometric properties of some classes of functions analytic in a disk].Trudy matematicheskogocen traimeniN.I.Lobachevskogo, t.14.Geometricheskajateorijafunkcij, kraevyezadachi i ihprilozhenija. Kazan’: Izdatel’stvoKazanskogomatematicheskogoobshhestva, S.208-212. (In Russian)

7 Lecko, A. (2002). “The class of functions convex in the negative direction of the imaginary axis of order (α,β)”. J. of the Australian Math. Soc., 29(11), 641-650.doi: https://dx.doi.org/10.1155/S0161171202007810

8 Reade, M. (1955).“On close-to-close univalent functions”.Michigan Math. J., 3, 59-62. doi: 10.1307/mmj/1031710535

9 Khatter, K., Lee, S. K., Ravichandran, V. (2020).“Radius of starlikeness for classes of analytic functions”.arXiv preprint arXiv:2006.11744. doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744

10 El-Faqeer, A.S.A., Mohd, M.H., Ravichandran, V., Supramaniam, S. (2020).“Starlikeness of certain analytic functions”.arXiv preprint arXiv:2006.11734, arxiv.org. doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734

11 Sebastianc, A., Ravichandran, V. (2021).“Radius of starlikeness of certain analytic functions”. Math.Slovaca,71 No.1, 83–104. doi: 10.1515/ms-2017-0454

12 Rogosinski, W. (1932).“Über Positive HarmonischeEntwicklungen und typisch-reellePotenzreihen”.Math.Zeitschr., 35(1), 93-121. doi: https://doi.org/10.1007/BF01186552

13 Goluzin, G.M. (1966). “Geometricheskayateoriyafunktsiykompleksnogoperemennogo” [Geometric theory of functions of a complex variable].Moscow, Nauka Publ., 628 p.

14 Goluzin, G.M. (1950).“O tipichnoveshhestvennyhfunkcijah” [On typically real functions]. Mat. Sb. (N.S.), 27(69), №2, pp. 201-218. (In Russian)

15 Gel’fer, S.A. (1964). “Typically real functions”.Sbornik: Mathematics, 64(106), No.2, 171-184. (in Russian)

16 Maiyer, F.F., Tastanov, M.G., Utemisova, A.A., Kozlovskij, S.A. (2022) “Tochnyeocenki i radiusyvypuklostinekotoryhklassovanaliticheskihfunkcij” [Exact estimates and radii of convexity of some classes of analytic functions].Zhurnal «VestnikJuUrGU», serija «Matematika. Mehanika. Fizika»,Cheljabinsk, 14(1), 42-49. (In Russian) doi: https://doi.org/10.14529/mmph220105

17 Libera, R.J. (1964). “Some radius of convexity problems”.Duke Math. J., 31(1), 143-158.