УДК 519.63
https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.67

*Н. Б. АЛИМБЕКОВА, А. К. БАКИШЕВ**

Восточно-Казахстанский университет им. С. Аманжолова,
Усть-Каменогорск, Казахстан.
**E-mail: b.aibek86@mail.ru*

ОБЗОР АППРОКСИМАЦИОННЫХ ФОРМУЛ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА

Алимбекова Нурлана Бауржановна – PhD, член правления – проректор по академическим вопросам, Восточно-Казахстанский университет им. С.Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан;

E-mail: nalimbekova@vku.edu.kz; https://orcid.org/0000-0002-1078-0480;

Бакишев Айбек Калибекович – докторант по образовательной программе 8D05401-Математика, Восточно-Казахстанский университет им. С.Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан.

E-mail: b.aibek86@mail.ru; https://orcid.org/0009-0004-7847-1926.

Дробно-дифференциальные уравнения переменного порядка, зависящих от временного или пространственного переменного, успешно применяются для исследования временной и/или пространственной динамики. Целью данного обзора является рассмотрение последних исследований и результатов, связанных с основными определениями и аппроксимационными формулами дробных производных переменного порядка. Обзор начинается с изучения существующих определений, основанных на различных физических и практических знаниях. Далее приведены формулы дискретизации дробных производных, так как они играют ключевую роль в численном моделировании, обеспечивая эффективные средства описания сложных систем с долговременной памятью, гетерогенными параметрами и нелокальными взаимодействиями. Их применение не только улучшает точность моделей, но и облегчает численное решение дифференциальных уравнений, что существенно для анализа и прогнозирования поведения реальных процессов в различных областях науки и инженерии. Этот обзор призван помочь читателям выбрать подходящие определения и формул дискретизации для эффективного решения конкретных физических и инженерных задач.

Ключевые слова: *дробная производная переменного порядка, аппроксимационная формула, дискретизация, дробная производная в смысле Капуто, дробная производная в смысле Римана-Лиувилля, среда с памятью.*

*Н. Б. АЛИМБЕКОВА[1], А. К. БАКИШЕВ**

С.Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен, Қазақстан.
**E-mail: b.aibek86@mail.ru*

АЙНЫМАЛЫ РЕТТІ БӨЛШЕК ТУЫНДЫЛАРДЫҢ ЖУЫҚТАУ ФОРМУЛАЛАРЫНА ШОЛУ

Алимбекова Нурлана Бауржановна – PhD, кеңес мүшесі – оқу ісі жөніндегі проректор, С.Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен, Қазақстан;

E-mail: nalimbekova@vku.edu.kz; https://orcid.org/0000-0002-1078-0480;

Бакишев Айбек Калибекович – 8D05401-Математика білім беру бағдарламасы бойынша докторант, С.Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен, Қазақстан.

E-mail: b.aibek86@mail.ru; https://orcid.org/0009-0004-7847-1926.

Уақыттық немесе кеңістіктік айнымалыға тәуелді айнымалы ретті бөлшек дифференциалдық теңдеулер уақыт және/немесе кеңістіктік динамиканы зерттеу үшін сәтті қолданылады. Бұл шолудың мақсаты айнымалы ретті бөлшек туындылардың негізгі анықтамалары мен жуықтау формулаларына қатысты соңғы зерттеулер мен нәтижелерді қарастыру болып табылады. Шолу әртүрлі физикалық және практикалық білімге негізделген барлық анықтамаларды зерттеуден басталады. Әрі қарай ұзақ мерзімді жады, гетерогенді параметрлері және локальды емес өзара әрекеттесуі бар күрделі жүйелерді сипаттаудың тиімді құралдарын қамтамасыз ете отырып, сандық модельдеуде шешуші рөл атқаратын бөлшек туындыларды дискреттеу формулалары келтірілген. Оларды қолдану модельдердің дәлдігін жақсартып қана қоймайды, сонымен қатар дифференциалдық теңдеулердің сандық шешімін жеңілдетеді, бұл ғылым мен инженерияның әртүрлі салаларындағы нақты үрдістердің беталысын талдау және болжау үшін маңызды. Бұл шолу оқырмандарға нақты физикалық және инженерлік мәселелерді тиімді шешу үшін сәйкес анықтамалар мен дискреттеу формулаларын таңдауға көмектесуге бағытталған.

