



Қазақстан Республикасы  
Ұлттық инженерлік академиясының

# ХАБАРШЫСЫ

---

## ВЕСТНИК

Национальной инженерной академии  
Республики Казахстан

№ 3 (85)

Алматы  
2022

**МЕЖДУНАРОДНЫЙ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРНОЙ АКАДЕМИИ РК**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**  
**академик Б. Т. ЖУМАГУЛОВ**

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

**Н. М. Темирбеков** – академик, заместитель главного редактора; **Е. И. Имангалиев** – ответственный секретарь; академик **Ж. М. Адиллов**, академик **А. Ч. Джомартов**, академик **Р. А. Алшанов**, академик **М. Ж. Битимбаев**, академик **А. В. Болотов**, академик **А. И. Васильев** (Украина), академик **Б. В. Гусев** (Россия), академик **Г. Ж. Жолтаев**, академик **В. Ч. Вуйцик** (Польша), академик **К. К. Кадыржанов**, академик **К. С. Кулажанов**, академик **А. А. Кулибаев**, академик **М. М. Мырзахметов**, академик **Х. Милошевич** (Сербия), академик **Г. А. Медиева**, академик **А. М. Пашаев** (Азербайджан), академик **А. К. Тулешов**, академик **Б. Б. Телтаев**, академик **Ю. И. Шокин** (Россия).

**INTERNATIONAL  
SCIENTIFICALLY-TECHNICAL JOURNAL  
HERALD TO NATIONAL ENGINEERING ACADEMY  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**

**B. T. ZHUMAGULOV**  
**Editor-in-Chief, academician**

**THE EDITORIAL BOARD:**

**N. M. Temirbekov** – academician, Deputy Editor; **Y. I. Imangaliyev** – Managing Editor; **Zh. M. Adilov**, academician; **A. Ch. Dzhomartov**, academician; **R. A. Alshanov**, academician; **M. Zh. Bitimbayev**, academician; **A. V. Bolotov**, academician; **A. I. Vasilyev**, academician (Ukraine); **B. V. Gusev**, academician (Russia); **G. Zh. Zholtayev**, academician; **Wójcik Waldemar** academician (Poland); **K. K. Kadyrzhanov**, academician; **K. S. Kulazhanov**, academician; **A. A. Kulibayev**, academician; **M. M. Myrzakhmetov**, academician; **H. Miloshevich**, academician (Serbiya); **G. A. Mediyeva**, academician; **A. M. Pashayev**, academician (Azerbaijan); **A. K. Tuleshov**, academician; **B. B. Teltayev**, academician; **Yu. I. Shokin**, academician (Russia).

## **УЧРЕДИТЕЛЬ:**

Республиканское общественное объединение  
«Национальная инженерная академия Республики Казахстан».

Издается с 1997 года.

Выходит 4 раза в год.

Свидетельство о регистрации издания № 287 от 14.11.1996 г.,  
выдано Национальным агентством по делам печати и массовой информации  
Республики Казахстан.

Свидетельство о перерегистрации № 4636-Ж от 22.01.2004 г.,  
выдано Министерством информации Республики Казахстан.

Журнал включен Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан  
в перечень изданий для публикации основных результатов научно-технических работ соис-  
кателей ученых степеней доктора философии PhD и доктора по профилю и ученых званий  
доцента и профессора.

Журнал включен в международную англоязычную базу реферативных данных по техниче-  
ским наукам INSPEC.

Подписку на журнал можно оформить в отделениях связи АО «Казпочта»,  
ТОО Агентстве «Евразия пресс» и ТОО Агентстве «Еврика пресс».

### ***Подписной индекс:***

для физических лиц – **75188**,  
для юридических лиц – **25188**.

Подписка продолжается в течение года.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Богенбай батыра, 80, к. 415.

Тел. 8-7272-915290, факс: 8-7272-915190,

e-mail: [nia\\_rk@mail.ru](mailto:nia_rk@mail.ru), [ntpneark@mail.ru](mailto:ntpneark@mail.ru), [www.neark.kz](http://www.neark.kz)

## **FOUNDER:**

Republic public association  
“National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan”.

Published since 1997 year.

Issued 4 times a year.

Certificate about registration the edition N 287, November, 14, 1996,  
was given by National agency on affaires of press and mass information  
of the Republic of Kazakhstan.

Certificate about re-registration N 4636-Zh, January, 22, 2004,  
was given by Ministry of information of the Republic of Kazakhstan.

The Committee of Science of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan has included the Journal into the list of issues for publication of the main results of scientific-technical investigations of applicants for scientific degrees ( Doctor philosophy PhD, Doctor on specialization) and academic ranks (Professor and Associate professor).

The Journal was included into international English-language abstracts database on technical sciences “INSPEC”.

Subscription to journal may be drawn up at post offices of OJSC “Kazpochta”,  
in PLL Agency “Evraziya press” and PLL Agency “Evrka press” .

### ***Subscription index:***

for natural persons – **75188**,

for juristic persons – **25188**.

Subscription continues during a year.

Address of editorial offices: 050010, Almaty city, Bogenbay Batyr str., 80, off. 415.

Tel. 8-7272-915290, fax: 8-7272-915190,

e-mail: [nia\\_rk@mail.ru](mailto:nia_rk@mail.ru), [ntpneark@mail.ru](mailto:ntpneark@mail.ru), [www.neark.kz](http://www.neark.kz)





*Бакытжан ЖУМАГУЛОВ,  
депутат Сената Парламента РК,  
доктор технических наук,  
академик НАН РК*

## **ДОБРАЯ ВОЛЯ – РАЗВИТИЮ И КОНСОЛИДАЦИИ**

В наше очень непростое время люди Земли особенно нуждаются в доброй воле – объединяющей, а не разъединяющей человечество. На следующей неделе Нур-Султан станет грандиозной диалоговой площадкой: 14–15 сентября в столице Казахстана состоится VII Съезд лидеров мировых и традиционных религий. Его главная тема: «Роль лидеров мировых и традиционных религий в духовном и социальном развитии человечества в постпандемический период». Заявки на участие в форуме подали 108 делегаций из 50 стран, уже аккредитованы 188 зарубежных журналистов, в том числе из Euronews, BBC, CNN, Bloomberg, AlJazeera.

Уже стало доброй традицией проводить глобальный межрелигиозный конгресс в городе на берегах Есиля, в самом сердце Евразии. И периодичность определена: собираться раз в три года. Первый съезд прошел в 2003-м, последующие – в 2006, 2009, 2012, 2015 и 2018 годах. Нарушена периодичность впервые из-за разразившейся пандемии коронавируса, но, наконец, и этот барьер преодолен.

Четыре года спустя мы живем ожиданием очередной сентябрьской встречи руководителей конфессий. И прогноз погоды вновь благоприятный: будет солнечно.

...Мысленно возвращаюсь в незабываемый 2001 год, по моему убеждению, ставший предвестником создания совершенно нового системного механизма духовно-политического партнерства высокого уровня и широчайшего охвата.

23 сентября в молодую столицу суверенной республики нанес исторический визит Папа Римский Иоанн Павел II. Совсем скоро после потрясшей весь мир американской трагедии 11 сентября в Нью-Йорке. Понтифик не отменил поездку, и это всех впечатлило. Ничто не может поколебать праведную волю к миру и добру.

И твердый шаг понтифика навстречу другим верованиям, благородный посыл к взаимодействию культур и цивилизаций был по достоинству оценен казахстанцами.

Папа провел несколько встреч, в том числе с молодежью в ЕНУ имени Л. Н. Гумилева. А кульминацией визита стала Святая месса у Монумента защитникам Отечества, в которой приняли участие более 35 тыс. человек.

Святое благословение коснулось не только Казахстана, его народа, но и персонально многих граждан, поскольку понтифик был открыт для общения. Мне тоже посчастливилось засвидетельствовать почтение главе католической церкви.

По завершении визита в послании Папы Римского Первому Президенту РК Нурсултану Назарбаеву было сказано: «Я вновь заверяю Ваше Превосходительство в моих молитвах о том, дабы Казахстан мог черпать все больше силы из своего богатого духовного культурного наследия и таким образом был в состоянии ответить на многие вызовы, стоящие перед страной на новом этапе ее развития. Да благословит Бог Казахстан, его усилия по созданию общества, крепко стоящего на основе уважения прав и достоинств каждой личности и всех народов».

Сам факт, атмосфера и безукоризненная организационная работа по обеспечению визита, несомненно, добавили имиджевой привлекательности стране. И когда в феврале 2003 года на Международной конференции мира и согласия была озвучена идея проведения межрелигиозного форума в столице Казахстана, она получила весомую поддержку, что сделало возможным созвать такой съезд уже в сентябре.

Съезд стал неординарным событием, в нем участвовали делегации 17 религиозных организаций из 13 стран (сравните с сегодняшними данными – 108 из 50 – очень значимый прогресс). Он подтвердил актуальность и востребованность воплощения идеи сотрудничества и единения представителей различных религий во имя мирной и достойной жизни людей всей планеты. Инициативу проведения его на постоянной основе поддержали такие влиятельные политики, как Кофи Аннан, Джордж Буш, Маргарет Тэтчер, Цзян Цзэминь, Нельсон Мандела, Валери Жискар д'Эстен и другие.

К 2006 году у съезда и свой «офис» появился – Дворец Мира и Согласия. Это величественное сооружение ассоциируется также с Ассамблеей народа Казахстана, проводящей там большинство своих мероприятий. Что логично, ведь цели совпадают – единение, согласие ради всеобщего благополучия. А рабочим органом стал секретариат съезда. Эффективную систему организационных, идеологических и концептуальных компонентов Съезда лидеров мировых и традиционных религий как фундаментальную основу этой глобальной платформы выстроил во время своего председательства в Сенате и в качестве руководителя секретариата съезда Касым-Жомарт Токаев. В результате обеспечение деятельности исполнительной структуры форума де-факто закрепилось за верхней палатой казахстанского Парламента.

Горжусь, что как сенатор причастен к этой работе. В частности, в составе делегации во главе с председателем Сената Парламента РК, руководителем секретариата Съезда лидеров мировых и традиционных религий Мауленом Ашимбаевым в ноябре 2021 года посетил Ватикан. Маулен Ашимбаев от имени Президента страны Касым-Жомарта Токаева вручил понтифику приглашение на предстоящий VII съезд. Состоялись переговоры с главой Ватикана и руководителями его служб.

Подтвержденное участие Папы Римского Франциска означает выход глобального межрелигиозного форума на новый уровень. Это – свидетельство высокого международного авторитета нашей страны и знак признания успехов этноконфессиональной политики Казахстана.

Также планируется прибытие больших делегаций и авторитетных лидеров: шейха Аль-Азхара Верховного имама ат-Тайеба, председателя управления мусульман Кав-

каза шейха Паше-Заде, председателя отдела внешних церковных связей Московского патриархата митрополита Антония, патриарха Иерусалимского Феофила III, главных раввинов Ашкеназского и Сефардского Давида Лау и Ицхака Иосефа, председателя Ассоциации буддистов Китая Янь Цзюэ и других. В съезде примут участие представители 10 религий и ведущих конфессий: ислама, христианства, буддизма, иудаизма, индуизма, синтоизма, даосизма, зороастризма, джайнизма, бахаи. Кроме того, будут представлены 24 международные организации.

Местом проведения VII Съезда лидеров мировых и традиционных религий определен Дворец Независимости, а XX заседания секретариата съезда и его рабочей группы – Дворец Мира и Согласия.

Разнообразна тематика секционных заседаний: «Роль религии в укреплении духовных и моральных ценностей в современном мире», «Роль образования и религиозного просвещения в уважительном сосуществовании религий и культур, укреплении мира и согласия», «Вклад религиозных лидеров и политиков в продвижение глобального межрелигиозного диалога и мира, противодействие экстремизму, радикализму и терроризму», «Вклад женщины в благополучие и устойчивое развитие современного общества и роль религиозных сообществ в поддержке социального статуса женщины».

И будет, как и 21 год назад, большая месса Папы Римского – 14 сентября на территории международного выставочного центра ЕХРО. Начнется она в 16.45 по времени Нур-Султана. В ней планируют принять участие тысячи паломников из Казахстана, Узбекистана, Монголии, Кыргызстана, России и других стран.

Уверен, что VII Съезд лидеров мировых и традиционных религий пройдет успешно и внесет значимый вклад в духовную и нравственную консолидацию человечества, системное противодействие современным негативным тенденциям. А Казахстан еще раз подтвердит свой высокий авторитет как эффективная площадка для диалогов и переговоров самого высокого уровня.

*«Казахстанская правда»  
от 9 сентября 2022 года  
№ 172 (29799) 4 стр.*

---

---

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 004.056.55: 003.26

<https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.171>

**A. S. ABDIRAMAN\***, **A. M. NURUSHEVA**, **L. S. ALDASHEVA**

*L.N. Gumilyov Eurasian national university, Nur-Sultan, Kazakhstan*

*e-mail: a.s.abdiraman@gmail.com, nurusheva.assel@mail.ru*

*Astana IT university*

*e-mail: laura.aldasheva@astanait.edu.kz*

### **ANALYSIS OF METHODS FOR INFORMATION SECURITY LEVEL ASSESSMENT OF INFORMATION AND COMMUNICATION INFRASTRUCTURE OBJECTS**

*In the world of automated digital technologies, one of the main tasks of the enterprise is to find an effective way to prevent the implementation of information security risks. In case to achieve these goals, various evaluation methods are currently used. Basically, any research begins with a literary review of the research topic development. Consequently, this article is a literary review of current methods, tools, and standards for assessing information security of systems, formed through scientific materials from the Scopus and Web of Science databases. Also, this paper examines the analysis of existing methods for assessing the level of information security in the objects of information and communication infrastructure. Based on literature review provides an analysis of information security level assessment methods. This article performs the results of research to an analysis of information security level of information systems within the framework of the project with grant funding from the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant number AP13067916.*

**Key words:** *cyber security, assessment methods, information and communication infrastructure objects, CIOICI, impact, risk.*

**Introduction.** Currently, there are no organizations that would not face certain threats in information security, for example, malware, Internet fraud, phishing, impersonating another person, DoS, and also, the associated risks to their information systems [1-3]. Along with the large number of considerable risks to which each organization is bare now are active risks of information technology arising as of inadequately established domestic processes, people, and systems or from damaging outdoor events, such as computer attacks on resources [4-6].

The main aim in ensuring information security is to defend the business itself, the capability to defend its connected IT assets, guaranteeing privacy, integrity, and accessibility of

---

\* E-mail корреспондирующего автора: a.s.abdiraman@gmail.com

information and information systems, as well as ensuring the confidentiality of the organization's resources [7].

**Analysis of information security level assessment methods.** In this regard, this article provides a systematic literature review of methods, techniques, and tools related to the prevention of threats to information security. A literature review on the use of various methods for assessing the level of information security of information and communication infrastructure (ICI) objects was compiled through the manual [8], which provides aspects of conducting a systematic review of the literature of a specific research area proposed by the authors B.Kitchenham and S.Charters.

