УДК 519.62; 519.67
https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.73

Б. РЫСБАЙУЛЫ*, А. Ж. ЫДЫРЫС, А. Н. САТЫБАЛДИНА

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан
**E-mail: rysbaiuly.b@gmail.com*

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ 2D УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рысбайулы Болатбек – д.ф.-м.н., профессор кафедры Математического и Компьютерного Моделирования, Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан;
E-mail: rysbaiuly.b@gmail.com
Ыдырыс Айжан Жумабаевна – PhD, ассистент-профессор кафедры Математического и Компьютерного Моделирования, Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан;
E-mail: aizhanyd@gmail.com
Сатыбалдина Айгуль Нурмуханбетовна – магистр, сениор-лектор кафедры Математического и Компьютерного Моделирования, Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан.
E-mail: aigul1191@gmail.com

В статье представлены результаты исследования по нахождению теплофизических характеристик неоднородного материала основанной на уравнении теплопроводности в полярных координатах, проводимые в рамках грантового проекта МНВО РК AP19677594 «Разработка методов нахождения всех нелинейных влага-теплопроводных характеристик неоднородной среды, реализация методов созданием программы машинного обучения». Температурное состояние тела многослойной системы тел можно охарактеризовать с помощью температурного поля, под которым понимается совокупность мгновенных значений температур во всех точках изучаемого пространства. Оно возникает при контакте двух тел, имеющих различную температуру или в пределах одного тела с участками с различной температурой.
Ключевые слова: *Закон Фурье, уравнение Лапласа, коэффициент теплопроводности, граничные условия, контактные условия.*

Б. РЫСБАЙҰЛЫ*, А. Ж. ЫДЫРЫС, А. Н. САТЫБАЛДИНА

Халықаралық Ақпараттық Технологиялар Университеті, Алматы, Қазақстан
**E-mail: rysbaiuly.b@gmail.com*

ПОЛЯРЛЫҚ КООРДИНАТ ЖҮЙЕСІНДЕГІ 2D ЛАПЛАС ТЕҢДЕУІНЕ КЕРІ ЕСЕП

Рысбайулы Болатбек – ф.-м.ғ.д., математикалық және компьютерлік модельдеу кафедрасының профессоры, Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан;

E-mail: rysbaiuly.b@gmail.com

Ыдырыс Айжан Жумабаевна – PhD, ассистент-профессор кафедры Математического и Компьютерного Моделирования, Международный университет информационных технологий, Алматы *Қазақстан;*

E-mail: aizhanyd@gmail.com

Сатыбалдина Айгуль Нурмуханбетовна – магистр, сениор лектор кафедры Математического и Компьютерного Моделирования, Международный университет информационных технологий, Алматы, *Қазақстан.*

E-mail: aigul1191@gmail.com

Мақалада ҚР БжҒМ гранттық қаржыландырылған AP19677594 «Біртекті емес ортаның барлық сызықтық емес ылғал-жылу өткізгіштік сипаттамаларын табу әдістерін әзірлеу, машиналық оқыту бағдарламасын құру әдістерін іске асыру» жобасы аясында жүргізілген полярлық координаттардағы жылу өткізгіштік теңдеуі негізінде біртекті емес материалдың термофизикалық сипаттамаларын табу бойынша зерттеу нәтижелері берілген. Денелердің көпқабатты жүйесі денесінің температуралық күйін температура өрісінің көмегімен сипаттауға болады, ол зерттелетін кеңістіктің барлық нүктелеріндегі температура мәндерінің жиынтығы ретінде түсініледі. Ол температурасы әртүрлі екі дененің немесе әртүрлі аймақтардан тұратын бір дененің ішінде жанасқанда пайда болады.

Түйін сөздер: *Фурье Заңы, Лаплас теңдеуі, жылу өткізгіштік коэффициенті, шекаралық шарттар, байланыс шарттары.*

B. RYSBAIULY,* A. ZH. YDYRYS, A. N. SATYBALDINA

International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan
**E-mail: rysbaiuly.b@gmail.com*

INVERSE PROBLEM FOR 2D LAPLACE EQUATION IN POLAR COORDINATE SYSTEM

Rysbayuly Bolatbek – Ph.D., Professor of the Department of Mathematical and Computer Modeling, International University of Information Technology, *Almaty, Kazakhstan***;**