Түйін сөздер: *айнымалы ретті бөлшек туынды, жуықтау формуласы, дискретизация, Капуто мағынасындағы бөлшек туынды, Риман-Лиувилл мағынасындағы бөлшек туынды, жады бар орта.*

N. B. ALIMBEKOVA, A. K. BAKISHEV*

S.Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan.
**E-mail: b.aibek86@mail.ru*

REVIEW OF APPROXIMATION FORMULAS FOR FRACTIONAL DERIVATIVES OF VARIABLE ORDER

Alimbekova Nurlana Baurzhanovna – PhD, Member of the Board – Vice-Rector for Academic Affairs, S.Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan;

E-mail: nalimbekova@vku.edu.kz; https://orcid.org/0000-0002-1078-0480;

Bakishev Aibek Kalibekovich – doctoral student of the educational program 8D05401-Mathematics, S.Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan.

E-mail: b.aibek86@mail.ru; https://orcid.org/0009-0004-7847-1926.

Fractional differential equations of variable order, depending on a time or space variable, are successfully used to study time and/or spatial dynamics. The purpose of this review is to consider the latest research and results related to the basic definitions and approximation formulas for fractional derivatives of variable order. The review begins with an examination of existing definitions based on various physical and practical knowledge. The following are formulas for discretizing fractional derivatives, since they play a key role in numerical modeling, providing an effective means of describing complex systems with long-term memory, heterogeneous parameters and non-local interactions. Their use not only improves the accuracy of models, but also facilitates the numerical solution of differential equations, which is essential *for analyzing and predicting the behavior of real processes in various fields of science and engineering. This review is intended to help readers select appropriate definitions and discretization formulas to effectively solve specific physical and engineering problems.*

Keywords: *fractional derivative of variable order, approximation formula, discretization, fractional derivative in the sense of Caputo, fractional derivative in the sense of Riemann-Liouville, medium with memory*

Введение. Исчисление с дробными порядками, включающее дифференцирование и интегрирование, имеет свою историю, превышающую трехсотлетний период. По сравнению с исчислением целочисленного порядка дробный оператор позволяет более точно описывать многие явления реального мира. Обзор аппроксимационных формул дробных производных переменного порядка представляет значительное значение, предоставляя обширное описание методов аппроксимации, которые играют важную роль в численном моделировании разнообразных физических и инженерных явлений. Важность этой работы заключается в том, что дробные производные переменного порядка часто встречаются в реальных задачах и требуют точных и эффективных методов аппроксимации для решения дифференциальных уравнений, описывающих сложные системы.

Актуальность темы обусловлена растущим интересом к использованию дробных производных в различных областях, таких как физика, биология, финансы и технические науки, где эти производные предоставляют более точные средства моделирования. Этот обзор позволяет лучше понять существующие методы аппроксимации, сравнить их эффективность и выбрать наиболее подходящие для конкретных приложений, обеспечивая таким образом более точные и адаптивные численные решения. В свете быстрого развития технологий и растущего спроса на точные математические модели работа по обзору аппроксимационных формул дробных производных переменного порядка остается актуальной и перспективной для научного и инженерного сообщества.

Фактически дробное исчисление признано перспективным математическим инструментом для эффективного анализа исторической памяти и глобальной взаимосвязи сложных динамических структур, явлений или систем. Однако в различной литературе подчеркивается, что характеристики памяти и/или нелокальности структуры могут изменяться во времени, пространстве или в зависимости от других условий [1, 2].

Для точной характеристики сложных физических систем и процессов дробное исчисление переменного порядка использовалось в качестве потенциального кандидата для обеспечения эффективной математической основы. В дальнейшем дробные дифференциальные уравнения переменного порядка привлекали все большее внимания во многих облаcях науки и техники [3-6].

Обширные исследования посвящены физическому моделированию с использованием моделей дробно-дифференциального уравнения переменного порядка. Например, Кобелев и др.[7] продемонстрировали проблемы с переменной памятью, относящиеся к статистическим и динамическим системам, где фрактальная размерность меняется со временем и координатой. Коимбра и др. [5] исследовали осциллятор вязкоупругости с помощью дробных операторов переменного порядка. Свейлам и Аль-Мехлафи [8] представили новую модель туберкулеза с несколькими штаммами, используя дробную производную переменного порядка как расширение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Также исследованы возможности применения моделей дробно-дифференциального уравнения переменного порядка для характеристики переходной диффузии.