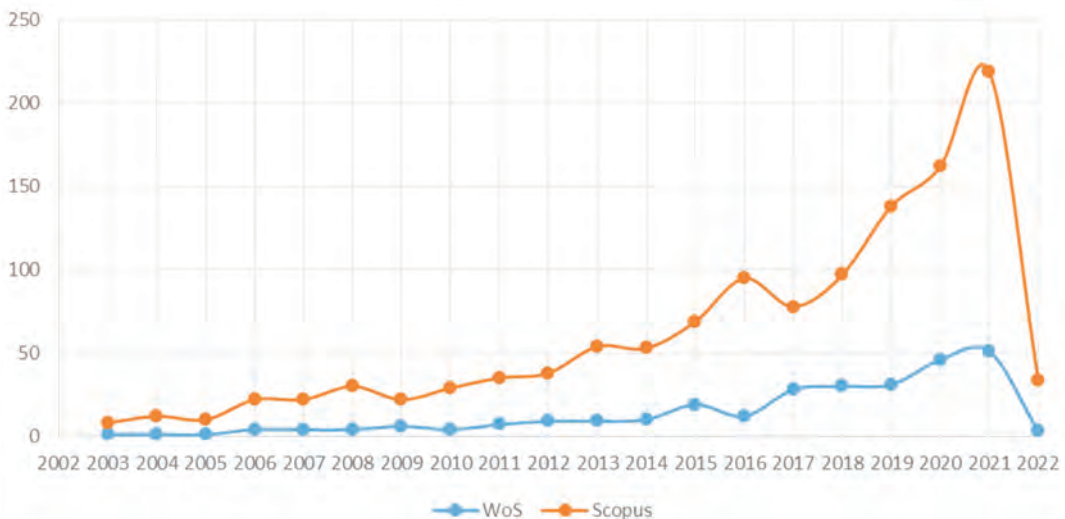
A systematic literature review is a form of secondary research that uses a well-defined methodology to identify, analyze and interpret all available evidence related to a specific research issue. A systematic literature analysis is a form of consequential research that uses a definite methodology to associate, analyze and clarify all available confirmation allied to certain research arise [8]. This method of conducting a literary review makes it possible to save time resources and narrow the list of analyzed literature by filtering through keywords.

The sources in the systematic literature review are the scientific Internet resources "Scopus" and "Web of Science". First of all, it is necessary to determine the keywords to search for relevant literature in the scientific platforms "Scopus" and "Web of Science".

The following words were selected as keywords for the search:

- assessment methods;
- information security;
- objects of information and communication infrastructure.

Considering the above keywords, statistics of published documents were compiled in the context of web sources. In Figure 1, you can see the publication trends corresponding to the search keywords of the study area. This graph shows certain popularity of the topic of assessing the level of information security, which determines the relevance of the study.



**Figure 1** – Statistics of the number of publications by year of publication

Also, the largest number of publications on the topic under study was in the period from 2018 to 2021. During this period, "articles" were mainly published by type of publications. As can be seen from the graph, there is a decline in 2022. It is worth noting that publications for 2022 are still being accepted and under consideration, so the number is reduced.

Based on the statistics presented in Figure 1, the articles were analyzed by the number of citations by search, by keywords. As you know, the relevance of an article is determined by the number of its citations. This analysis was carried out on the Internet resource Web of science. According to the search results, by keywords, as well as by the type of document "article", the total number of publications was 280. It is worth noting that most of the articles during the study period were not cited. In this regard, a table has been compiled for the most cited publications (see Table 1). In addition, according to a similar method of selection, the Internet resource Scopus has issued 1227 articles.

The above number of articles considers the expanded research area; therefore, the following categories are selected to limit the research area:

- computer science information systems;
- telecommunications;
- methods of the theory of computer science.

The last 5 years in the period from 2018 to 2022 were chosen as the study period. Also, according to the type of publications, only articles for the last five years were selected.

After setting the above restrictions, the total number of publications was 39 in Web of Science, and 140 in Scopus.

Based on the analysis of publications through the Web of Science Internet resource, using the method described in the manual [8], a literary review was conducted on the most-cited statistics databases Web of Science and Scopus in accordance with the field of research.

In the article [9], the authors developed a methodology for assessing information security in a special-purpose information and telecommunications system. During the study, the authors used the main provisions of the theory of communication, the theory of queuing, artificial intelligence, as well as general scientific methods of analysis and synthesis. The difference between the proposed method and the known ones, which determines its novelty, lies in the possibility of detection and qualitative interpretation of cyber threats; modeling scenarios of acute situations caused as a result of the execution of cyber threats; assessment of risks having characteristics of several classes and ranking of information and telecommunication system assets by their level of criticalness; assessment of the number of critically vulnerable assets of the information and telecommunication system; substantiation of the constitution and likelihood of cyber threats that can cause extreme situations in the information and telecommunication system; risk assessment of their implementation in the information and telecommunication system. The practical significance of the proposed method lies in the fact that its application makes it possible to automatize the mechanism of analyzing cyber threats and assessing the risks of information security of an information and telecommunications system.

In [10], an innovative ontology and approach based on the graph method for assessing the information security of a network are proposed. The ontology is designed to represent



knowledge about information security, such as knowledge about assets, vulnerabilities, attacks, relationships, and inference rules to identify possible attacks. Subsequently, an effective system structure and an algorithm for generating an attack graph were developed to detect logical attack paths in corporate networks. However, the disadvantage of this method is the complexity of calculating the proposed algorithm for generating an attack graph. Moreover, the research in the article [11] shows that there is no standard method for representing attack graphs or attack trees and that additional research is needed to standardize this representation. Nevertheless, the studies carried out in [11] are useful for assessing the level of information security of ICI facilities. Since to conduct an assessment, we need data that describes the nature of cyberattacks, exploits, and vulnerabilities.

The object of research in [12] is the critically important objects of ICI (CIOICI), which are important in the field of national security, economy, and public security of each country. In this study, the impact of cyberattacks on CIOICI is assessed using a hierarchical flow model approach. Using this method, a CIOICI model is constructed that considers the cyber-physical interaction within the station, the dependence between stations, and the topological structure of the physical network. Further, based on the CIOICI model, an impact assessment is proposed to quantify the losses caused by the spread of the impact within the CIOICI network. However, the detailed relationship between the devices and the target has not been investigated, as has the analysis of the spread of the attack on the network.

The paper [13] presents a method of searching for aggregation operators to create a classification of attacks on a certain system. To implement this method, a set of data collected during decision-making exercises was used. Using the collected data, information security experts performed tasks to assess security based on a realistic system. The results showed that using the proposed method, it is possible to rank attacks on the system by ratings of security components, ranking security components by ratings of specific complexity factors, and, finally, ranking attacks on the system by ratings of specific factors. In the course of this work, important conclusions were obtained that made it possible to create tools to support expert security assessment. Such tools can reduce the time and effort required by experts to conduct assessments and allow system developers to make approximate safety assessments before they seek expert advice. These advances will address the growing concern about the capabilities of limited expert resources due to the increasing complexity and increasing number of information systems being attacked by an ever-changing set of attacks.

There are 3 types of assessment of the level of information security of ICI: assessment by reference, risk-based assessment, and assessment by economic indicators. For the study in this article, the most appropriate type of assessment of the level of information security is risk-oriented.

**Results.** Table 1 presents the above-described models and risk assessment methods proposed by various authors [9-13] for the study period.

**Table 1** – Risk assessment models and methods [9-13]

Reference	Proposed method/model of information security level assessment	Disadvantage
[9]	a method for automating the process of analyzing cyber threats and assessing the risks of information security of an information and telecommunications system	works only with identified information security threats available in the knowledge base
[10]	graph method for network information security assessment	the complexity of calculating the proposed algorithm for generating an attack graph
[11]	Multicriterial decision method	Requires the creation of criteria for making a certain decision
[12]	hierarchical flow model method	the spread of the attack in the CIOI-CI network has not been analyzed
[13]	a method of searching for aggregation operators to create a classification of attacks on a specific system	requires constant updating of the database of information security threats

It is worth noting that a risk-based assessment of the level of information security is carried out on the example of a certain system. Also, during the analysis of the literature, the objects of research used to assess the level and risks of information security were identified. Table 2 presents various research objects used for research in [14-19].

**Table 2** – Systems for assessing the level and risks of information security [14-19]

References	The object of the study
[14]	monitoring and data collection system
[15]	critical digital assets of nuclear power plants
[16]	Cyber-physical security systems
[17]	e-government websites
[18]	Internet of Things devices
[19]	Financial organizations

Along with the positive consequences, meeting the requires of community in the subject of information and communication technologies development entails an increase in the vulnerability of critical ICI facilities to cyber attacks. Given the ever-changing landscape of cyber threats, it is important that the country constantly ensures the cybersecurity of its information and communication technology infrastructure. Recently, cyberspace security has received much-needed emphasis from the government and international agencies. To ensure confidence, actions initiated by the country to counter cyber threats should be constantly evaluated for their implementation and effectiveness.

It is in the work [19] that the research is aimed at offering a new look at the comparative analysis and ensuring information security throughout the country. The article presents



a study and analysis of the methods and practices adopted by countries to assess the situation in the field of information security and create guarantees regarding the implemented information security measures. This paper examines the methods of assessing and ensuring information security used by 37 countries in order to understand the global scenario and identify various methods adopted to assess the state of information security.

In Kazakhstan, there is a methodology for assessing information security risks, including the order of ranking financial organizations by the degree of exposure to information security risks and rules for assessing the level of protection from information security threats.

The methodology for assessing information security risks described in [20] is intended for financial organizations that are not residents of the Republic of Kazakhstan. According to [20], the information security service of a financial institution in the Republic of Kazakhstan identifies the source of information security threats and vulnerabilities of critical information assets, assesses the amount of damage caused by information security threats. However, this methodology does not provide points regarding responding to information security threats in case of its occurrence/detection. It is worth noting that the untimely prevention of information security threats can lead to the penetration of intruders into the ICI of financial organizations, followed by causing enormous damage to the capital of individuals/legal entities.

At the moment, many financial organizations of the Republic of Kazakhstan are subject to phishing attacks, which clearly shows not a strong level of protection from information security threats. In accordance with [20], financial organizations, at the request of the authorized body, must assess the level of protection from information security threats. Nevertheless, practice shows that setting a certain regulatory period for conducting this assessment is more effective than on request. Also, the rules [20] do not specify further actions of the authorized body after the assessment in case of revealing a weak level of protection from threats to the information security of a financial organization.

In order to increase the effectiveness of the fight against cybercrime, developed countries have begun appropriate work to increase the security of their own information and telecommunications networks for general and special purposes. Current global trends in the spread of cybercrime and the activation of various attacks/threats to information security indicate the increasing importance of combating it and timely work to assess the level of security of the logistics from threats to information security. The current situation with cybercrime requires constant improvement of methods of combating cybercrime, the development of information systems, and methods aimed at ensuring information security in the country.

**Conclusion.** In this article, a systematic literature review of existing methods for assessing the level of information security of various systems was carried out, as well as an analysis of measures to ensure information security on the scale of financial organizations of the Republic of Kazakhstan. As can be seen from Table 2, methods for assessing the level and risks of information security have been most widely used in the field of finance, nuclear energy, cyber-physical security systems, e-government, and the Internet of things. The authors also formed a conclusion about the high relevance of research related to the assessment of the security of ICI from information security threats.

In addition, the results of the analysis showed the absence of a single standardized method for assessing the level of information security and security in various areas of communication. In this regard, further research to assess the level of information security will be conducted on the example of satellite communication systems.

As a result of the review, the following tasks were set for further research:

обзор review of existing methods for assessing the information security of objects of informatization of satellite communication systems;

determine the levels of the protected information;

to establish recommendations focused on improving measures to guarantee the information security of ICI facilities on the example of satellite communication systems;

research of increasing the level of information security of ICI facilities based on the developed evaluation method on the example of satellite communication systems.

## REFERENCES

1 A. Boranbayev, S. Boranbayev, A. Nurusheva, K. Yersakhanov. (2018). The Modern State and the Further Development Prospects of Information Security in the Republic of Kazakhstan. 15th International Conference of Information Technology, Information Technology.

2 A. Boranbayev, S. Boranbayev, K. Yersakhanov, A. Nurusheva, and R. Taberkhan (2018). Methods of Ensuring the Reliability and Fault Tolerance of Information Systems. 15th International Conference of Information Technology, Information Technology.

3 Turuskis, Z., Goranin, N., Nurusheva, A., Boranbayev S. (2019). Information Security Risk Assessment in Critical Infrastructure: A Hybrid MCDM Approach. Informatica.

4 Turuskis, Z., Goranin, N., Nurusheva, A., Boranbayev S. A. (2019). Fuzzy WASPAS-Based Approach to Determine Critical Information Infrastructures of EU Sustainable Development. Sustainability.

5 Boranbayev A., Boranbayev S., Nurusheva A. (2018). Development of a software system to ensure the reliability and fault tolerance in information systems based on expert estimates. Advances in Intelligent Systems and Computing.

6 Boranbayev, A., Boranbayev, S., Nurusheva A., Yersakhanov K. (2018). Development of a Software System to Ensure the Reliability and Fault Tolerance in Information Systems. Journal of Engineering and Applied Sciences.

7 Boranbayev, S., Goranin, N., Nurusheva, A. (2018). The methods and technologies of reliability and security of information systems and information and communication infrastructures. Journal of Theoretical and Applied Information Technology.

8 Kitchenham, B., Charters, S. (2017). Guidelines for performing Systematic Literature Reviews in Software Engineering. EBSE Technical Report.

9 Zuiev P., Salnikova O., Mazulevskiy O., Shyshatskiy A., Shevchenko D., Shulhin A. (2020) Methods of cyber security assessment in the information and telecommunications system. International journal of advanced trends in computer science and engineering.

10 Wu S., Zhang Y., Cao W. (2017). Network security assessment using a semantic reasoning and graph based approach. Computers and Electrical Engineering.

11 Harjinder Singh Lallie, Kurt Debattista, Jay Bal A. (2020). Review of attack graph and attack tree visual syntax in cybersecurity. Computer science review.

12 Qianxiang Zhu, Yuanqing Qin, Chunjie Zhou, Li Fei (2019). Hierarchical flow model-based impact assessment of cyberattacks for critical infrastructures. IEEE systems journal.

13 Simon Miller, Christian Wagner, Uwe Aickelin, Jonathan M. Garibaldi (2016). Modelling cyber-security experts' decision-making processes using aggregation operators. Computers & Security.

14 Cherdantseva Y., Burnap P., Blyth A., Eden P., Jones K., Soulsby H., Stoddart K. (2016). A review of cyber security risk assessment methods for SCADA systems. Computers & Security.

15 Son J., Choi J., Yoon H. (2019). New Complementary Points of Cyber Security Schemes for Critical Digital Assets at Nuclear Power Plants. IEEE Access.

16 Ashibani Y., Mahmoud Q.H. (2017) Cyber physical systems security: Analysis, challenges, and solutions. Computers & Security.

17 Zhao JJ., Zhao SY. (2010) Opportunities and threats: A security assessment of state e-government websites. Government information quarterly.

18 Zolanvari M., Teixeira MA., Gupta L., Khan KM., Jain R. (2019). Machine learning-based network vulnerability analysis of industrial internet of things. IEEE internet of things journal.