E-mail: rysbaiuly.b@gmail.com

Ydyris Aizhan Zhumabaevna – PhD, Assistant Professor of the Department of Mathematical and Computer Modeling, International University of Information Technology, *Almaty, Kazakhstan;*

E-mail: aizhanyd@gmail.com

Satybaldina Aigul Nurmukhanbetovna – Master's degree, Senior Lecturer at the Department of Mathematical and Computer Modeling, International University of Information Technology, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: aigul1191@gmail.com

The article presents the results of study on finding the thermophysical characteristics of a heterogeneous material based on the heat conductivity equation in polar coordinates, carried out within the framework of the grant project of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan AP19677594 «Development of methods for finding all nonlinear moisture-heat-conducting *characteristics of nonhomogeneous medium, realization of methods by creating machine learning program». The temperature state of a body of a multilayer system of bodies can be characterized using a temperature field, which is understood as a set of instantaneous temperature values at all points of the studied space. It occurs when two bodies with different temperatures come into contact or within one body with areas with different temperatures.*

Keywords: *Fourier law, Laplace equation, coefficient of thermal conductivity, boundary conditions, contact conditions.*

Введение. Основным законом теплопроводности является предложенная Фурье гипотеза о пропорциональности плотности теплового потока температурному градиенту:

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial n} \tag{1}$$

где q – плотность теплового потока в процессе теплопроводности; k – коэффициент теплопроводности; $\frac{\partial T}{\partial n}$ – температурный градиент.

Для полного потока закон Фурье записывается в дифференциальной форма следующим образом:

$$dQ = -k\frac{\partial T}{\partial n}dFdt\text{ , [Дж]} \tag{2}$$

где, dQ – тепловой поток; dF – элементарная площадь изотермической поверхности; dt – время.

В проекциях на оси координат уравнение (1) может быть записано следующим образом:

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x},\quad q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y},\quad q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}\cdot \tag{3}$$

Для решения задач определения температурного поля в процессах теплопроводности необходимо иметь дифференциальное уравнение энергии.

Дифференциальное уравнение энергии записывается в следующем виде:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right).$$

Сумма производных от компонент вектора плотности теплового потока представляет собой дивергенцию этого вектора, тогда $c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -div\ \vec{q}$.

Плотность теплового потока определятся для процесса теплопроводности законом Фурье, а проекции на оси координат уравнениями (3). Подставляя эти уравнения в последнее равенство и считая теплопроводность материала постоянной, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{4}$$

Коэффициент тепловой диффузии характеризует способность вещества проводить температуру и является мерой тепловой инерционности.

Если рассматриваемая область $\Omega \subset R^2$ является кругом, то уравнение

$$c\rho T_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{5}$$

целесообразно написать в полярной системе координат. После замены переменных $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, уравнение (5) принимает вид

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{k}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}.$$

Для цилиндрической стенки удобнее использовать цилиндрическую систему координат, в которой координатами являются расстояние по оси (z), текущий радиус-вектор (r) и угол поворота радиус-вектора (φ).

В цилиндрической системе координат оператор Лапласа можно расписать следующим образом:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Условия однозначности задачи (рис. 1):

● геометрические условия – радиусы r_0, r_1, r_2, r_3,

● физические условия – коэффициент теплопроводности цилиндрического слоя k_1, k_2, k_3

● граничное условие – задана температура на границе $r = r_0$ (условие Дирихле) и

● граничное условие – задачи на границе $r = r_3$ (условие Робина)

● граничные условия (контактные условия) в точках $r = r_1$ и $r = r_2$.

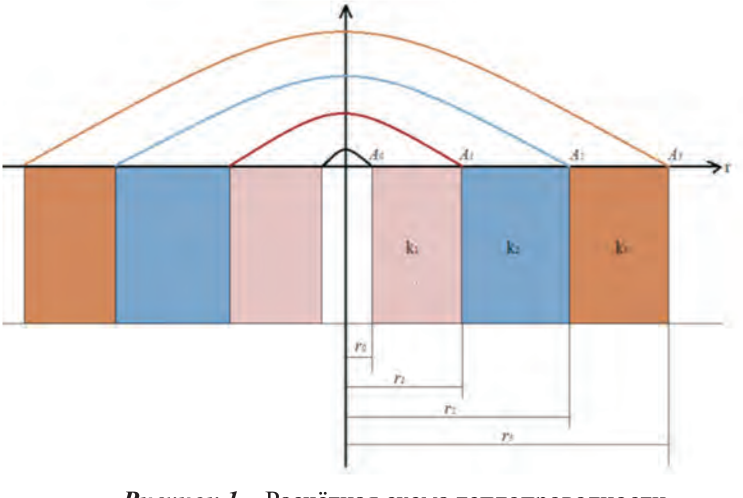

Рисунок 1 – Расчётная схема теплопроводности

Контактные задачи многослойной области изучены в работах [1-6].