Важно отметить, что разработка аналитического решения для дробно-дифференциальных уравнений переменного порядка все еще находится на начальном этапе из-за сложности определений дробных операторов переменного порядка. Поэтому для изучения моделей таких уравнений было предложено множество разнообразных численных методов [9, 10]. В частности, все больше и больше математических физических уравнений решаются с использованием эффективных в вычислительном отношении численных методов [11, 12].

Методы и материалы. Данная работа включает в себя обширный обзор литературных источников, в том числе научных статей и публикаций, для выявления существующих определении и различных методов аппроксимации, используемых при переменном порядке дробных производных. Далее проведен детальный анализ этих методов с учетом их преимуществ, ограничений и областей применения. Проведена сравнительная оценка эффективности различных методов аппроксимации, что позволяет выделить наиболее эффективные и перспективные подходы для дальнейших исследований.

В дробном исчислении известны несколько определений дробной производной и дробного интеграла. При разработке математических моделей используются производные дробного порядка в смысле Капуто, Римана-Лиувилля, Капуто-Фабрицио, Атангана-Балеану и другие. В дробно-дифференциальных задачах переменного порядка часто используются дробные производные пременного порядка в смысле Капуто и Римана-Лиувилля. Приведем основные определения дробного исчисления переменного порядка.

Дробные производные переменного порядка в смысле Римана-Лиувилля с левой и правой стороны записываются следующим образом [13]:

$$ {}_a^{RL}D_t^{\alpha(t)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha(t))} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\xi)^{n-\alpha(t)-1} f(\xi)\,d\xi,\ n-1<\alpha(t)<n, $$

и

$$ {}_t^{RL}D_b^{\alpha(t)} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha(t))} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\xi-t)^{n-\alpha(t)-1} f(\xi)\,d\xi,\ n-1<\alpha(t)<n. $$

В практических приложениях часто используются дробная производная переменного порядка в смысле Капуто, определенная в виде [10]:

$$ {}_a^{C}D_t^{\alpha(t)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha(t))} \int_a^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)-n+1}}\,d\tau,\ n-1<\alpha(t)<n, $$

и

$$ {}_t^{C}D_b^{\alpha(t)} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha(t))} \int_t^b \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)-n+1}}\,d\tau,\ n-1<\alpha(t)<n. $$

Для численного моделирования и вычислений необходима дискретизация дробных производных переменного порядка, которая представляет дробных производных в виде конечно-разностных или других дискретных операторов. Было предложено несколько численных методов для дискретизации дробных производных переменного порядка, каждый со своими преимуществами и ограничениями. Общие подходы включают методы конечных разностей, дискретизацию Грюнвальда-Летникова и различные спектральные методы.

Были предложены различные методы аппроксимации дробных производных переменного порядка, предлагающие дискретное и выполнимое с вычислительной точки зрения представление. Рассмотрим несколько распространенных подходов дискретизации дробных производных переменного порядка.

В работе [14] дробная производная по времени переменного порядка типа Капуто при $0<\alpha(t)<1$ дискретизируется с первым порядком точности и представлена следующим образом:

$$\frac{\partial^{\alpha_i^{k+1}} u\left(x_i,t_{k+1}\right)}{\partial t^{\alpha_i^{k+1}}}=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\left(x_i,t_{k+1}\right)\right)}\int\limits_0^{(k+1)\tau}\frac{\frac{\partial u\left(x_i,\tau\right)}{\partial\tau}}{\left(t_{k+1}-\tau\right)^{\alpha\left(x_i,t_{k+1}\right)}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\left(x_i,t_{k+1}\right)\right)}\sum_{j=0}^{k}\frac{u\left(x_i,t_{j+1}\right)-u\left(x_i,t_j\right)}{\tau}\int\limits_{j\tau}^{(j+1)\tau}\frac{d\tau}{\left(t_{k+1}-\tau\right)^{\alpha\left(x_i,t_{k+1}\right)}}=$$

$$=\frac{\tau^{-\alpha_i^{k+1}}}{\Gamma\left(2-\alpha_i^{k+1}\right)}\left\{u\left(x_i,t_{k+1}\right)-u\left(x_i,t_k\right)+\sum_{j=1}^{k}\left[u\left(x_i,t_{k+1-j}\right)-u\left(x_i,t_{k-j}\right)\right]\left[\left(j+1\right)^{1-\alpha_i^{k+1}}-\left(j\right)^{1-\alpha_i^{k+1}}\right]\right\}.$$