19 Methodology for assessing information security risks, including the order of ranking financial organizations by the degree of exposure to information security risks // Resolution of the Board of the Agency of the Republic of Kazakhstan for Regulation and Development of the Financial Market dated November 23, 2020 No. 111

20 Rules for assessing the level of protection from information security threats // Resolution of the Board of the Agency of the Republic of Kazakhstan for Regulation and Development of the Financial Market dated November 23, 2020 No. 110

**Ә. С. ӘБДІРАМАН, А. М. НУРУШЕВА, Л. С. АЛДАШЕВА**

*Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Astana IT университеті  
Нұр-Сұлтан қаласы, Қазақстан*

## **АҚПАРАТТЫҚ-КОММУНИКАЦИЯЛЫҚ ИНФРАҚҰРЫЛЫМ ОБЪЕКТІЛЕРІНІҢ АҚПАРАТТЫҚ ҚАУІПСІЗДІК ДЕҢГЕЙІН БАҒАЛАУ ӘДІСТЕРІН ТАЛДАУ**

*Автоматтандырылған цифрлық технологиялар әлемінде кәсіпорынның басты міндеттерінің бірі ақпараттық қауіпсіздік шабуылдарын іске асырудың алдын алудың тиімді әдісін іздеу болып табылады. Осы мақсаттарға қол жеткізу барысында қазіргі уақытта бағалаудың әртүрлі әдістері қолданылады. Негізінде, кез-келген зерттеу зерттеу тақырыбының дамуына әдеби шолудан басталады. Сондықтанда, бұл мақала Scopus және Web of Science мәліметтер базасынан ғылыми материалдар негізінде құрылған жүйелердің ақпараттық қауіпсіздігін бағалаудың заманауи әдістеріне, құралдары мен стандарттарына әдеби шолу болып табылады. Сондай-ақ, ақпараттық-коммуникациялық инфрақұрылым объектілеріндегі ақпараттық қауіпсіздік деңгейін бағалаудың қолданыстағы әдістерін талдау қарастырылады. Әдебиеттерді шолу негізінде ақпараттық қауіпсіздік деңгейін бағалау әдістерін талдау ұсынылған. Бұл мақала ҚР Білім және ғылым министрлігінің 2022-2024 жылдарға арналған ғылыми және (немесе) ғылыми-техникалық жобалар бойынша жасалған ғылымдарды гранттық қаржыландыру шеңберінде АР13067916 гранттық жобасы шеңберінде ақпараттық жүйелердің ақпараттық қауіпсіздік деңгейін талдау бойынша зерттеу нәтижелері ретінде ұсынылған.*

**Түйін сөздер:** киберқауіпсіздік, бағалау әдістері, ақпараттық-коммуникациялық инфрақұрылым объектілері, КМАКИ, әсер ету, тәуекел.

**А. С. АБДИРАМАН, А. М. НУРУШЕВА, Л. С. АЛДАШЕВА**

*Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилев, Astana IT университет  
город Нур-Султан, Казахстан*

## **АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ УРОВНЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ОБЪЕКТОВ ИНФОРМАЦИОННО- КОММУНИКАЦИОННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ**

*В мире автоматизированных цифровых технологий одной из главных задач предприятия является поиск эффективного способа предотвращения реализации рисков информационной безопасности. В случае достижения этих целей в настоящее время используются различные методы оценки. По сути, любое исследование начинается с литературного обзора развития темы исследования. Следовательно, данная статья представляет собой литературный обзор современных методов, инструментов и стандартов оценки информационной безопасности систем, сформированных на основе научных материалов из баз данных Scopus и Web of Science. Также рассматривается анализ существующих методов оценки уровня информационной безопасности в объектах информационно-коммуникационной инфраструктуры. На основе обзора литературы представлен анализ методов оценки уровня информационной безопасности. Представлены результаты исследования по анализу уровня информационной безопасности информационных систем в рамках грантового финансирования молодых ученых по научным и (или) научно-техническим проектам на 2022-2024 годы Министерства образования и науки РК, номер гранта AP13067916.*

**Ключевые слова:** кибербезопасность, методы оценки, объекты информационно-коммуникационной инфраструктуры, КВОИКИ, воздействие, риск.

**A. B. ASSETBEKOV**

*Kazakh-British Technical University,  
Almaty, Kazakhstan  
almar.asetbekov@gmail.com*

## **PROGRESSIVE WEB APPLICATIONS CAPABILITIES TO BECOME AN ALTERNATIVE TO MOBILE APPLICATIONS**

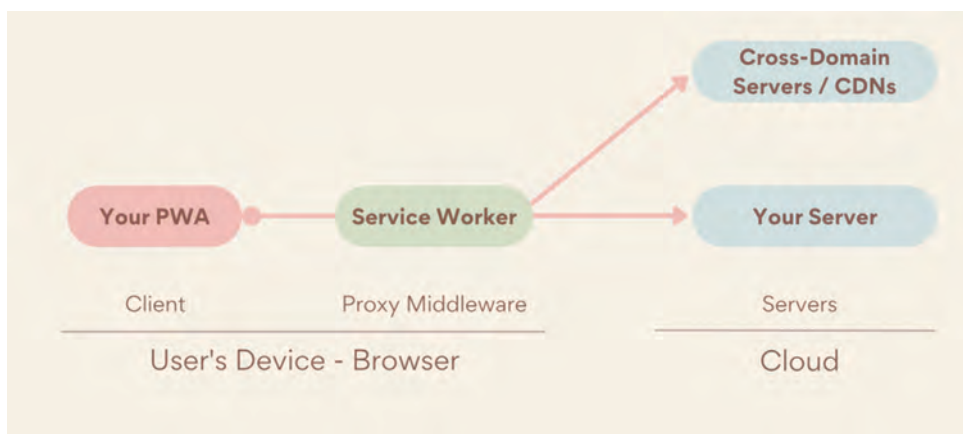
*These days, almost every successful company owns a web application for their business. Essentially, companies try to develop a website that is easy to navigate, so that a user could have a great experience regardless of a used device. But, a web app, even if developed to be used on any device, can be constraining for a user as it does not have features that have been reserved to native apps. Thus, companies are forced to develop a native application for their product and two applications are needed for two different OS - IOS and Android - to reach all potential users and match the modern criteria of a successful product. However, such a strategy of developing a web and two native applications are time and money consuming, which is far from ideal from a business point of view.*

*In 2015, Google introduced Progressive Web Apps (PWA), which aims to close the gap between web and native applications by combining the best features from web and native apps. In this article I am going to describe several APIs that can make PWA feel like a native app.*

**Key words:** *progressive web applications, PWA, service worker, app manifest, API, mobile app, native application*

**Introduction.** Progressive web apps are web applications that behave and feel like a native one. That is to say, PWA should have all the functionalities that a platform-specific application has. It is done by implementing web-platform specific features such as service workers and manifests with progressive enhancement and certain APIs.

A service worker is a script that a browser runs in the background, separate from a web page acting as a network proxy. It intercepts any request and then decides whether it should serve the resource from the cache via the Cache Storage API, from the network as normally would happen without a service worker, or create it from a local algorithm. [1]

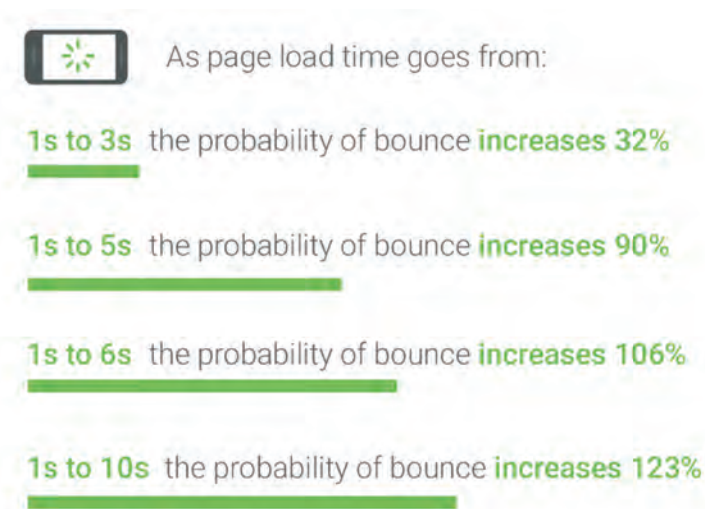


**Figure 1** – Service Worker as a network proxy

The web app manifest is a JSON file that provides information about the application so that it displays properly as a native app when installed. The basic file must contain an app name, icon and URL that opens when the app launches.

These days technologies are evolving at a rapid pace, in particular web and mobile development. Big companies implement new technologies with better approaches into their applications/products. Thus, they set the bar higher for other companies to stay relevant and successful. As products on the market get better in general, users' demand grows as their expectations from other products' capabilities. That is why it is vital to have a reliable and up to date application.

In relation to the network connection, users are used to getting the information fast even with an unreliable and poor connection. They tend to leave an application if the wait is too long. For example, as page load times go from 1 second to three seconds, the probability of a user bouncing increases by 32% and the probability goes up to 123% by 10 second loading mark as illustrated in Figure 2. [2]



**Figure 2** – The probability of bounce

Users' behavior and expectations vary when they use web and mobile applications. They expect certain features from both types of applications. So, the goal is to make an app that provides native-app experience in such a way that a user assumes he uses a mobile app when in fact it is PWA.

Until the appearance of PWA, platform-specific apps have been the only ones with features like push notifications, offline mode, idle detection, home screen installation and so on. Even though not every platform-specific feature can be implemented into PWA now, there are ongoing improvements in terms of new APIs that provide the capability to make PWAs with native-app experience. All of the APIs are built with the web's secure, user-centric permission model so that a user does not have to worry about his vulnerable data.

In the Main Part I am going to explain several platform-specific features that can be implemented into PWA with the help of certain APIs.



**Main Part.** There are five features that are explained in this section. They are presented in the following order:

1. A contact picker
2. Device Orientation and Motion
3. Idle detection
4. Content sharing
5. App shortcuts

#### *A contact picker*

A user expects to get access to his contact list whenever he uses a mobile app. This feature does not exist on web applications, but it is much needed in PWA. Therefore, Google has created the Contact Picker API, which allows one-off access to a user's contact information with full control over the shared data.

Thus, use cases of the Contact Picker API are:

1. discovering a contact who uses a social platform;
2. selecting a contact to send an email;
3. making voice calls with voice over IP, which could get a phone number from a contact list;

#### *Security*

A permission to use a contact list must be granted by a user every time when the request to the list is made. This differs from native applications where a user grants access to a contact list once. Additionally, there is no option to select all contacts to make sure that a user selects only needed contacts.

The API is only available from a secure top-level browsing context. It means that to run the code HTTPS is required. So, to develop locally a developer would need an SSH tunnel as localhost uses an HTTP connection.

The Chrome team took these measures using the core principles defined in Controlling Access to Powerful Web Platform Features for security reasons. [3]

Browser compatibility (Figure 3) depicts the main problem of the Contact Picker API - Safari IOS does not support it yet. As it can be seen, only Android browsers have full compatibility except Firefox for Android. Obviously, desktop browsers do not support this API as a contact list only exists on mobile devices.

#### *Device Orientation and Motion*







Most mobile applications can rotate the display to work in landscape mode. The most prominent example is YouTube where display rotation is the most common feature. There are other mobile applications which highly rely on this functionality as it provides a better UX.

DeviceOrientationEvent is an experimental Web API event which could be used to implement display rotation in PWA.


Additionally, this event could be implemented with geolocation for turn-by-turn navigation.


There is another experimental Web API - DeviceMotionEvent. This event is suitable for gaming and fitness applications, because it helps with character's/person's movement.


#### *Coordinate system*

	PC						Mobile					
	Chrome	Edge	Firefox	Internet Explorer	Opera	Safari	WebView Android	Chrome Android	Firefox for Android	Opera Android	Safari on iOS	Samsung Internet
ContactsManager  	No	No	No	No	57	No	80	80	No	57	No	13.0
getProperties  	No	No	No	No	No	No	80	80	No	57	No	13.0
select  	No	No	No	No	No	No	80	80	No	57	No	13.0

 Full support

 No support

 Experimental. Expect behavior to change in the future.


 Non-standard. Check cross-browser support before using.

Figure 3 – Browser compatibility of Contact Picker API

The Figure 4. represents a device coordinate frame and three values (alpha, beta, gamma) in the frame. X, y and z are in the plane of the screen and are positive towards the right, towards the top and out of hand side of the screen, respectively. Alpha, beta and gamma are properties of the DeviceOrientationEvent.

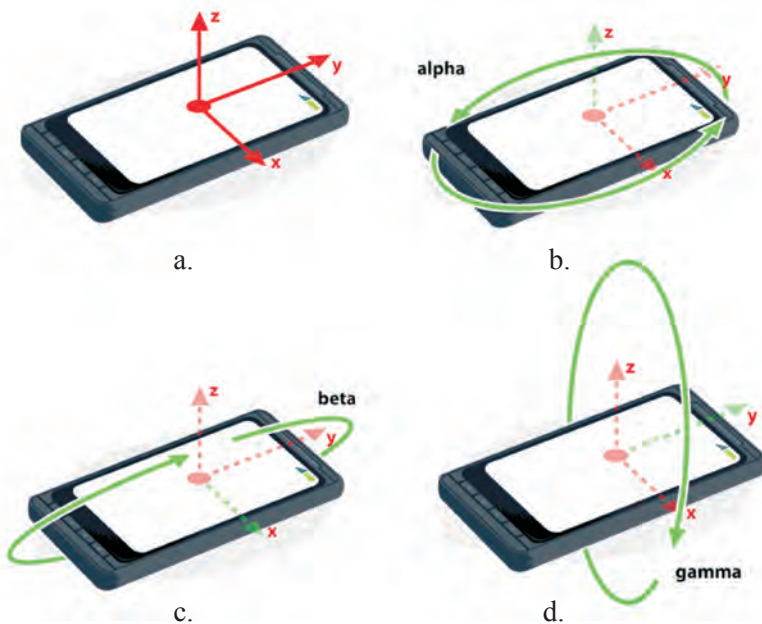


Figure 4 – Device coordinate frame.





The DeviceOrientationEvent returns rotation data, so that a developer knows whether a device is leaning front-to-back or side-to-side and to which degree. Therefore, the data allows a device to interactively respond to orientation changes. The DeviceMotionEvent provides the speed of device positioning and orientation changes, i.e. acceleration, and returns data about the rotation (in °/second).


The Device Motion Event includes four properties: acceleration, acceleration Including Gravity, rotation Rate and interval.

The acceleration and acceleration Including Gravity properties are objects providing data about acceleration on x, y and z axis, which represent the axis from West to East, from South to North and perpendicular to the ground, respectively.

Rotation Rate corresponds to the same alpha, beta and gamma values described earlier.

	🖥️						📱					
	Chrome	Edge	Firefox	Internet Explorer	Opera	Safari	WebView Android	Chrome Android	Firefox for Android	Opera Android	Safari on iOS	Samsung Internet
DeviceMotionEvent	31	12	6	11	18	No	37	31	6	18	4.2	2.0
<a href="#">DeviceMotionEvent() constructor</a>	59	14	29	No	46	No	59	59	29	43	No	7.0
<a href="#">acceleration</a>	31	12	6	11	18	No	37	31	6	18	4.2	2.0
<a href="#">accelerationIncludingGravity</a>	31	12	6	11	18	No	37	31	6	18	4.2	2.0
<a href="#">interval</a>	31	12	6	11	18	No	37	31	6	18	4.2	2.0
requestPermission 	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	14.5	No
<a href="#">rotationRate</a>	31	12	6	11	18	No	37	31	6	18	4.2	2.0

 Full support

 No support


 Experimental. Expect behavior to change in the future.