Метод Фурье для решения уравнения Лапласа в полярных координатах.

Дифференциальное уравнение теплопроводности (5) в двумерном случае уравнение теплопроводности в полярной системе координат записывается в виде:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right). \quad (6)$$

Мы рассматриваем стационарный процесс, то есть $\frac{\partial T}{\partial t}=0$, то последнее уравнение теплопроводности записывается в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}=0. \quad (7)$$

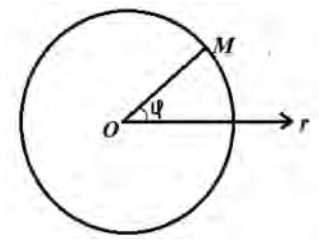

Рисунок 2 – Полярная система координат

Будем искать решения уравнения Лапласа $\nabla^2 T=0$ методом разделения переменных подставляя $T(r,\varphi)$ в форме $T(r,\varphi)=R(r)\cdot\Phi(\varphi)$ в уравнение Лапласа, будем иметь

$$\Phi(\varphi)\cdot R''(r)+\frac{1}{r}\Phi(\varphi)\cdot R'(r)+\frac{1}{r^2}R(r)\cdot\Phi''(\varphi)=0. \quad (8)$$

Считая, что $R(r)\cdot\Phi(\varphi)\neq 0$, обе части последнего равенства делим на $R(r)\cdot\Phi(\varphi)$.

$$\frac{R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{R(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=0$$

или

$$\frac{r^2\left(R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)\right)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda^2. \quad (9)$$

Здесь:

$R(r)$ – радиальная составляющая решения (радиальная функция);

$\Phi(\varphi)$ – угловая составляющая решения.

Если требуется построить классическое решение краевой задачи, то в рассматриваемой области функция $T(r,\varphi)$ должна обладать свойствами периодичности

$$T(r,\varphi+2\pi)=T(r,\varphi).$$

из последнего равенства следует, что $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$. (10)

Из (9) следует уравнение $\Phi''(\varphi)+\lambda^2\Phi(\varphi)=0$ (11)

Характеристическое уравнение последнего есть $\mu^2+\lambda^2=0$.

Решая последнее уравнение относительно μ имеем, что $\mu_{1,2}=\pm\lambda i$.

Поэтому общее решение (11) представляется в виде

$$\Phi_\lambda(\varphi)=A_\lambda\cos\lambda\varphi+B_\lambda\sin\lambda\varphi.$$

Используем условие периодичности.

$$A_\lambda\cos\lambda(\varphi+2\pi)+B_\lambda\sin\lambda(\varphi+2\pi)=A_\lambda\cos\lambda\varphi+B_\lambda\sin\lambda\varphi$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$A_\lambda\left(\cos\lambda(\varphi+2\pi)-\cos\lambda\varphi\right)+B_\lambda\left(\sin\lambda(\varphi+2\pi)-\sin\lambda\varphi\right)=0.$$

Последнее равенство возможно, если λ – целое число, то есть

$$\lambda=n,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{12}$$

Это означает что общее решение уравнении (11) представляется в виде

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi, \tag{13}$$

где n – целое число.

Уравнение (9) для радиальной функции $R(r)$ записывается в виде

$$r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0. \tag{14}$$

Общее решение (14) имеет вид

$$R_n(r)=E_nr^n+E_{-n}r^{-n}. \tag{15}$$

Используя (13) и (15) общее решение уравнение стационарной теплопроводности в цилиндрической системе координат (7), записывается в виде

$$T(r,\varphi)=A_0\ln r+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_nr^n+A_{-n}r^{-n}\right)\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_nr^n+B_{-n}r^{-n}\right)\sin n\varphi. \tag{16}$$