Цао и Цю [15] представили следующее сдвинутое приближение Грюнвальда:

$$A_{\tau,p}^{\alpha(t)}y(t)=\frac{1}{\tau^{\alpha(t)}}\sum_{k=0}^{\infty}g_k^{\alpha(t)}y\left(t-(k-p)\tau\right).$$

Тогда дробная производная переменного порядка в смысле Римана-Лиувилля выглядит следующим образом:

$$D_{\tau,p,q}^{\alpha(t)}y(t)=\frac{\alpha(t)-2q}{2(p-q)}A_{\tau,p}^{\alpha(t)}y(t)+\frac{2p-\alpha(t)}{2(p-q)}A_{\tau,q}^{\alpha(t)}y(t),$$

где $0<\alpha(t)<1$, p и q – целые числа и $p\neq q$.

В работе строго доказано, что схема устойчива и сходится со вторым порядком точности. Представлены некоторые численные примеры для демонстрации теоретического анализа и проверки эффективности предложенного метода.

В работе [16] была рассмотрена задача дробной диффузии по времени переменного порядка. Дискретизация данного уравнения представлена со вторым порядком точности и выглядит следующим образом:

$$ {}_0^C D_t^{\beta(t)} f(t) = \frac{k^{-\beta_i^{j+1}}}{\Gamma\left(2-\beta_i^{j+1}\right)} \left[\left(\phi_i^{j+1} - \phi_i^j\right) + \sum_{n=1}^{j} \left(\phi_n^{j+1-n} - \phi_n^{j-n}\right) b_n^{i,j+1} \right] $$

В работе представлена новая неявно конечно-разностная схема для решения дробно-временных линейных и полулинейных дифференциальных уравнений в частных производных переменного порядка. С помощью метода Фурье была показана безусловная устойчивость выбранной схемы. Для демонстрации эффективности предложенного метода авторы приводят серию числовых примеров и графически отображают результаты с помощью программы MATLAB.

В работе [17] были построены две численные схемы для дробных производных Капуто переменного порядка. При $0 < \alpha(t) < 1$, $\sigma(t) = 1 - \frac{\alpha(t)}{2}$ дискретизационная формула второго порядка представлена следующим образом:

$$ {}_0\Delta_t^{\alpha_{n-1+\sigma}} f^{n-1+\sigma} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_{n-1+\sigma}\right)} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\left(L_k^2 f(s)\right)'}{\left(t_{n-1+\sigma} - s\right)} ds + \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1+\sigma}} \frac{\left(L_k^1 f(s)\right)'}{\left(t_{n-1+\sigma} - s\right)} ds \right] = $$

$$ = \frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)} \sum_{k=1}^{n} d_{n-k}^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} \left(f^k - p^{k-1}\right), $$

где

$$ a_0^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} = \sigma^{1-\alpha_{n-1+\sigma}}, \quad a_k^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} = \frac{1}{2}\left[(k+\sigma)^{1-\alpha_{n-1+\sigma}} - (k+\sigma-1)^{1-\alpha_{n-1+\sigma}} \right], \quad 1 \le k \le n-1, $$

$$ b_k^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} = \frac{1}{2-\alpha_{n-1+\sigma}} \left[(k+\sigma)^{2-\alpha_{n-1+\sigma}} - (k+\sigma-1)^{2-\alpha_{n-1+\sigma}} \right] - (k+\sigma)^{1-\alpha_{n-1+\sigma}}, \quad 1 \le k \le n-1. $$

$$ d_k^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} = \begin{cases} a_1^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} + a_0^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} + b_1^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)}, & k = 0, \\ a_{k+1}^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} + a_k^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} + b_{k+1}^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} - b_k^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)}, & 1 \le k \le n-2, \\ b_{k+1}^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} - b_k^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)}, & k = n-1. \end{cases} $$