Figure 5 – Browser compatibility of Device Motion Event.

### Idle Detection

When a user does not use his device for more than a minute (if not changed manually), the device goes into an idle mode. This mode means that a device is on but the screen is off.

The Idle Detection API gives more flexibility to web development as it provides a user (active or idle) and a screen (locked or unlocked) idle state. That is to say, developers can

	🖥️						📱					
	Chrome	Edge	Firefox	Internet Explorer	Opera	Safari	WebView Android	Chrome Android	Firefox for Android	Opera Android	Safari on iOS	Samsung Internet
DeviceOrientation-Event	7 ★	12	6 ★	11	15	No	3 ★	18 ★	6 ★	14	4.2	1.0 ★
<a href="#">DeviceOrientation-Event() constructor</a>	59	14	17	No	46	No	59	59	17	43	No	7.0
<a href="#">absolute</a>	7	12	6	11	15	No	4.4	18	6	14	No	1.0
<a href="#">alpha</a>	7	12	6	11	15	No	3	18	6	14	4.2	1.0
<a href="#">beta</a>	7	12	6	11	15	No	3	18	6	14	4.2	1.0
<a href="#">gamma</a>	7	12	6	11	15	No	3	18	6	14	4.2	1.0
requestPermission 🚧	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	14.5	No

Full support

No support

Experimental. Expect behavior to change in the future.

★ See implementation notes.

Figure 6 – Browser compatibility of Device Orientation Event.

start or stop the execution of the particular code by looking at the idle state and, consequently, provide a better UX.








The use cases of the API are the following:



1. Networking or messaging applications to see if someone is available at the moment (online/away/offline);
2. Publicly used applications return to the home page if there is no interaction with the application.
3. Updating a service worker when the app is not used.

There is one remark when using the API - a user has to grant the permission for the API to be used. Otherwise, the idle detection will not work. The Chrome team has designed and implemented the API this way for security reasons using the core principles defined in Controlling Access to Powerful Web Platform Features[3].

Initially, idle detection was gated behind the notifications permission, but the Idle Detection spec editors have decided to gate it behind a dedicated idle detection permission. Referring to native applications, there is no need for a user gesture to grant the permission as such applications have access to locked/idle states. So, the Idle Detection API implemented

in PWA is more transparent as it gives a choice to a user whether to allow the idle detection or not.

	Desktop						Mobile					
	Chrome	Edge	Firefox	Internet Explorer	Opera	Safari	WebView Android	Chrome Android	Firefox for Android	Opera Android	Safari on iOS	Samsung Internet
<code>IdleDetector</code> 	94	94	No	No	80	No	94	94	No	No	No	No
<code>IdleDetector()</code> constructor 	94	94	No	No	80	No	94	94	No	No	No	No
<code>onchange</code> 	94	94	No	No	80	No	94	94	No	No	No	No
<code>requestPermission</code> 	94	94	No	No	80	No	94	94	No	No	No	No
<code>screenState</code> 	94	94	No	No	80	No	94	94	No	No	No	No
<code>start</code> 	94	94	No	No	80	No	94	94	No	No	No	No
<code>userState</code> 	94	94	No	No	80	No	94	94	No	No	No	No

 Full support
  No support


 Experimental. Expect behavior to change in the future.

Figure 7 – Browser compatibility of Idle Detection API.

### Content sharing

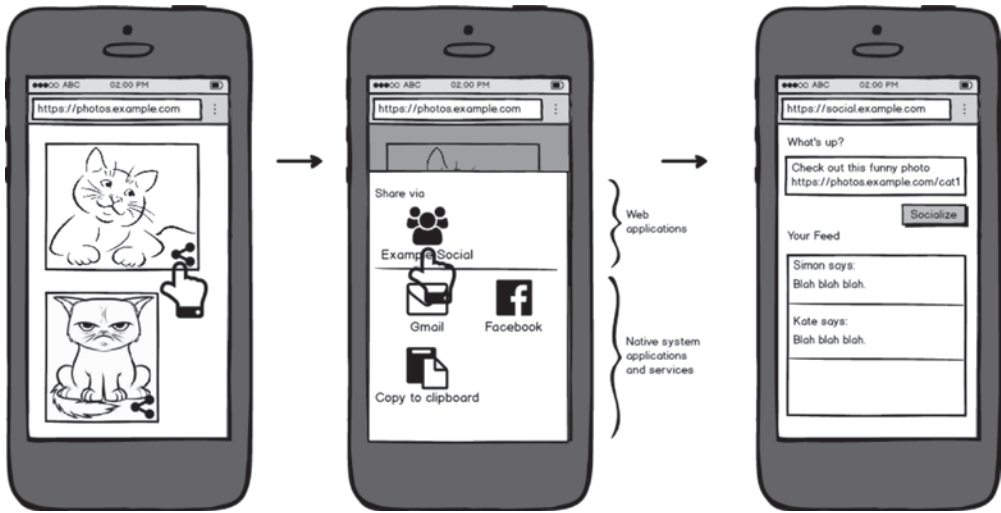
Content sharing is one of the most used functionalities in native applications. It helps users to save time by doing the minimal effort of clicking the share button and picking the receiver.

Web Share Target API enables a web site to receive shared data from other sites or apps. The goal is to allow PWA to appear in the UI for picking an app to share to. This way content could be shared from native to web apps and vice versa.

In order to use Web Share Target API web app manifest file must be updated with `share_target` entry so PWA is registered as a share target. A developer explicitly sets what kind of data PWA will accept. The most common scenario is accepting data, links, and text. Additionally, files could be accepted and some application changes as well.

Web Share API makes it possible for web apps to share links, text, and files to other apps installed on the device to use the same system-provided share capabilities as platform-specific apps.

For a progressive web application to appear in the sharing UI among native applications the PWA must be installed on a device. After installing a user can open any app that supports share functionality and by clicking the share button a user will be prompted with a target picker where the installed PWA will be displayed (Figure 8). Finally, the shared data will be available in the PWA with the implemented Share Target API.



**Figure 8** – Content sharing in PWA.

The Web Share API has two methods - `navigator.share()` and `navigator.canShare()`.

`Navigator.canShare()` is used before `navigator.share()` to identify whether the data is sharable or not.

`Navigator.share()` is used for sending the data to a share target. The method must be called on a transient activation, for example a click on the PWA icon in the sharing UI, which means that the method cannot be called programmatically without a user gesture. `Navigator.share()` is a promise-based method with a required properties object, which must contain at least one of the following properties: title, text, url or files

#### *App shortcuts*

App shortcuts are a handy way to get access to frequently used actions. So, a user can boost his productivity and facilitate re-engagement with an application. Shortcuts are invoked by right-clicking the app icon on desktop or long-pressing the icon on a mobile device.

This functionality used to be reserved to native applications, but now it is available for progressive web applications as well.

Shortcuts are defined in the app manifest json file in `shortcuts` entry, an array of objects. Each object must contain a name displayed in the context menu and a url within the application. There are other optional fields:

- 1) `Short_name` is used when there is insufficient space for a full name to be displayed;
- 2) `Description` is not used at the moment, but is going to be exposed to assistive technology;



	Desktop						Mobile					
	Chrome	Edge	Firefox	Internet Explorer	Opera	Safari	WebView Android	Chrome Android	Firefox for Android	Opera Android	Safari on iOS	Samsung Internet
share / canShare	89★	81★	71	No	75	12.1	No	61	79	48	12.2	8.0
data.files parameter	89★	89★	No	No	75★	15	No	76	No	54	15	11.0
data.text parameter	89★	89★	71	No	75★	15	No	76	No	54	15	11.0

Full support

Partial support

No support

User must explicitly enable this feature.

★ See implementation notes.

Figure 9 – Browser compatibility of Web Share API.

3) Icons are used for shortcut representation in the context menu;  
 Best practices:

1) Order app shortcuts by priority. The available number of shortcuts varies depending on the platform from 3 in Chrome 92 for Android 7 to 10 in Chrome and Edge on Windows. So, the crucial shortcuts should be first in the array.

	Desktop						Mobile					
	Chrome	Edge	Firefox	Internet Explorer	Opera	Safari	WebView Android	Chrome Android	Firefox for Android	Opera Android	Safari on iOS	Samsung Internet
shortcuts <span style="font-size: 0.8em;">▲</span>	85★	85★	No★	No	71★	No★	84	84	No★	60	No★	14.0

Full support

Partial support

No support

▲ Experimental. Expect behavior to change in the future.

Figure 10 - Browser compatibility of shortcuts API.

2) Use distinct names. As icons are optional there could be a situation when they are absent. Therefore, it is unsafe to rely on icons to describe what kind of app they represent.

3) Analyze shortcuts usage. To provide a better UX it is better to track what shortcuts are used more frequently than others.. This way the first point will be satisfied as well.

**Conclusion.** It is not necessary for a progressive web application to have all the native functionalities to work properly. That is why transforming a web application into a progressive web application is a gradual process, which allows developers to integrate native-like features one by one without breaking the application. The APIs described in the article have shown that features which have been reserved to native applications are now available in web applications due to certain APIs. All of the APIs are designed securely using the core principles defined in Controlling Access to Powerful Web Platform Features. [3] In most situations a user gesture is required to use the API for PWA, which differs from native apps where it is not needed due to the implementation differences. In other respects PWA feels like a native app, even though not every browser provides support for interfaces and methods of the APIs or they are in an experimental stage. So, a user experience can vary from browser to browser, which is the most apparent PWA issue. PWA is still an evolving technology and it will take time for browsers to catch up and be in sync with one another.

## REFERENCES

- 1 Service Workers: an Introduction (2021). <https://developers.google.com/web/fundamentals/primers/service-workers>
- 2 Find out how you stack up to new industry benchmarks for mobile page speed (2018). <https://www.thinkwithgoogle.com/marketing-strategies/app-and-mobile/mobile-page-speed-new-industry-benchmarks/>
- 3 Controlling Access to Powerful Web Platform Features <https://chromium.googlesource.com/chromium/src/+lkgr/docs/security/permissions-for-powerful-web-platform-features.md>
- 4 A contact picker for the web (2021). <https://web.dev/contact-picker/>
- 5 Contact Picker API (2021). [https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Contact\\_Picker\\_API](https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Contact_Picker_API)
- 6 Detecting device orientation (2022). [https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/Events/Detecting\\_device\\_orientation](https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/Events/Detecting_device_orientation)
- 7 Device Orientation & Motion (2019). <https://developers.google.com/web/fundamentals/native-hardware/device-orientation>
- 8 Detect inactive users with the Idle Detection API (2021). <https://web.dev/idle-detection/>
- 9 Is Chrome's Idle Detection really a threat to privacy? (2021). <https://scottiestech.info/2021/10/05/is-chromes-idle-detection-really-a-threat-to-privacy/>
- 10 Idle Detection API (2022). [https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Idle\\_Detection\\_API](https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Idle_Detection_API)
- 11 Integrate with the OS sharing UI with the Web Share API (2021). <https://web.dev/web-share/>
- 12 Receiving shared data with the Web Share Target API (2021). <https://web.dev/web-share-target/>
- 13 Web Share API (2022). [https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Web\\_Share\\_API](https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Web_Share_API)
- 14 Web Share Target API Explained (2020). <https://github.com/w3c/web-share-target/blob/main/docs/explainer.md>
- 15 Get things done quickly with app shortcuts (2021). <https://web.dev/app-shortcuts/>
- 16 Shortcuts (2021). <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/Manifest/shortcuts>

**А. Б. ӘСЕТБЕКОВ**

Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы, Қазақстан  
almar.asetbekov@gmail.com

**МОБИЛЬДІ ҚОЛДАНБАЛАРҒА БАЛАМА БОЛУ ҮШІН  
ПРОГРЕССИВТІ ВЕБ- ҚОЛДАНБАЛАРЫНЫҢ МҮМКІНДІКТЕРІ**

Бұл күндері әрбір дерлік табысты компанияда өз бизнесіне арналған веб-қосымшасы бар. Негізінде, компаниялар пайдаланылған құрылғыға қарамастан пайдаланушы тамаша тәжірибеге ие болуы үшін шарлау оңай веб-сайтты жасауға тырысады. Бірақ веб-бағдарлама, тіпті кез келген құрылғыда пайдалануға арналған болса да, пайдаланушыны шектей алады, себебі оның мобильді қолданбалар үшін сақталған мүмкіндіктері жоқ. Осылайша, компаниялар барлық әлеуетті пайдаланушыларға қол жеткізу және табысты өнімнің заманауи критерийлеріне сәйкес келу үшін екі түрлі ОЖ, IOS және Android, үшін өз өнімі үшін жергілікті қосымшаны әзірлеуге мәжбүр. Дегенмен, веб пен екі мобильді қосымшаны әзірлеудің бұл стратегиясы уақыт пен ақшаны талап етеді, бұл бизнес тұрғысынан идеалдан алыс.

2015 жылы Google екеуінің де ең жақсы мүмкіндіктерін біріктіру арқылы веб және мобильді қолданбалар арасындағы ашақтықты жоюға бағытталған Progressive Web Apps (PWA) ұсынды. Бұл мақалада мен PWA-ны мобильді қолданбаға ұқсата алатын бірнеше API сипаттайтын боламын.

**Түйін сөздер:** прогрессивті веб-қосымшалар, PWA, сервис қызметкері, қолданба манифесті, API, мобильді қосымша, жергілікті қолданба.

**А.Б. АСЕТБЕКОВ**

Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан  
almar.asetbekov@gmail.com

**ВОЗМОЖНОСТИ ПРОГРЕССИВНЫХ ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЙ  
СТАТЬ АЛЬТЕРНАТИВОЙ МОБИЛЬНЫМ ПРИЛОЖЕНИЯМ**

В наши дни почти каждая успешная компания владеет веб-приложением для своего бизнеса. По сути, компании пытаются разработать веб-сайт, на котором легко ориентироваться, чтобы пользователь мог получить отличный опыт, независимо от используемого устройства. Но веб-приложение, даже если оно разработано для использования на любом устройстве, может ограничивать пользователя, поскольку оно не имеет функций, которые были зарезервированы для нативных приложений. Таким образом, компании вынуждены разрабатывать нативное приложение для своего продукта и необходимо два приложения для двух разных ОС, IOS и Android, чтобы охватить всех потенциальных пользователей и соответствовать современным критериям успешного продукта. Однако такая стратегия разработки веба и двух нативных приложений требует времени и денег, что далеко не идеально с точки зрения бизнеса.

В 2015 году Google представил прогрессивные веб-приложения (PWA), целью которых является сокращение разрыва между веб-приложениями и нативными приложениями за счет объединения лучших функций из обоих видов. В статье описано несколько API-интерфейсов, которые могут сделать PWA похожим на нативное приложение.

**Ключевые слова:** прогрессивные веб-приложения, PWA, сервис-воркер, манифест-приложения, API, мобильное приложение, нативное приложение.