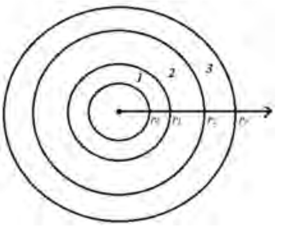

Рисунок 3 – Трехслойное кольцо

Учитывая расположение окружностей (рис.3), формулу (16) перепишем в виде

$$T^s\left(r,\varphi\right)=A_0{}^s\ln r+B_0{}^s+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n{}^s r^n+A_{-n}{}^s r^{-n}\right)\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n{}^s r^n+B_{-n}{}^s r^{-n}\right)\sin n\varphi\,, \quad (17)$$

где s = 1,2,3 и $T\left(r,\varphi\right)=\begin{cases}T^1\left(r,\varphi\right), & \text{если} \quad 1\le \mathrm{r}\le \mathrm{r}_1,\\ T^2\left(r,\varphi\right), & \text{если} \quad \mathrm{r}_1\le \mathrm{r}\le \mathrm{r}_2,\\ T^3\left(r,\varphi\right), & \text{если} \quad \mathrm{r}_2\le \mathrm{r}\le \mathrm{r}_3.\end{cases}$

В прямой задаче вычисляются все неизвестные коэффициенты

$$\begin{gathered}A_0^{(1)},B_0^{(1)},A_n^{(1)},B_n^{(1)},A_{-n}^{(1)},B_{-n}^{(1)},n=1,2,\ldots\\ A_0^{(2)},B_0^{(2)},A_n^{(2)},B_n^{(2)},A_{-n}^{(2)},B_{-n}^{(2)},n=1,2,\ldots\\ A_0^{(3)},B_0^{(3)},A_n^{(3)},B_n^{(3)},A_{-n}^{(3)},B_{-n}^{(3)},n=1,2,\ldots\end{gathered}$$

Стационарная двумерная обратная задача. Пусть задаются измеренные значения температуры: $T_1\left(\varphi\right),\ \mathrm{T}_2\left(\varphi\right),\ \mathrm{T}_3\left(\varphi\right),\ 0\le\varphi\le 2\pi$.

Задаются измеренные значения температуры.

$$\begin{aligned}&T\left(r=r_1,\varphi\right)=f\left(\varphi\right),\\ &T\left(r=r_3+0,\varphi\right)=T_a\left(\varphi\right)-T.\end{aligned}$$

$T_a\left(\varphi\right)$ – температура окружающей среды.

Зная $r_1,\ r_2,\ r_3$, можно вывести расчетные формулы коэффициентов $k_1,\ k_2,\ k_3,\ h$.

Используем формулу (17) на окружностях $r = r_2$ и $r = r_3$, интегрируя по φ от 0 до 2π. Учитывая равенство при n=m, имеем следующие интегралы

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T_2\left(\varphi\right)\cos n\varphi d\varphi=A_{2,n}^{(2)}r_2^n+A_{-2,n}^{(2)}r_2^{-n}\,, \quad (18)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T_2\left(\varphi\right)\sin n\varphi d\varphi=B_{2,n}^{(2)}r_2^n+B_{-2,n}^{(2)}r_2^{-n}\,. \quad (19)$$

Аналогично для окружности радиусом $r = r_3$ при $0 \le \varphi \le 2\pi$ имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_3(\varphi)\cos n\varphi d\varphi = A_{3,n}^{(3)} r_3^n + A_{-3,n}^{(3)} r_3^{-n}, \qquad (20)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_3(\varphi)\sin n\varphi d\varphi = B_{3,n}^{(3)} r_3^n + B_{-3,n}^{(3)} r_3^{-n}. \qquad (21)$$

При фиксированном n определяем схему относительно $k_1,\ k_2,\ k_3,\ h$

$$\begin{aligned} F_1(k_1,k_2,k_3,h) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_2(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \\ F_2(k_1,k_2,k_3,h) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_2(\varphi)\sin n\varphi d\varphi, \end{aligned} \qquad (22)$$

$$\begin{aligned} F_3(k_1,k_2,k_3,h) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_3(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \\ F_4(k_1,k_2,k_3,h) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_3(\varphi)\sin n\varphi d\varphi, \end{aligned} \qquad (23)$$

Здесь $F_i(k_1,k_2,k_3,h),\quad i = 1,2,3,4$ имеет вычисленные расчетные формулы.