Для $1 < \alpha(t) < 2$, $\sigma(t) = \frac{3}{2} - \frac{\alpha(t)}{2}$ приближенная формула $3 - \alpha(t)$ порядка и выглядит следующим образом:

$$ {}_0\Delta_t^{\alpha_{n-1+\sigma}} f^{n-1+\sigma} = \frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(3-\alpha_{n-1+\sigma}\right)} \left[\sum_{j=1}^{\mathrm{n}-2} a_{n-j}^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} \left(f^{j+2} - 2f^{j+1} + f^j\right) + \right. $$

$$ \left. + \sum_{j=1}^{\mathrm{n}-2} b_{n-j}^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} \left(f^{j+1} - 2f^j + f^{j-1}\right) + \frac{1}{2} b_n^{\left(\alpha_{n-1+\sigma}\right)} \left(8f^1 - f^2 - 7f^0 - 6\tau f_0'\right) + \right. $$

$$+\sigma^{2-\alpha_{n-1+\sigma}}\left(f^{n}-2f^{n-1}+f^{n-2}\right)\Big]$$

где

$$a_j^{(\alpha_{n-1+\sigma})}=\frac{1}{3-\alpha_{n-1+\sigma}}\left[(j+\sigma-1)^{3-\alpha_{n-1+\sigma}}-(j+\sigma-2)^{3-\alpha_{n-1+\sigma}}\right]-(j+\sigma-2)^{2-\alpha_{n-1+\sigma}},\ \ 1\le j\le n,$$

$$b_j^{(\alpha_{n-1+\sigma})}=(j+\sigma-1)^{2-\alpha_{n-1+\sigma}}-\frac{1}{3-\alpha_{n-1+\sigma}}\left[(j+\sigma-1)^{3-\alpha_{n-1+\sigma}}-(j+\sigma-2)^{3-\alpha_{n-1+\sigma}}\right],$$

$$2\le j\le n-1.$$

В работе были разработаны две аппроксимационные формулы дробных производных Капуто переменного порядка и проведен анализ ошибок усечения новых формул. Кроме того, приведены численные примеры, подтверждающие полученные теоретические результаты.

В следующей работе [10] выводятся две аппроксимационные формулы второго порядка для дробных производных по времени переменного порядка, участвующих в аномальной диффузии и распространении волн. При $\alpha(t)\in(0,1)$, аппроксимационная формула выглядит следующим образом:

$$\delta_t^{\alpha_{n+\frac{1}{2}}}f^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\tau}{\mu}\sum_{k=0}^{n}d_{n-k}^{\left(\alpha_{n+\frac{1}{2}}\right)}\delta_t f^{k+\frac{1}{2}},$$

где

$$\mu=\tau^{\alpha_{n+\frac{1}{2}}}\Gamma\left(2-\alpha_{n+\frac{1}{2}}\right),$$

$$d_0^{\left(\alpha_{n+\frac{1}{2}}\right)}=b_0^{\left(\alpha_{n+\frac{1}{2}}\right)}=\frac{1}{2-\alpha_{n+\frac{1}{2}}},$$

$$d_k^{\left(\alpha_{n+\frac{1}{2}}\right)}=a_{k-1}^{\left(\alpha_{n+\frac{1}{2}}\right)}+b_k^{\left(\alpha_{n+\frac{1}{2}}\right)}=\frac{1}{2-\alpha_{n+\frac{1}{2}}}\left[(k+1)^{2-\alpha_{n+\frac{1}{2}}}-2k^{2-\alpha_{n+\frac{1}{2}}}+(k-1)^{2-\alpha_{n+\frac{1}{2}}}\right],\ \ 1\le k\le n-1,$$

$$d_n^{\left(\alpha_{n+\frac{1}{2}}\right)}=a_{n-1}^{\left(\alpha_{n+\frac{1}{2}}\right)}+c_n^{\left(\alpha_{n+\frac{1}{2}}\right)}=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha_{n+\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2-\alpha_{n+\frac{1}{2}}}\left[n^{2-\alpha_{n+\frac{1}{2}}}-(n-1)^{2-\alpha_{n+\frac{1}{2}}}\right].$$

Формула второго порядка для $\alpha\pm(t)\in(1,2)$ представлена в следующем виде:

$$\delta_t^{\alpha_n} f^n = \frac{\tau^{-\alpha_n}}{\Gamma(3-\alpha_n)}\left[a_n^{(\alpha_n)}\left(8f^1 - f^2 - 7f^0 - 6\tau f_0^{'}\right) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j}^{(\alpha_n)}\left(f^{j-1} - 2f^j + f^{j+1}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n-1} b_{n-j}^{(\alpha_n)}\left(f^j - 2f^{j+1} + f^{j+2}\right)\right]$$

где

$$a_j^{(\alpha_n)} = \frac{1}{3-\alpha_n}\left(j^{3-\alpha_n} - (j-1)^{3-\alpha_n}\right) - (j-1)^{2-\alpha_n}\ 1 \le j \le n,$$

$$b_j^{(\alpha_n)} = j^{2-\alpha_n} - \frac{1}{3-\alpha_n}\left(j^{3-\alpha_n} - (j-1)^{3-\alpha_n}\right) 1 \le j \le n.$$

В данной работе авторами выводятся две аппроксимационные формулы второго порядка для дробных производных по времени переменного порядка, участвующих в аномальной диффузии и распространении волн. Затем представляются численные тесты, которые проверяют теоретические оценки скорости сходимости, а также моделирование аномальной субдиффузии и супердиффузии, которые демонстрируют новые скорости локализованной диффузии, которые зависят от кривизны функции переменного порядка.