**А. Д. КУБЕГЕНОВА<sup>1\*</sup>, А. И. ТАКУАДИНА<sup>2</sup>, О. И. КРИВОРОТЬКО<sup>3</sup>,  
Ж. Т. НУРУШЕВА<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>«Жәңгір хан атындағы Батыс Қазақстан аграрлық-техникалық университеті»  
КеАҚ, Орал қ.

<sup>2</sup>«Қарағанды медициналық университеті» КеАҚ, Қарағанды қ.

<sup>3</sup>«Новосібір мемлекеттік университеті», Ресей, Новосібір қ.

<sup>4</sup>БҚО әкімдігі денсаулық сақтау басқармасының «ЖИТС-тің алды алу және оған қарсы күрес жөніндегі облыстық орталық» ШЖҚ МКК, Орал қ.  
E-mail: [aigul-03@mail.ru](mailto:aigul-03@mail.ru), [alyoka.01@mail.ru](mailto:alyoka.01@mail.ru), [krivorotko.olya@mail.ru](mailto:krivorotko.olya@mail.ru),  
[zkoaid.info@gmail.com](mailto:zkoaid.info@gmail.com)

## **БАТЫС ҚАЗАҚСТАН ОБЛЫСЫНДАҒЫ АИТВ-ИНФЕКЦИЯСЫНЫҢ ЭПИДЕМИОЛОГИЯЛЫҚ ЖАҒДАЙЫН БОЛЖАУДАҒЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛДЫ ТАЛДАУ ТЕХНОЛОГИЯСЫ**

Мақалада адамның иммун тапшылығы вирусын (АИТВ инфекциясы) бақылау мен таралуын математикалық модельдеуді дамытудың негізгі бағыттары, эпидемиялық процесінің динамикалық және құрылымдық классификациялары қолданылған.

Әлемдегі және Қазақстан Республикасы бойынша қол жетімді мәліметтер мен міндеттерге байланысты вирустың таралуы сипатталған, Батыс Қазақстан облысы әкімдігінің денсаулық сақтау басқармасының ЖИТС-тің алдын алу және оған қарсы күрес жөніндегі облыстық орталықтан, Батыс Қазақстан бойынша 2010-2020 жылғы статистикалық мәліметтер алынып АИТВ жұқтырғандардың ретроспективті, кластерлік талдаулар жүргізілді.

Сырқаттанушының кестесінің сипаттамасы берілген, тәуекелділігі анықталған, сырқаттанушылықтың статистикалық болжамдары тексерілді.

Ғылыми және практикалық зерттеулерде эпидемияның критерийлері мен бақылауының таралуы Ақпараттық технологиялар тарапынан қарастырылды. Болжау жүйесін және математикалық модельдің қолданыстағы зияткерлік жүйелерін қолдана отырып мысалдар келтірілді.

Маңызды бағыттардың бірі АИТВ індетінің салдарын болжау, бір организмнің ішіндегі иммунологиялық динамиканы зерттеу, халық деңгейінде эпидемиялық жағдайдың дамуын болжау мәселесі экономика мен әлеуметтік саласындағы жағдайлар қарастырылды.

АИТВ жұқтырғандарды өңдеу және жас ерекшеліктері бойынша жағдайды талдау үшін Data Mining классификация әдістері пайдаланылды.

Батыс Қазақстан облысының жас ерекшеліктері бойынша АИТВ жұқтырғандар туралы 10 жылдық кезеңінің сырқаттанушылығын болжау Statistica қолданбалы бағдарламалар пакетінің көмегімен жүргізіледі.

**Түйін сөздер:** ретроспективті талдау, кластерлік талдау, евклид арақашықтығы, Data Mining, Statistica advanced.

**Кіріспе.** Қоғамдық денсаулық сақтаудағы өзекті мәселелердің бірі АҚТҚ-жұқпасы проблемасы болып табылады, ол жедел шараларды талап ететін кең ауқымды әлеуметтік, медициналық, экономикалық салдарға әкеп соғады. АИТВ – ең алдымен жас ұрпақты, репродуктивті және еңбекке қабілетті жастағы адамдарды зақымдайтын қауіпті инфекциялық ауру.

\* E-mail корреспондирующего автора: [aigul-03@mail.ru](mailto:aigul-03@mail.ru)



ЮНЭЙДС сарапшыларының бағалауы бойынша (2021), әлемде АИТВ жұқтырған 37,6 [30,2 - 45,0] млн. адам тұрады, 770 мың адам ЖИТС-пен байланысты аурулардан қайтыс болды. БҰҰ-ның АИТВ/ЖИТС бойынша біріккен бағдарламасының (ЮНЭЙДС) мәліметтері бойынша, қазіргі уақытта АИТВ-инфекциясының пандемиясы тұрақтанды, бірақ өте жоғары деңгейде.

2019-2020 жылдардағы жаңа коронавирустық инфекцияның пандемиясы адамзатқа барлық мемлекеттердің бұрын-соңды болмаған шараларымен жеңілетін міндеттер қойды, АИТВ инфекцияның таралу проблемасы өзекті болып қала береді, өйткені емдеу саласындағы табыстарға қарамастан әлі шешілмеген.

Қазақстанда ЖИТС-тың алдын алу және оған қарсы күрес жөніндегі республикалық орталықтың деректері бойынша 30.09.2020 ж. Өсу қорытындысымен АИТВ-инфекциясының 27 100 жағдайы тіркелді, оның ішінде ерлер – 16344, әйелдер – 10756, балалар – 146. Сондай-ақ, елімізде АИТВ-сы бар әйелдерден туған 4464 бала тіркелген[1].

Қаралып отырған мәселенің өзектілігі БҰҰ-ның 2016-2021 жылдарға арналған АИТВ/ЖИТС жөніндегі біріккен бағдарламасының (ЮНЭЙДС) жаңа стратегиясы: 2030 жылға қарай әлемде ЖҚТБ індетін тоқтату міндеттемесін өзіне алғандығына байланысты. Бұл Қазақстан Республикасының Денсаулық сақтау жүйесін дамытудың 2016-2019 жылдарға арналған «Денсаулық» мемлекеттік бағдарламасында көрініс тапты, бұл Қазақстанда АИТВ-инфекциясы эпидемиясының сипатын, әсіресе жұқтыру қаупі жоғары халықтың негізгі топтарында зерделеу қажеттілігін тудырды.

Қоғамда АҚТҚ жұқтырғандар мен ЖҚТБ-мен ауыратындар санының көп және жыл сайын ұлғайып отыруының болуы кез келген мемлекет үшін демографиялық, экономикалық және әлеуметтік проблема болып табылады [2-3]. Бағалау мәліметтері бойынша, әлемде АҚТҚ/ЖҚТБ-мен өмір сүретін адамдардың саны 46 миллионнан асады. Бұл аурудың жаһандық індеті қазірдің өзінде 30 миллионнан астам адамның өмірін қиды. Жыл сайын әлемде 5 миллион адам жұқтырады, 3 миллионнан астам адам ересектер мен балалар өмірден кетеді. Жастар АИТВ инфекциясына аса осал болып келеді: дамушы елдерде АИТВ жұқтырудың 65% фактісі анықталды 15-тен 24 жасқа дейінгі жастарға келеді.[4-6]

Бұл мәселенің өзектілігі Қазақстанда, әсіресе жұқтыру қаупі жоғары халық топтарында АИТВ-инфекциясы эпидемиясының сипатын зерттеу қажеттілігінен туындады. Эпидемиологиялық аурудың дамуын болдырмау үшін популяциядағы ауруды алдынала анықтауға мүмкіндік беретін терең талдау әдістері қолданылып, статистикалық өңдеуді енгізу қажеттілігі туындап отыр [7-8]. Осыған байланысты, медициналық мәліметтерге байланысты зерттеулер жүргізу, адамдардың бүкіл тобындағы аурудың сипатын зерттеу әдістердің интеграциясы және әмбебап тәсіл арқылы анықталуы керек.

Компьютерлік және ақпараттық технологиялардың, сондай-ақ сақтау технологиясының қарқынды дамуымен көптеген деректерді сақтауға болады. Деректерді іздеу технологиясы көптеген мәліметтерден ықтимал, құнды білімді іздеп және шығара алады. Деректер қоры технологиясы – бұл мәліметтер базасын басқаратын бағдарламалық жасақтама туралы ғылым [9-11]. Деректерді іздеу дегеніміз – мәліметтер шаблонын іздеу процесі, яғни көптеген толық емес, анық

емес, кездейсоқ мәліметтерден алынған мәліметтермен жұмыс жасау [12-13]. Деректерді іздеу – бұл мәліметтер базасы мен жасанды интеллект саласындағы өте белсенді зерттеу саласы. Статистикалық және оңтайландыру алгоритмдерінің жиынтығы 30% салыстырмалы дәлдікпен параметрлерді сәйкестендіруді көрсетеді [14-15].

Нәтижелерді Денсаулық сақтау ұйымдары модельдеу деректерін тарихи деректермен салыстыру арқылы белгілі бір аймақтағы жұқпалы аурулардың эпидемиясын болжау үшін қолдана алады.

**Зерттеу мақсаты.** Медициналық ақпаратты талдау үшін статистика әдістерін қолдану қазіргі уақытта Қазақстанда жеткілікті кең таралмаған, сондықтан жүргізілген зерттеулердің мақсаты Data Mining технологиясы бойынша эпидемиологиялық жағдайды талдау, болжау және алдын ала анықтау болды.

Қазақстан Республикасы және Батыс Қазақстан облысының жас ерекшеліктері бойынша АИТВ жұқтырғандар туралы 10 жылдық кезеңнің ретроспективті, кластерлік талдау жүргізу.

**Материал және әдістер.** Зерттеу объектісі ретінде Батыс Қазақстан облысының жас ерекшеліктері бойынша АИТВ жұқтырғандар туралы 10 жылдық кезеңнің (2010-2020 жж.) деректері таңдалды.

Халықтың аурушандығы бойынша деректерді жіктеу Data Mining технологиясының үлкен деректерін талдау арқылы жүргізілді. Деректерді талдау құралы ретінде Statistica қолданбалы бағдарламалар пакеті қолданылды: StatisticaBase, StatisticaAdvanced, Data Mining деректерін өндіруге арналған құралдар. Кластерлеудің жаңа әдістері толық байланыс әдісіне негізделген графикалық формалардың көмегімен талдау жасауға мүмкіндік берді. Графикалық формаларды қолдану арқылы деректерді кластерлеу талдау уақытын қысқартуға, сондай-ақ сықаттанушылықты болжау алгоритмін әзірлеуге мүмкіндік берді. Кластерлік талдауды деректерге қолданудың практикалық маңыздылығы мен өзектілігі күмән тудырмайды, өйткені қазіргі ақпараттық қоғамда деректер мен оларды талдау нәтижелері болған сайын үлкен рөл атқарады, ал кластерлеу бұл деректерді жақсы түсінуге мүмкіндік береді.

Эпидемиологиялық, статистикалық әдістерді пайдалана отырып, еліміздегі ЖҚТБ індетінің таралуын тоқтату жөніндегі жаһандық мақсаттарға қол жеткізу қажеттілігін ескере отырып, Батыс-Қазақстан облысындағы АИТВ-инфекциясы бойынша эпидемиологиялық жағдайды бағалау, АИТВ жұқтырғандардың жыныстық тиістілігі бойынша ретроспективті, кластерлік талдау жасау.

**Нәтижелер мен талқылау.** Эксперименттік мәліметтерді өңдеу компьютерде статистикалық пакеттерде жүргізілді.

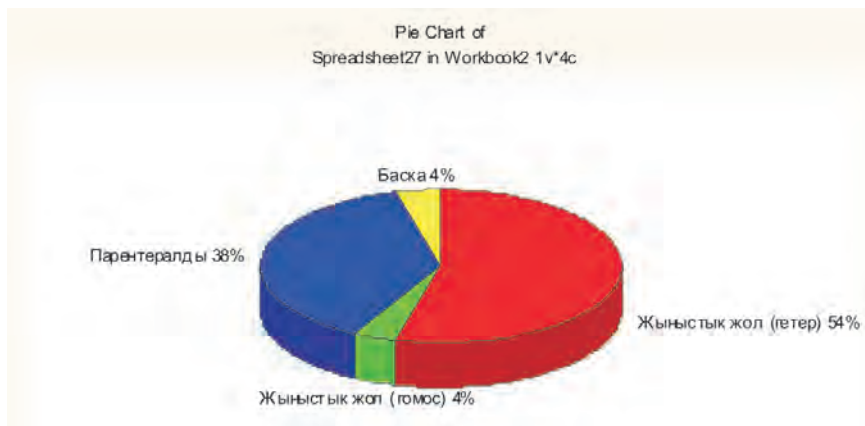
Қазақстан халқының негізгі топтары арасында АИТВ-инфекциясының жағдайларына жүргізілген мониторингтің 2010-2020 жылдарының деректері, АИТВ-ның таралуын эпидемиологиялық қадағалау нәтижелері елде індетті тиімді бақылау үшін ғана емес, сондай-ақ 2030 жылға қарай халықтың денсаулығына қатер ретінде АИТВ-инфекциясы эпидемиясының өсу қарқынын айтарлықтай қысқарту үшін барлық алғышарттардың бар екенін көрсетті.

2020 жылғы қыркүйекке арналған «Қазақстанда АИТВ» есебіне сәйкес АИТВ берілуінің негізгі жолдары (1-сурет) [1]:

– Ең жиі кездесетіні – вирустың жыныстық жолмен берілуі: ол 57,9% құрайды. Бұл жағдайда гетеросексуалдық жолмен 54,3%, ал гомосексуалдық жолмен тек 3,6% беріледі.

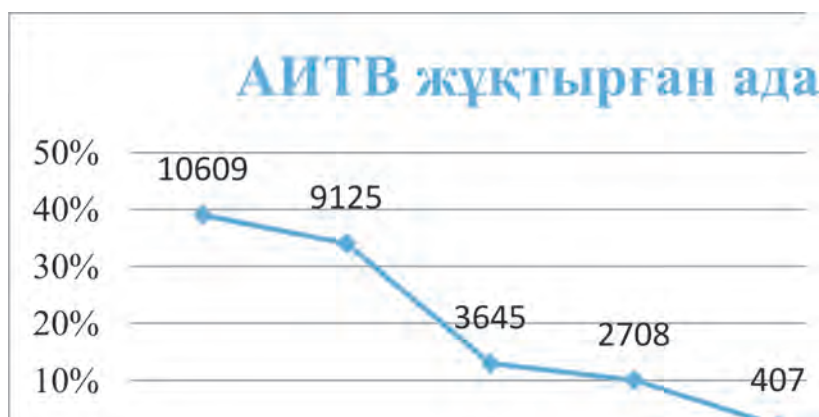
– АИТВ-ның екінші негізгі берілу жолы – парентеральды (яғни, инъекциялық есірткіні қолдану кезінде инелер мен шприцтер арқылы): 38,1% жағдай.

– Басқа және белгіленбеген беру жолдары – 4%



Сурет 1 – Қазақстан Республикасында АИТВ-инфекциясының берілу жолдары.