Решаем систему (22)-(23) относительно $k_1,\ k_2,\ k_3,\ h$. Для каждого n определяется соответствующая $k_1,\ k_2,\ k_3,\ h$, поэтому можно писать

$$k_1(n),\ k_2(n),\ k_3(n),\ h(n),\quad n = 1,2,\ldots \qquad (24)$$

Структурный алгоритм решения обратной задачи:

1-шаг: подбираем m такой, что $i = 1,2,\ldots,\ N = 2m+1$.

2-шаг: при $n = 1,2,\ldots N$ решаются системы (22)-(23) и определяются $k_1(n),\ k_2(n),\ k_3(n),\ h(n)$.

3-шаг: вычисляются $Z_1 = \left(A_{2,0}^{(2)}\ln r_2 + B_{2,0}^{(2)}\right)2\pi + \sum_{l=0}^{M}\frac{1}{2l+1}\left(B_{2,2l+1}^{(2)} r_2^{2l+1} + B_{-2,2l+1}^{(2)}\right) - \int_0^{2\pi} T_2(\varphi)d\varphi$ и $Z_2 = \left(A_{3,0}^{(3)}\ln r_3 + B_{3,0}^{(3)}\right)2\pi + \sum_{l=0}^{M}\frac{1}{2l+1}\left(B_{3,2l+1}^{(3)} r_3^{2l+1} + B_{-3,2l+1}^{(3)}\right) - \int_0^{2\pi} T_3(\varphi)d\varphi$.

4-шаг: если $|Z_1| > \varepsilon$ или $|Z_2| > \varepsilon$, то, используя другой метод, переходим к шагу 2.

5-шаг: вычисляются $k_1 = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} k_1(n)}{N}$, $k_2 = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} k_2(n)}{N}$, $k_3 = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} k_3(n)}{N}$, $h = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} h(n)}{N}$.

6- шаг: вывести k_1, k_2, k_3, h.

ЛИТЕРАТУРА

1 Guo Taiyu, Sha Zhen-Dong, Liu, Xiangjun, Zhang Gang. Tuning the thermal conductivity of multi-layer graphene with interlayer boundary and tensillstrain // Applied physics. – 2015. – №4. – pp.1275-1281.

2 G. F. Umbright, D. Rubio, D. A. Tarzia. Determination of Thermal Conductivities in Multilayer Materials // WSEAS TRANSACTIONS on HEAT and MASS TRANSFER. – 12/2022.

3 B. Rysbaiuly, A. Sinitsa, A. Capsoni. Analytical Inverse Analysis Methodological Approach for Thermo-Physical Parameters Estimation of Multilayered Medium Terrain with Homogenized Sampled Measurements // Symmetry. – 2022. – 14(11).

4 Б. Рысбайулы. Обратные задачи теплопроводности. – Алматы: Қазақ университетi, 2022. – 389 с.

5 J. Berger, D. Dutykh, N. Mendes, B.Rysbaiuly. A new model for simulating heat, air and moisture transport in porous building materials // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2019. – pp.1041-1060.

6 S.Alpar, B.Rysbaiuly, Determination of thermophysical characteristics in a nonlinear inverse heat transfer problem // Applied Mathematics and Computation. – 2023. – 20 p.

REFERENCES

1 Guo Taiyu, Sha Zhen-Dong, Liu, Xiangjun, Zhang Gang. Tuning the thermal conductivity of multi-layer graphene with interlayer boundary and tensillstrain // Applied physics. – 2015. – №4. – pp.1275-1281.

2 G. F. Umbright, D. Rubio, D. A. Tarzia. Determination of Thermal Conductivities in Multilayer Materials // WSEAS TRANSACTIONS on HEAT and MASS TRANSFER. – 12/2022.

3 B. Rysbaiuly, A. Sinitsa, A. Capsoni. Analytical Inverse Analysis Methodological Approach for Thermo-Physical Parameters Estimation of Multilayered Medium Terrain with Homogenized Sampled Measurements // Symmetry. – 2022. – 14(11).

4 B. Rysbajuly. Obratnye zadachi teploprovodnosti. – Almaty: Қazaқ universiteti, 2022. – 389 s.

5 J. Berger, D. Dutykh, N. Mendes, B.Rysbaiuly. A new model for simulating heat, air and moisture transport in porous building materials // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2019. – pp.1041-1060.

6 S.Alpar, B.Rysbaiuly, Determination of thermophysical characteristics in a nonlinear inverse heat transfer problem // Applied Mathematics and Computation. – 2023. – 20 p.