В работе [18] рассматривается уравнение дробной по времени диффузии переменного порядка и дискретизация рассматриваемого в работе уравнения представлена следующим образом:

$$\partial_t^{\alpha_m(t_n)} u\,|_{t=t_n} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_m(t_n))}\int_0^{t_n} \frac{u'(\cdot,s)\,ds}{(t-s)^{\alpha_m(t_n)}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_m(t_n))}\sum_{k=1}^{n} D_{\Delta_t} u^k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{u'(\cdot,s)\,ds}{(t-s)^{\alpha_m(t_n)}} + R_m^n =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha_m(t_n))}\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}^m\left(u^k - u^{k-1}\right) + R_m^n =: D_{\Delta_t}^{\alpha_m(t_n)} u^n + R_m^n,$$

где коэффициенты $b_{n,k}^m$ $(1 \le m \le M)$ имеют вид:

$$b_{n,k}^m = \frac{(t_n - t_{k-1})^{1-\alpha_m(t_n)} - (t_n - t_k)^{1-\alpha_m(t_n)}}{\Delta t}, \quad 1 \le k \le n \le N.$$

В этой работе изучается корректность и регулярность решения многочленного уравнения дробной по времени диффузии переменного порядка, а затем разрабатывается оптимальная схема конечных элементов Галеркина и доказывается оптимальная скорость сходимости выбранной схемы. Кроме того, авторы разрабатывают эффективный параллельный во времени алгоритм для снижения вычислительных затрат на оценку многочленных дробных производных переменного порядка. Проводят численные эксперименты для проверки теоретических выводов и демонстрации эффективности предложенной схемы.

В таблице 1 представлен сравнительный анализ аппроксимационных формул для дробных производных переменного порядка.

Таблица 1 **–** Сравнительный анализ аппроксимационных формул

№	Авторы	Вид дробной производной переменного порядка	Порядок точности	Применение
1	Sun H. G., Chang A., Zhang Y., and Chen W. [14]	В смысле Капуто	При $0 < \alpha(t) < 1$, $O(\tau)$	Уравнение дробной диффузии переменного порядка по времени
2	Cao Jianxiong and Qiu Yanan [15]	В смысле Римана-Лиувилля	При $0 < \alpha(t) < 1$, $O(\tau^2)$	Дробные обыкновенные дифференциальные уравнения переменного порядка.
3	Abuasbeh K. Asia K. Ramsha S. Bilal T. Muna A. [16]	В смысле Капуто	При $0 < \alpha(t) < 1$, $O(\tau^2)$	Уравнения дробной диффузии переменного порядка по времени.
4	Du Ruilian and Liang Zongqi [17]	В смысле Капуто	При $0 < \alpha(t) < 1$, $O(\tau^2)$, при $0 < \alpha(t) < 3$, $O(\tau^{3-\alpha_{n-1+\sigma}})$,	Разработаны аппроксимационные формулы, однако полученные формулы не применены в конкретных задачах.
5	Zhao X., Zhong S.Z., Karniadakis G.Em [10]	В смысле Капуто	При $0 < \alpha(t) < 1$, $O(\tau^2)$, при $0 < \alpha(t) < 2$, $O(\tau^2)$,	Уравнение аномальной диффузии и распространении волн, а также моделирование аномальной субдиффузии и супердиффузии.
6	Liu Huan, Zheng Xiangcheng, and Fu Hongfei [18]	В смысле Капуто	При $0 < \alpha(t) < 1$, $O(\tau^2)$	Уравнения дробной диффузии переменного порядка

Заключение. Данный обзор аппроксимационных формул дробных производных переменного порядка подчеркивает важность разработки точных и эффективных методов аппроксимации для моделирования разнообразных физических процессов. Эта тема представляет собой актуальное исследование, в котором рассмотрены различные подходы к аппроксимации дробных производных, что имеет применение в многих областях науки и инженерии.