АИТВ жұқтырған адамдардың әлеуметтік мәртебесінің мәліметі бойынша жұмыс жасайтын АИТВ жұқтырған адам – 33,4% ,жұмыссыздар – 48,8 %, сотталғандар және тергеумен қамалғандар 12,6 % құрайды. АИТВ жұқтырған адамдардың жас ерекшелігі бойынша талдайтын болсақ ең көп кездесіп тұрғаны 30-39 жас аралығында 39% (10 609 адам), 40-49 жас аралығында 34% (9 125 адам), 50-59 жас аралығында 13% (3 645 адам), 20-29 жас аралығында 10% (2 708 адам), 60 жастан жоғары 2% (407 адам), 0-14 жас аралығында 1% (334 адам), 15-19 жас аралығында 1% (272 адам) 2 суретте көрсетілген.



Сурет 2 – Қазақстан Республикасының жас ерекшелігі бойынша АИТВ жұқтырған адамдар

2020 жылғы қыркүйекке арналған «Қазақстанда АИТВ» есебіне сәйкес АИТВ берілуінің негізгі жолдары.

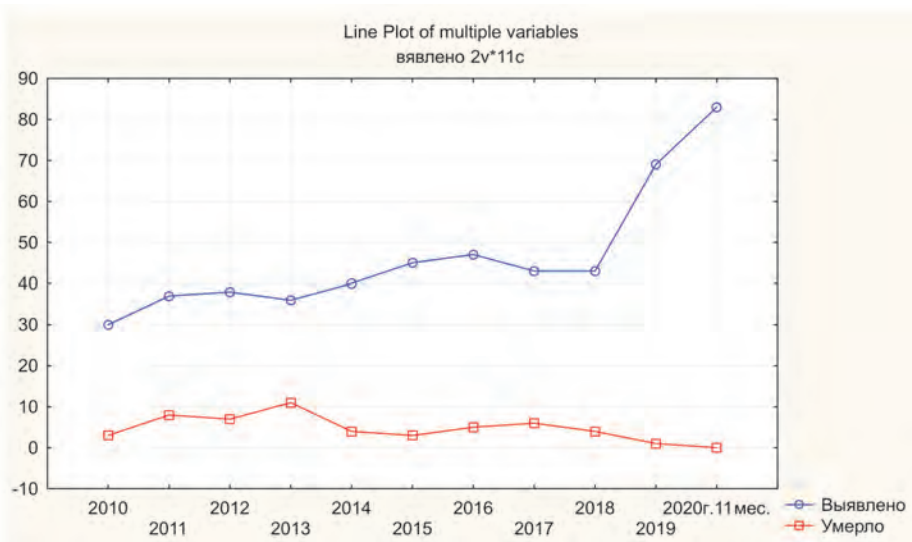
Ақпараттық технологиялар тұрғысынан эпидемияның пайда болуын, таралуын және бақылау критерийлерін зерттеу маңызды ғылыми және практикалық зерттеулердің бірі болып табылады. АИТВ індетінің алдын алу мәселесін шешу үшін, эпидемияның өршуінің уақытында болжау ошағы үлкен рөл атқарады. Болжау сөзі – грек сөзінен алынған болашақта объектінің ықтималдығын, жай-күйі туралы және (немесе) оларды жүзеге асырудың балама жолдары мен мерзімдері туралы ғылыми негізделген пайымдауды білдіреді [3].

Болжаудың негізгі әдістеріне мыналар жатады:

- модельдеу әдістері;
- сараптамалық бағалау;
- статистикалық әдістер;
- интуитивті (маман бұрын болжаудың белгілі бір түріне ғылыми әдістерді қолданған және техникалық құралдарды қолданбай орындай алатын кезде) [4].

Осылайша, болжау жүйесін құру немесе математикалық модельдерді қолдануға негізделген қолданыстағы интеллектуалды жүйелерді қолдану маңызды болып келеді. Алынған мәліметтерді және оларды талдауды ескере отырып, нақты аймақтағы нақты жағдайды неғұрлым дәл сипаттайтын үлгіні таңдау.

2010-2020 жылдар аралығында Батыс Қазақстан облысы бойынша АИТВ ауруының анықталғаны жәнеде қайтыс болған туралы сызықтық графикте көрсетілген (3 сурет).



**Сурет 3** – АИТВ ауруының анықталғаны жәнеде қайтыс болған туралы сызықтық график

Аурудың сызықтық кестесі (сурет 3.) АҚТҚ – жұқпасы (анықталған және қайтыс болғандар саны) Батыс Қазақстан халқы бойынша 10 жылдық кезеңнің

жиынтық деректерін ескере отырып құрылған (2010-2020 жж.). Абсцисса осі бойынша АИТВ жұқтырғандарды зерттеу жылдары, координаталар осі бойынша – АИТВ жұқтырғандардың абсолюттік саны қойылған. Бұл сызықтық график 2011-2013 жылдар аралығында анықталған тұрақты үрдісті көрсетеді. 2014 жылдан бастап анықталған аурулардың нәтижесі екі есеге көбеюіне байланысты нашарлайды. 2019-2020 жылдары зерттеудің алғашқы жылдарымен салыстырғанда тұрғындардың АИТВ ауруы бірнеше есе артып, өзіндік шыңына жетеді. Бұл көрсеткіштің жоғарылау ересек жастағы тұрғындар және осал топтағы-есірткі тұтынушылар, сотталғандар арасында АИТВ-инфекциясының таралуымен және АИТ -инфекциясының жыныстық трансмиссиясының орын алуымен түсіндіріледі.

Осылайша, Батыс Қазақстанда АИТВ-мен сырқаттанушылықтың көпжылдық серпінін бағалау кезінде 2013-2020 жылдар кезеңінде жылдам көтерілу және 2012-2013 жылдар, 2016-2018 жылдар уақыт аралығында құлдырау анықталады.

Вертикалды жолының көрсеткіші 1,3%-ға дейін төмендеуі бұл тенденция абсолютті дегенді білдірмейді, өйткені нәтижелердің жақсаруынан кейін біртіндеп нашарлайды. АИТВ жұқтырғандардың сырқаттанушылық деңгейі бойынша желілік кестені талдау негізінде жыл бойынша үш топқа бөліп көрсетуге болады:

- 1) (2011-2013) – орташа көтерілу жылдары;
- 2) (2010,2014-2020) – жоғары көтерілу жылдары;
- 3) (2012-2013,2016-2018) құлдырау жылдары және аралық жылдар (2013, 2016, 2017).

Сызықтық графикада БҚО бойынша АИТВ-дан қайтыс болған деректердің нәтижелері 2010 - 2013 жылдар аралығындағы өлім-жітімнің жылдам көтерілуін көрсетеді.

2013-2015 жылдар аралығында қайтыс болғандардың саны төмендегені, осы жылдары анықталған науқастардың саны жоғарылауы байқалады себебі олар есепке алынып ем алғандар болып келеді.

2016-2017 жылдары деректер тұрақтанбады, инъекциялық есірткіні тұтынушылар арасында АИТВ-инфекциясының таралуы, сондай-ақ жыныстық жолмен жұғатындар көбейіп келеді. Алайда, 2019-2020 жылдарға қарай көрсеткіштің аздап төмендегенін байқаймыз.Бұл көрсеткіш бір жағынан жаңа короновирустық инфекция пандемиясы кезеңінде ақпарат жинау жүйесінің нашарлауымен, ал екінші жағынан оның өлім түріндегі салдарымен түсіндіріледі.

Variable	Descriptive Statistics (выявлено)									
	Valid N	% Valid obs.	Mean	Median	Mode	Frequency of Mode	Sum	Minimum	Maximum	Std.Dev.
Выявлено	11	100,0000	46,45455	43,00000	43,00000	2	511,0000	30,00000	83,00000	15,66119
Умерло	11	100,0000	4,72727	4,00000	Multiple	2	52,0000	0,00000	11,00000	3,16515

**Сурет 4** – АИТВ жұқтырғандар нәтижелерінің сипаттамалық статистикасы бар электрондық кесте

Бақыланатын айнымалының іріктемелі орташа мәні формула бойынша анықталады(1):

$$\bar{x} = \frac{i \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1)$$

мұндағы  $n$ -үлгінің көлемі (айнымалы  $x$  бақылауларының нақты саны).

Медиана-тапсырыс берілген мәндер қатарын жоғарыда да, төменде де осы мәндердің тең санымен жартысына бөледі.

Мода – бұл мәліметтер жиынтығында жиі кездесетін мән.

Іріктемелі дисперсия айнымалының өзгергіштігін сипаттайды, формула бойынша есептеледі(2):

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (2)$$

мұндағы  $\bar{x}$  – үлгінің орташа мәнін білдіреді.

Дисперсия 0-ден шексіздікке дейін өзгереді. Тұрақты айнымалылар – 0-дің экстремалды мәні өзгергіштіктің болмауын білдіреді.

Бастапқы деректер файлында Батыс Қазақстан обылысының жас ерекшеліктері бойынша АИТВ жұқтырғандар туралы ақпарат бар. Осы кластерлік талдаудың мақсаты кластерлерге бөлу және тәуекел топтарын анықтау үшін тиісті кластерді анықтау болып табылады. Бұл мәселені шешу үшін кластерлік талдауды қолдану негізгі тиімді және жаппай қолданылатын әдістердің бірі болып саналады.

Жақындық шарасы ретінде Евклид арақашықтығын (Евклидово расстояние) пайдалана отырып, кластерлік талдаудың иерархиялық рәсімінің көмегімен өңірдің жас ерекшеліктері бойынша жіктеуді жүргіземіз, ал кластерлерді біріктіру үшін – толық байланыс әдісін (метод полной связи) әдістерін қолданамыз. Осы әдістердің көмегімен екі кластерді бір-бірімен байланыстыруға болады.

Кез-келген екі кластер бір-біріне жақындағанда, олар бір-біріне жақындай бастайды және байланыс қашықтығы мен ерекшеленеді. Тиісінше, біріктірілген кластерлер кездейсоқ қалған бөліктерден бөлек элементтерге айналады. Бұл құбылыс нысандарды бір-бірімен байланыстырады және кластерлерді құрайды. Алынған кластерлер ұзын тізбектермен ұсынылған. Кластерлердің табиғи санын анықтау аймақтарды кластерлерге біріктіру арқылы жүргізілді.

Жас ерекшеліктері бойынша АИТВ ауруын жұқтырған адамдарды кластерлерге біріктіру тәртібі иерархиялық ағашта 5 суретте көрсетілген.

Бөлуді бағалау үшін төмендегі формула бойынша қарастыруға болады:

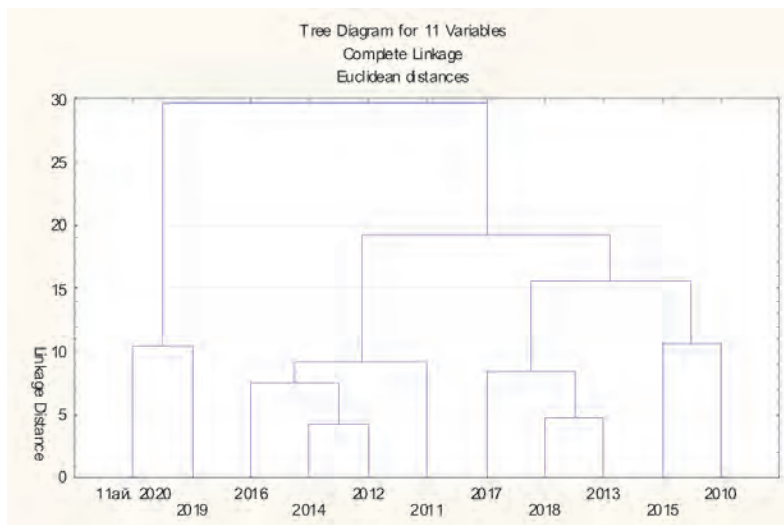
$$\pi = \frac{a_i + a_j}{2b_{ij}} \quad (3) \quad S = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^g \max \pi_{ij} \quad (4)$$

мұндағы  $a_i, a_j$  – кластардың орта кластерлік арақашықтығы;  $i: j; b_{ij}$  – сол кластерлік арасындағы орташа кластерлік қашықтық болып келеді.

Егер объектілер арасындағы барлық айырмашылықтар бір-біріне тең болса, онда бұл жағдайда олар 1-ге тең болады. Жоғарыда сипатталған алгоритмнің көмегімен



алынған бөлімдер 1-ге тең немесе артық емес болып келеді. Нәтижесінде барлық нысандар бір кластерге біріктірілген кезде олар 1-ге тең болады деп айта аламыз.



**Сурет 5** – 2010-2020 жыл аралығындағы, жас ерекшелігі бойынша АИТВ ауруын жұқтырған адамдардың классификациясы.

Толық байланыс әдісі. Толық байланыс әдісі (ағылш. Complete-linkage clustering) –иерархиялық кластерлеу алгоритмдерінің бірі. Бастапқыда үлгінің әр элементі жеке кластер болып саналады. Содан кейін кластерлер барлық элементтер бір кластерге енгенше дәйекті түрде біріктіріледі. Алгоритмнің әр қадамында екі кластер біріктіріледі, олардың арасындағы қашықтық минималды болып келеді.

Объектілер жиынтығы бөлінген кластерлердің табиғи санын анықтау үшін иерархиялық кластерлеудің әр деңгейінде жиынтықты осы класстың санына бөлінді. Кластерлердің әр жұбымен олардың бір-бірімен ішкі байланысы бағаланды. Жәнеде әр кластер үшін орташа кластерлік қашықтық есептелді.

Байланыстылықты бағалау кезінде орташа кластерішілік қашықтықтың кластераралық қашықтыққа қатынасы қолданылады:

Дендрограммада объектілер кластерлерге біріктірілетін қашықтықтар (шартты бірліктерде) көлденеңінен белгіленеді.

Көлденең ось бақылауларды білдіреді, тік-біріктіру қашықтығын білдіреді.

Жас ерекшелігі бойынша АИТВ ауруын жұқтырған адамдардың классификациясының алғашқы қадамы келесі кластерлерден тұрады:

- 1) 2019 – 2020 (11ай) жылдардың көрсеткішінен;
- 2) 2016, 2014, 2012, 2011 жылдардың көрсеткішінен;
- 3) 2017, 2018, 2013, 2015, 2010 жылдардың көрсеткішінен құралды.

Бұдан әрі бір кластерге (2016, 2014, 2012, 2011) жылдардың көрсеткіштерімен (2017, 2018, 2013, 2015, 2010) жылдардың көрсеткіштері кластерлер біріктіріледі. Процесс барлық нысандарды бір кластерге біріктірумен аяқталады. Сонымен, дендограмм бойынша, бұл жағдайда үш кластерге бөлуге болады.