Обзор формул позволяет выявить преимущества и ограничения различных методов, предоставляя исследователям и инженерам ценные рекомендации при выборе подходящих приближенных формул для конкретных задач. Это исследование выделяет важность постоянного совершенствования аппроксимационных методов, поскольку требования к точности и эффективности численного моделирования продолжают расти. В целом, обзор аппроксимационных формул дробных производных переменного порядка представляет собой ценный вклад в развитие численных методов, способствуя повышению качества и точности моделирования сложных физических явлений.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, ИРН AP14972807, 2022-2024 годы.

ЛИТЕРАТУРА

1 Lorenzo Carl F. and Hartley Tom T. // Nonlinear Dynamics. – 2002. – Vol. 29, no. 1/4. – P. 57–98.

2 Sun H.G., Chen W., Wei H., and Chen Y.Q. A comparative study of constant-order and variable-order fractional models in characterizing memory property of systems // The European Physical Journal Special Topics. – 2011. – Vol. 193, no. 1. – P. 185–192.

3 Chechkin A. V., Gorenflo R., and Sokolov I. M. Fractional diffusion in inhomogeneous media // Journal of Physics A: Mathematical And General. – 2005. – Vol. 38. – P. 679-984.

4 Sun HongGuang, Chen Wen, and Chen YangQuan. Variable-order fractional differential operators in anomalous diffusion modeling // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2009. – Vol. 388, no. 21. – P. 4586–4592.

5 Coimbra C.F.M. Mechanics with variable-order differential operators // Annalen der Physik. – 2003. – nov. – Vol. 515, no. 11-12. – P. 692-703.

6 Obembe Abiola D., Hossain M. Enamul, and Abu-Khamsin Sidqi A. Variable-order derivative time fractional diffusion model for heterogeneous porous media // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2017. – Vol. 152. – P. 391-405.

7 Kobelev Ya. L., Kobelev L. Ya., and Klimontovich Yu. L. Anomalous diffusion with time-and coordinate-dependent mem- ory // Doklady Physics. – 2003. – Vol. 48, no. 6. – P. 264-268.

8 Sweilam Nasser H. and AL-Mekhlafi Seham M. Numerical study for multi-strain tuberculosis (TB) model of variable-order fractional derivatives // Journal of Advanced Research. – 2016. – Vol. 7, no. 2. – P. 271-283.

9 Atangana Abdon and Cloot Alain H. Stability and convergence of the space fractional variable-order Schrödinger equation // Advances in Difference Equations. – 2013. – Vol. 2013, no. 1.

10 Zhao X. Zhong S.Z. Karniadakis G.Em. Second-order approximations for variable order fractional derivatives: Algorithms and applications // Journal of Computational Physics. – 2015. – Vol. 293. – P. 184-200.

11 Moghaddam B.P., Machado J.A.T., and Behforooz H. An integro quadratic spline approach for a class of variable-order fractional initial value problems // Chaos, Solitons &amp Fractals. – 2017. – Vol. 102. – P. 354-360.

12 Xu T., Lu S., Chen W., and Chen H. Finite difference scheme for multi-termvariable-order fractional diffusion equation // Advances in Difference Equations. – 2018. – Vol. 1. – P. 1-13.

13 A.V. Chechkin, R. Gorenflo, I.M. Sokolov, Fractional diffusion in inhomogeneous media. *J. Phys. A: Gen. Phys.* **38**, No 42 (2005), 679-684.

14 Sun H. G., Chang A., Zhang Y., and Chen W. A Review on Variable-Order Fractional Differential Equations: Mathemat- ical Foundations, Physical Models, Numerical Methods and Applications // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2019. – Vol. 22, no. 1. – P. 27-59.

15 Cao Jianxiong and Qiu Yanan. A high order numerical scheme for variable order fractional ordinary differential equation // Applied Mathematics Letters. – 2016. – Vol. 61. – P. 88-94.

16 Abuasbeh K. Asia K. Ramsha S. Bilal T. Muna A. Almulla and A. Muath. A Method for Solving Time-Fractional Initial Boundary Value Problems of Variable Order // Symmetry. – 2023. – Vol. 15, no. 2. – P. 519.

17 Du Ruilian and Liang Zongqi. Two New Approximations for Variable-Order Fractional Derivatives // Discrete Dynamics in Nature and Society. – 2017. – Vol. 2017. – P. 1-10.