Case ID	Cluster Means (Возраст)		
	Cluster No. 1	Cluster No. 2	Cluster No. 3
0-14 жас	0,50000	0,40000	1,00000
15-19 жас	1,50000	0,60000	0,00000
20-29 жас	17,50000	7,80000	17,50000
30-39 жас	34,50000	18,00000	12,50000
40-49 жас	15,50000	6,00000	6,75000
50 жас+	6,50000	6,60000	2,75000

Сурет 6 – Cluster Means электрондық кестесі

Алынған кластерлердің ерекшеліктерін талдап, жас ерекшелігі бойынша АИТВ ауруын жұқтырған адамдардың көрсеткіштерінің орташа мәнін салыстыра отырып, біз келесі нәтижелерге қол жеткіздік:

Variable	Euclidean distances (Возраст)										
	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	11ай. 2020
2010	0,0	11,4	7,5	6,0	7,7	10,6	12,8	10,9	9,6	23,1	28,3
2011	11,4	0,0	9,2	16,1	7,1	15,0	8,4	19,2	17,7	23,2	29,8
2012	7,5	9,2	0,0	11,6	4,2	12,0	7,5	13,7	13,7	21,7	26,1
2013	6,0	16,1	11,6	0,0	11,4	10,0	16,0	7,4	4,8	21,9	26,0
2014	7,7	7,1	4,2	11,4	0,0	12,4	5,4	13,2	13,1	21,5	26,1
2015	10,6	15,0	12,0	10,0	12,4	0,0	16,6	15,6	8,8	13,4	20,0
2016	12,8	8,4	7,5	16,0	5,4	16,6	0,0	15,9	17,3	23,2	27,0
2017	10,9	19,2	13,7	7,4	13,2	15,6	15,9	0,0	8,5	24,8	26,5
2018	9,6	17,7	13,7	4,8	13,1	8,8	17,3	8,5	0,0	18,5	22,3
2019	23,1	23,2	21,7	21,9	21,5	13,4	23,2	24,8	18,5	0,0	10,5
11ай. 2020	28,3	29,8	26,1	26,0	26,1	20,0	27,0	26,5	22,3	10,5	0,0

Сурет 7 – Евклидово арақашықтығы электрондық кестесі

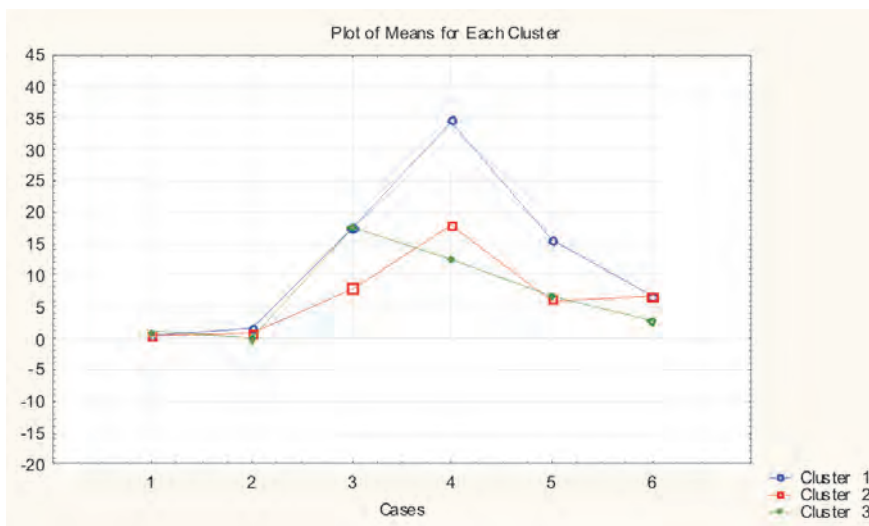
Бірінші кластер тұтастай алғанда 20-29, 30-39, 40-49 жас аралығындағы ерекшелігі бойынша АИТВ ауруын жұқтырған адамдар ересек тұрғындар мен халықтың осал топтары-есірткі тұтынушылар, сотталғандар арасында АИТВ инфекциясының таралуының орташа деңгейімен ерекшеленеді және АИТВ инфекциясының жыныстық трансмиссиясының үлес салмағын алады;

Екінші кластер үшін 1 кластермен салыстырғанда АИТВ-жұқпасының төмен көрсеткіші тән. Екінші кластерге 20-29, 30-39, жас ерекшелігі бойынша АИТВ ауруын жұқтырған адамдар тәуекелі жоғары болып келеді, алайда алкоголизмнен, нашақорлықтан және басқа да әлеуметтік аурулардан зардап шегетін адамдар тобы кіреді;

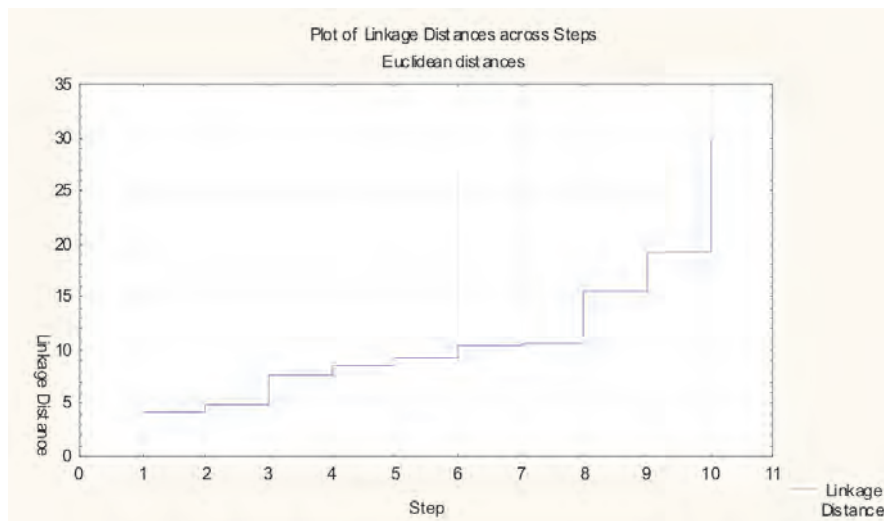
Үшінші кластерде 0-14,15-19 жас аралығында және 50 жастан жоғары жас ерекшелігі бойынша АИТВ ауруын жұқтырған адамдар инъекциялық есірткіні тұтынушылар арасында, сондай-ақ ауру анандан ұрыққа жыныстық жолмен және құрсаққа жұғатын АИТВ-инфекциясының таралуы мен берілу жолы көрсетілген.



8-суретте жас ерекшелігі бойынша АИТВ ауруын жұқтырған адамдардың үш тобына қатысты айтарлықтай айырмашылықтарды атап өтуге болады.



Сурет 8 – Әр кластер үшін орташа мәндер графигі.



Сурет 9 – Қадам бойынша біріктіру схемасының графигі.  
(Евклидово расстояние)

Ағаш тәрізді (древовидный) кластерлеу нәтижелері. Диаграммада көлденең ось бойынша қадамдар, тігінен – қашықтықты бейнелейді (Сурет 9.) Барлық нысандарды бір кластерге біріктіру үшін алгоритмге 11 қадам қажет болды. Бастапқы популяция үшін үшінші қадамда байқалды, ал максималды секіру сегізінші қадамнан кейін байқалады, осылайша 3 кластерге бөлінуі анықталды.

Жас ерекшелігі бойынша АИТВ ауруын жұқтырған адамдардың классификация саңы бойынша кластерге біріктіріліп жәнеде кластерлердін жоғары өсуін анықтады.

Жас ерекшелігі бойынша біртекті топтарға біріктіру шешу жолымен алынған статистикалық болжамдау нәтижелері инъекциялық есірткіні тұтынушылар (ИЕТ) сырқаттанушылықтың болжаушылары болып табылатынын көрсетті. Data mining көмегімен өңдеу халықтың осы тобы АИТВ-инфекциясы індетінің өсуін ынталандыруды жалғастырып отырғанын көрсетті. Жыныстық жолмен берілетін инфекциялар құрылымында маңызды рөл атқаратын коинфекциялар үлесінің артуы үлкен алаңдаушылық тудырады.

**Қорытынды.** Қазақстанда 2030 жылға қарай ЮНЕЙДС-тің «90-90-90» жеделдетілген стратегиясының мақсаттарына қол жеткізу үшін елде АИТВ инфекциясының эпидемиялық процесінің дамуындағы қазіргі үрдістерді, берілу жолдары мен инфекцияның ықтимал таралуын айқындайтын, қауіп факторларын (эпидемиологиялық, әлеуметтік-экономикалық, мәдени, мінез-құлық және басқалар) ескеру мақсатында АИТВ-инфекциясының эпидемиялық процестері, динамикалық және құрылымдық модельдер қарастырылды.

Эпидемиологиялық, статистикалық әдістерді пайдалана отырып, еліміздегі ЖҚТБ індетінің таралуын тоқтату мақсатында Батыс Қазақстан облысындағы АИТВ-инфекциясы бойынша эпидемиологиялық жағдайдың 2010-2020 жылғы статистикалық мәліметтер алынып АИТВ жұқтырғандардың жыныстық тиістілігі бойынша ретроспективті, кластерлік талдау жасалды. Талдауда нәтижесі АИТВ жұқтырғандар ең көп және жыл сайын саңы өсіп келген және сол жастағы өлім-жітімнің жоғары деңгейі көрсетіліп, ерлер арасында 30-39 жас аралығындағы адамдар байқалды. Қазақстан есебіне сәйкес, АИТВ-инфекциясының берілуінің негізгі жолдары, өңірлерінде АИТВ-мен өмір сүретін адамдардың саңы графикалық түрде қарастырылды.

Қолданыстағы интеллектуалды жүйелерді қолдану маңызды болғандықтан алынған мәліметтерді талдап, болжау жүйесі құрылып, жақындық шарасы ретінде Евклидово арақашықтығын (Евклидово расстояние) пайдалана отырып, кластерлік талдаудың иерархиялық рәсімінің көмегінің қажеттілігі анықталды.

Батыс-Қазақстан облысындағы АИТВ-инфекциясы бойынша эпидемиологиялық жағдайдың 10 жылдық кезеңде (2010-2020 жж.) АИТВ бойынша сырқаттанушылыққа жүргізілген талдау АИТВ жұқтырғандардың күрт өсуін және сырқаттанушылықтың тұрақты үрдісін анықтауға мүмкіндік берді;

Кластерлік жіктеу алгоритмі объектілер арасындағы ішкі байланысты анықтады және АИТВ эпидемиологиясының математикалық моделінің дұрыстығын көрсетті;

Data mining көмегімен өңдеу Батыс-Қазақстан облысындағы АИТВ-инфекциясы бойынша сырқаттанушылықтың тұрақты өсуін көрсетті;

Кластерлеу және алынған кластерлердің сипаты олардың жиынтығынан Батыс Қазақстан облысындағы АИТВ-инфекциясымен күресте нақты антиретровирустық препараттарды және терапевтік схемаларды модельдеу, оңтайландыру және таңдау бойынша арнайы деректерді қалыптастыруға мүмкіндік береді.

## ӘДЕБИЕТ

- 1 Проект ОФ «Центр научно-практических инициатив» (30-сентябрь 2020г.)  
<https://amanbol.kz/vich/nauka/tpost/ryp0vd2yh1-vich-v-kazahstane-aktualnie-dannie-na-ko>
- 2 2019 Глобальный мониторинг эпидемии СПИДа (2020). //– Руководство ЮНЭЙДС, 2020. – С.15-21.
- 3 И.С. Светульников, С.Г. Светульников. Методы социально-экономического прогнозирования. Том 1. Теория и методология. — Москва: Юрайт, 2015. — 351 с. — ISBN 978-5-9916-4903-2, 978-5-9916-4905-6.
- 4 А.И. Такуадина. Обзор существующих математических моделей как эффективных методов прогнозирования распространения эпидемии. V Международная научно-практическая конференция «Европа и тюркский мир: наука, техника и технологии» г. Анкара, Турция, 6-8 май 2020г. Том 1. С.108-115.
- 5 Романюха А.А., Носова Е.А. Модель распространения ВИЧ-инфекции в результате социальной дезадаптации // Управление большими системами, 2011. Выпуск 34. М.: ИПУ РАН. С. 227–253.
- 6 Карач А.С., Романюха А.А. Современные подходы к анализу и прогнозированию здоровья населения с помощью математических моделей. Математические методы прогнозирования. 2014, №1 с.38-47.
- 7 Xinyi Wang. The Role of Data Mining Technology in Advertising Marketing. J. Phys.: Conf. Ser. 1744 042202, 2021. DOI: 10.1088/1742-6596/1744/4/042202
- 8 Kabanikhin, S.I., Krivorotko, O.I. Mathematical Modeling of the Wuhan COVID-2019 Epidemic and Inverse Problems. Comput.Math.and Math. Phys. 60, 1889–1899 (2020).<https://doi.org/10.1134/S0965542520110068>
- 9 Kabanikhin S., Krivorotko O., Takuadina A., Andornaya D., Zhang. Sh. Geo-information system of tuberculosis spread based on inversion and prediction. Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 2021, vol. 29, no. 1, pp. 65-79, [doi.org/10.1515/jiip-2020-0022](https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0022).
- 10 May R., Anderson R.M. Transmission dynamics of HIV infection. Nature, 1987, vol. 326, pp. 137–142 [doi:10.1038/326137A0](https://doi.org/10.1038/326137A0)
- 11 Roeger L.V., Feng Z., Castillo-Chaves.C. Modelling TB and HIV Co-infections. Mathematical biosciences and engineering, 2009, vol.6, no.4, pp.815-837, [doi:10.3934/mbe.2009.6.815](https://doi.org/10.3934/mbe.2009.6.815)
- 12 S. Kabanikhin, O. Krivorotko and D. Yermolenko, «A parameter identification problem for the mathematical model of HIV dynamics,» 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), Novosibirsk, 2017, pp. 82-86, [doi: 10.1109/SIBIRCON.2017.8109842](https://doi.org/10.1109/SIBIRCON.2017.8109842).
- 13 Banks H.Th.,Kabanikhin. S.I.,Krivorotko O.I, Yermolenko D.V., A numerical algorithm for constructing an individual mathematical model of HIV dynamics at cellular level. [Journal of Inverse and ILL-Posed Problems]. 2018, no.26(6). Pp.859-873.
- 14 Bouchnita A., Bocharov G., Meyerhans A., Volpert V. Towards a multiscale model of acute HIV infection. Computation, 2017, vol.5, no.1(6). pp.1-22, [doi:10.3390/5010006](https://doi.org/10.3390/5010006)
- 15 Omondi. E.O., A mathematical modelling study of HIV infection in two heterosexual age groups in Kenya. Infectious Disease Modelling, 2019, vol. 4, pp. 83-98, [doi:10.1016/j.idm.2019.04.003](https://doi.org/10.1016/j.idm.2019.04.003).

## REFERENCES

- 1 Project OF (2020) «Center for Scientific and Practical Initiatives»  
<https://amanbol.kz/vich/nauka/tpost/ryp0vd2yh1-vich-v-kazahstane-aktualnie-dannie-na-ko>  
(accessed 30 September 2020)

2 2019 Global Monitoring of the AIDS Epidemic (2020). // – UNAIDS Handbook, 2020. – pp.15-21.

3 I.S.Svetunkov, S.G.Svetunkov. Methods of socio-economic forecasting. Volume 1. Theory and methodology. – Moscow: Yurayt, 2015. – 351 p. – ISBN 978-5-9916-4903-2, 978-5-9916-4905-6.

4 A.I.Takuadina. Review of existing mathematical models as effective methods for predicting the spread of the epidemic. V International Scientific and Practical Conference "Europe and the Turkic World: Science, technology and technology" Ankara, Turkey, 6-8 May 2020. Volume 1. pp.108-115.

5 Romaniukha A.A., Nosova E.A. A model of the spread of HIV infection as a result of social maladaptation // Management of large systems, 2011. Issue 34. Moscow: IPU RAS. pp. 227-253.