18 Liu Huan, Zheng Xiangcheng, and Fu Hongfei. Analysis of a Multi-Term Variable-Order Time-Fractional Diffusion Equa- tion and Its Galerkin Finite Element Approximation // Journal of Computational Mathematics. – 2022. – Vol. 40, no. 5. – P. 814-834.

REFERENCES

1 Lorenzo Carl F. and Hartley Tom T. // Nonlinear Dynamics. – 2002. – Vol. 29, no. 1/4. – P. 57-98.

2 Sun H.G., Chen W., Wei H., and Chen Y.Q. A comparative study of constant-order and variable-order fractional models in characterizing memory property of systems // The European Physical Journal Special Topics. – 2011. – Vol. 193, no. 1. – P. 185-192.

3 Chechkin A. V., Gorenflo R., and Sokolov I. M. Fractional diffusion in inhomogeneous media // Journal of Physics A: Mathematical And General. – 2005. – Vol. 38. – P. 679-984.

4 Sun HongGuang, Chen Wen, and Chen YangQuan. Variable-order fractional differential operators in anomalous diffusion modeling // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2009. – Vol. 388, no. 21. – P. 4586-4592.

5 Coimbra C.F.M. Mechanics with variable-order differential operators // Annalen der Physik. – 2003. – nov. – Vol. 515, no. 11-12. – P. 692-703.

6 Obembe Abiola D., Hossain M. Enamul, and Abu-Khamsin Sidqi A. Variable-order derivative time fractional diffusion model for heterogeneous porous media // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2017. – Vol. 152. – P. 391-405.

7 Kobelev Ya. L., Kobelev L. Ya., and Klimontovich Yu. L. Anomalous diffusion with time-and coordinate-dependent mem- ory // Doklady Physics. – 2003. – Vol. 48, no. 6. – P. 264-268.

8 Sweilam Nasser H. and AL-Mekhlafi Seham M. Numerical study for multi-strain tuberculosis (TB) model of variable-order fractional derivatives // Journal of Advanced Research. – 2016. – Vol. 7, no. 2. – P. 271-283.

9 Atangana Abdon and Cloot Alain H. Stability and convergence of the space fractional variable-order Schrödinger equation // Advances in Difference Equations. – 2013. – Vol. 2013, no. 1.

10 Zhao X. Zhong S.Z. Karniadakis G.Em. Second-order approximations for variable order fractional derivatives: Algorithms and applications // Journal of Computational Physics. – 2015. – Vol. 293. – P. 184-200.

11 Moghaddam B.P., Machado J.A.T., and Behforooz H. An integro quadratic spline approach for a class of variable-order fractional initial value problems // Chaos, Solitons &amp Fractals. – 2017. – Vol. 102. – P. 354-360.

12 Xu T., Lu S., Chen W., and Chen H. Finite difference scheme for multi-termvariable-order fractional diffusion equation // Advances in Difference Equations. – 2018. – Vol. 1. – P. 1-13.

13 A.V. Chechkin, R. Gorenflo, I.M. Sokolov, Fractional diffusion in inhomogeneous me-dia. *J. Phys. A: Gen. Phys.* **38**, No 42 (2005), 679-684.

14 Sun H. G., Chang A., Zhang Y., and Chen W. A Review on Variable-Order Fractional Differential Equations: Mathemat- ical Foundations, Physical Models, Numerical Methods and Applications // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2019. – Vol. 22, no. 1. – P. 27-59.

15 Cao Jianxiong and Qiu Yanan. A high order numerical scheme for variable order fractional ordinary differential equation // Applied Mathematics Letters. – 2016. – Vol. 61. – P. 88-94.

16 Abuasbeh K. Asia K. Ramsha S. Bilal T. Muna A. Almulla and A. Muath. A Method for Solving Time-Fractional Initial Boundary Value Problems of Variable Order // Symmetry. – 2023. – Vol. 15, no. 2. – P. 519.

17 Du Ruilian and Liang Zongqi. Two New Approximations for Variable-Order Fractional Derivatives // Discrete Dynamics in Nature and Society. – 2017. – Vol. 2017. – P. 1-10.

18 Liu Huan, Zheng Xiangcheng, and Fu Hongfei. Analysis of a Multi-Term Variable-Order Time-Fractional Diffusion Equa- tion and Its Galerkin Finite Element Approximation // Journal of Computational Mathematics. – 2022. – Vol. 40, no. 5. – P. 814-834.