6 Karach A.S., Romaniukha A.A., Modern approaches to the analysis and prediction of public health using mathematical models. Mathematical methods of forecasting. 2014, No. 1, pp.38-47.

7 Xinyi Wang. The Role of Data Mining Technology in Advertising Marketing. J. Phys.: Conf. Ser. 1744 042202, 2021. DOI: 10.1088/1742-6596/1744/4/042202

8 Kabanikhin, S.I., Krivorotko, O.I. Mathematical Modeling of the Wuhan COVID-2019 Epidemic and Inverse Problems. Comput.Math.and Math. Phys. 60, 1889–1899 (2020).<https://doi.org/10.1134/S0965542520110068>

9 Kabanikhin S., Krivorotko O., Takuadina A., Andornaya D., Zhang. Sh. Geo-information system of tuberculosis spread based on inversion and prediction. Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 2021, vol. 29, no. 1, pp. 65-79, doi.org/10.1515/jiip-2020-0022.

10 May R., Anderson R.M. Transmission dynamics of HIV infection. Nature, 1987, vol. 326, pp. 137–142 doi:10.1038/326137A0

11 Roeger L.V., Feng Z., Castillo-Chaves.C. Modelling TB and HIV Co-infections. Mathematical biosciences and engineering, 2009, vol.6, no.4, pp.815-837, doi:10.3934/mbe.2009.6.815

12 S. Kabanikhin, O. Krivorotko and D. Yermolenko, «A parameter identification problem for the mathematical model of HIV dynamics.» 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), Novosibirsk, 2017, pp. 82-86, doi: 10.1109/SIBIRCON.2017.8109842.

13 Banks H.Th., Kabanikhin. S.I., Krivorotko O.I., Yermolenko D.V., A numerical algorithm for constructing an individual mathematical model of HIV dynamics at cellular level. [Journal of Inverse and ILL-Posed Problems]. 2018, no.26(6). Pp.859-873.

14 Bouchnita A., Bocharov G., Meyerhans A., Volpert V. Towards a multiscale model of acute HIV infection. Computation, 2017, vol.5, no.1(6). pp.1-22, doi:10.3390/5010006

15 Omondi E.O., A mathematical modelling study of HIV infection in two heterosexual age groups in Kenya. Infectious Disease Modelling, 2019, vol. 4, pp. 83-98, doi:10.1016/j.idm.2019.04.003.

***А. Д. КУБЕГЕНОВА<sup>1</sup>, А. И. ТАКУАДИНА<sup>2</sup>, О. И. КРИВОРОТЬКО<sup>3</sup>,  
Ж. Т. НУРУШЕВА<sup>4</sup>***

*<sup>1</sup>НАО «Западно-Казахстанский аграрно-технический университет  
имени Жангир хана», Уральск, Казахстан*

*<sup>2</sup>НАО «Медицинский Университет Караганды», Караганда, Казахстан*

*<sup>3</sup>«Новосибирский государственный университет», Новосибирск, Россия*

*<sup>4</sup>ГКП на ПВХ «Областной центр по профилактике и борьбе со СПИД» Управления  
здравоохранения акимата Западно-Казахстанской области, Уральск, Казахстан*

*E-mail: aigul-03@mail.ru, alyoka.01@mail.ru, krivorotko.olya@mail.ru  
zkoaid.info@gmail.com*

## ТЕХНОЛОГИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ПРОГНОЗИРОВАНИИ ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ ПО ВИЧ-ИНФЕКЦИИ В ЗАПАДНО-КАЗАХСТАНСКОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрены основные направления развития математического моделирования контроля и распространения вируса иммунодефицита человека (ВИЧ-инфекции), динамическая и структурная классификации эпидемического процесса. Из областного центра по профилактике и борьбе со СПИД Управления здравоохранения акимата Западно-Казakhstanской области взяты статистические данные по Западно-Казakhstanской области за период 2010-2020 годы, с описанием распространения вируса в зависимости от имеющихся данных и задач в мире и по Республике Казахстан, проведен ретроспективный, кластерный анализ ВИЧ-инфицированных.

Дана характеристика графика заболеваемости, выявлен риск, проверены статистические прогнозы заболеваемости.

В научных и практических исследованиях распространённость критериев и наблюдений за эпидемией рассматривалась со стороны информационных технологий. Приведены примеры с использованием системы прогнозирования и существующих интеллектуальных систем математической модели. Одним из важных направлений является прогнозирование последствий эпидемии ВИЧ, изучение иммунологической динамики внутри одного организма, проблема прогнозирования развития эпидемической ситуации на уровне населения.

Для обработки ВИЧ-инфицированных и анализа ситуации по возрастным особенностям были использованы методы классификации Data Mining.

Прогноз заболеваемости Западно-Казakhstanской области по возрастной группе ВИЧ-инфицированных за 10-летний период проводилось с помощью пакета прикладных программ Statistica.

**Ключевые слова:** ретроспективный анализ, кластерный анализ, евклидово расстояние, Data Mining, Statistica advanced.

**A. D. KUBEGENOVA<sup>1</sup>, A. I. TAKUADINA<sup>2</sup>, O. I. KRIVOROTKO<sup>3</sup>,  
ZH. T. NURUSHEVA<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Non-profit JSC «West Kazakhstan Agrarian and Technical University named after Zhangir Khan» Uralsk, Kazakhstan

<sup>2</sup>Non-profit JSC «Karaganda Medical University», Karaganda, Kazakhstan

<sup>3</sup>«Novosibirsk State University», Novosibirsk, Russia

<sup>4</sup>SME on the REM «Regional Center for the Prevention and Control of AIDS» of the Health Department of the Akimat of the West Kazakhstan region, Uralsk, Kazakhstan

E-mail: aigul-03@mail.ru, alyoka.01@mail.ru, krivorotko.olya@mail.ru  
zkoaid.info@gmail.com

## THE TECHNOLOGY OF INTELLIGENT ANALYSIS IN PREDICTING THE EPIDEMIOLOGICAL SITUATION OF HIV INFECTION IN THE WEST KAZAKHSTAN REGION

The article uses the main directions of development of mathematical modeling of control and spread of human immunodeficiency virus (HIV infection), dynamic and structural classification of the epidemic process. Statistical data on the West Kazakhstan region for the period 2010-2020 were taken from the regional center for the prevention and control of AIDS of the health department of the Akimat of the West Kazakhstan region, with a description of the spread of the virus, depending on the available data and tasks

*in the world and in the Republic of Kazakhstan, a retrospective, cluster analysis of HIV-infected people was carried out.*

*The characteristics of the morbidity schedule are given, the risk is identified, statistical forecasts of morbidity are checked.*

*In scientific and practical studies, the prevalence of criteria and observations of the epidemic was considered from the information technology side. Examples are given using a forecasting system and existing intelligent mathematical model systems. One of the important directions is the prediction of the consequences of the HIV epidemic, the study of immunological dynamics within one organism, the problem of predicting the development of the epidemic situation at the population level.*

*Data Mining classification methods were used to process HIV-infected people and analyze the situation by age characteristics.*

*The prognosis of the morbidity of the West Kazakhstan region by the age group of HIV-infected people over a 10-year period was carried out using the Statistica application software package.*

**Key words:** *retrospective analysis, cluster analysis, Euclidean distance, Data Mining, Statistica advanced.*



**R. MOLDASHEVA<sup>1\*</sup>, A. ISMAILOVA<sup>1</sup>, A. ZADAGALI<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*S. Seifullin Kazakh Agrotechnical University, Nur-Sultan, Kazakhstan*

<sup>2</sup>*L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*  
*raushan85\_07@mail.ru, a.ismailova@mail.ru, z.a.aizhan1993@gmail.com*

## **SIGNS OF STABILITY OF AQUATIC ECOSYSTEMS IN MATHEMATICAL MODELS**

*To date, various data on water resources have been accumulated, but hydrobiological and hydrochemical indicators remain available to assess the current state of aquatic ecosystems, which can be the basis for assessing the environmental situation within the water body. Systematization of multi-year and diverse data on the lakes and rivers of the country, the use of mathematical tools for assessing and forecasting the state of the aquatic ecosystem is impossible without the use of information and communication technologies. Quality mathematical modeling of aquatic ecosystems and the development of information and analytical system for the study of aquatic ecosystems is an urgent task, including databases of various-quality data on the water body and its ecosystem, data management and processing tools, as well as a set of mathematical models for the functioning of the water body ecosystem.*

*Research is based on information technology, statistical data processing, and mathematical modeling. Mathematical models are based on systems of differential equations, solutions are sought with the help of own computing programs and software suites (Maple, Matlab, Mathematics, etc.). When possible, modeling includes analytical studies of the properties of solutions, primarily this concerns stationary or spatially homogeneous solutions, as well as asymptotic properties of solutions. The lower trophic levels of the water body ecosystem are studied, as this determines the functioning of aquatic ecosystems. The species composition of phytoplankton is an indicator of the ecological state of the water body. Based on the quantitative characteristics of phytoplankton, the bioproductivity of the aquatic ecosystem is calculated. The physical and chemical characteristics of water allow drawing conclusions about the pollution of the water body and the composition of mineral nutrition for phytoplankton.*

**Key words:** *mathematical modeling, information-analytical system, aquatic ecosystem, database, phytoplankton*

**Introduction.** At present, all aquatic ecosystems are subject to varying degrees of anthropogenic stress due to global processes taking place on the planet. The analysis of the effects of such an influence is difficult but important for the development and change of the natural system. Using mathematical models is reasonable to carry out such an analysis.

The first exciting scientific results in mathematical ecology were obtained in the twenties and thirties of the last century: it should not go unmentioned the works of A.V. Kostitsyn [1], related to hydrobiology, and as of the second half of the twentieth century - the works of S.E. Jorgensen, M. Strashcraba [2], considering the issues of mathematical modeling of freshwater ecosystems, V.V. Menshutkin [3] – considering the issues of simulation modeling of aquatic ecosystems, the works of the scientific school of the academician I.I. Vorovich [4], devoted to the mathematical modeling of ecological and economic systems, etc. In general, the considered works developed conceptual approaches to the mathematical description of the processes of life of aquatic organisms and aquatic ecosystems commu-

---

\* E-mail корреспондирующего автора: [raushan\\_mn@mail.ru](mailto:raushan_mn@mail.ru)

nities (descriptive models), qualitative models (clarifying the dynamic mechanism of the studied process and making it possible to reproduce the observed dynamic effects in the behavior of the system); simulation models of specific complex systems, taking into account all available information about the object (and allowing to predict the behavior of systems or solve the optimization problems of their operation) [5].

Modeling is one of the most important methods of scientific cognition, using which a model (conditional image) of the research object is built. Its essence is that the relationship of the studied phenomena and factors is presented in the form of specific mathematical equations. The process of building a mathematical model includes the following typical stages [6]:

- formulation of the modeling objectives;
- qualitative analysis of the ecosystem based on these objectives;
- formulation of laws and plausible hypotheses regarding the structure of the ecosystem, the mechanisms of its behavior in general or individual parts (when self-organized, computer "finds" these laws);
- identification of the model (determination of its parameters);
- verification of the model (verification of its functionality and assessment of the degree of appropriateness to a real ecosystem);
- study of the model (analysis of the stability of its solutions, sensitivity to changes in parameters, etc.) and experiment with it.

Many processes in water bodies have not yet been studied in sufficient detail. The processes of study continue, followed by and together with meaningful cognition there comes information support and formal analysis in the form of data processing, mathematical modeling.

The development of mathematical methods of environmental forecasting is necessary both for the optimization of environmental management and for the serious scientific substantiation of programs in the field of environmental quality management and nature protection. Mathematical models of aquatic ecosystems allow us to describe non-equilibrium dynamic processes in hydrobiocenoses under various external influences, such as changes in water temperature, surface illumination, water or biogenic load, meteorological conditions. The building of such models requires a large amount of information about the parameters of geophysical, geochemical, biological, and other natural processes, the comprehension of which is impossible without the involvement of modern information technologies [7, 8].

**Materials and methods of the study.** The use of the tools for mathematical modeling of surface water quality is explained by the need to assess the quality of surface water.

Dynamic models of biological systems adapted to aquatic plant microorganism communities were systematized and analyzed. Such qualitative analytical models of the dynamics of aquatic ecosystems describe the mechanisms of functioning of ecosystems: changes in the state of the aquatic environment due to physicochemical transformations, the dynamics of the living component of the ecosystem (biological community).

**The body. Outcomes.** When studying aquatic ecosystems, problems arise in the complexity and diversity of the processes studied. These difficulties are compounded by the inaccuracy of available data and the lack of information at all. Nevertheless, modeling under such conditions is possible and even necessary. Without models, the quantitative

characteristics of processes cannot be assessed more or less satisfactorily. And the fact is that the data obtained while different field surveys are often not well consistent with time, space, measurement methods, etc. For answers to questions about the functioning of a large aquatic ecosystem, one can not do without mathematical modeling [9].

Multiple coherent models, rather than one, can be used to improve the modeling of aquatic ecosystems. Start with some idealized, closed models, then move to open ones, possibly more appropriate to real objects. Let us describe one implementation of such an approach [10].

First, we build so-called *closed* ecosystem models. Closedness is understood as a closed state of a model, quantity. It relates only to the modeled characteristics and is conditional in nature, in contrast to the closedness or isolation of the ecosystem itself [11].

Having considered the properties and modified the closed models, it is necessary to move to quantitatively open models. The solution of open models is calculated using the properties of closed model solutions, such a transition is possible. The open model becomes appropriate. However, it is necessary to build a set of models interconnected for the selected ecological system. In short, they must be coherent.

Let the state of the ecosystem at time  $t$  be described by an  $n$ -dimensional vector  $x(t)$ , the components of which are the essence of the biomass or mass of the isolated blocks of the ecosystem. We build the model on the basis of a self-sustained system of differential equations of the approach, formula (1) [10, p. 1401]:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, a) \quad (1)$$

Parameters of vector  $a$ , the content of which is unknown or inaccurately determined.

Let us write another model describing the same ecological system, expression (2):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = g(y, b) \quad (2)$$

where  $y$  – is a vector of biomass,  $b$  – unknown parameters.

The studied object is the same and the vectors  $x, y$  have the following relationship:

$$h(x, y, c) = 0 \quad (3)$$

$c$  – unknown or inaccurately known set of parameters [12].

Shall the parameters, structures, and solution be coherent, it can be determined that the models are coherent. In the works of Doctor of Physics and Mathematics, Professor A.I. Abakumov, these concepts are formalized: first, he calculated the complete derivative  $\frac{\partial h}{\partial t}$  across the solutions of the systems of equations (1) and (2) and found the parameters  $a, b, c$  from the condition of the proximity of this derivative to zero, expression (4) [12, p.1403]:

$$\left\| \frac{\partial h(x, y, c)}{\partial x} \cdot f(x, a) + \frac{\partial h(x, y, c)}{\partial y} g(y, b) \right\| \xrightarrow{(a, b, c)} \inf \quad (4)$$

Where  $\|\cdot\|$  denotes the norm in the space of measurable square-integrated functions. Condition (4) means coherence of velocities, phase variables, not the  $x, y$  variables themselves, as recorded in condition (3). At the same time, we make the models coherent not only in solutions of ordinary differential equations but also in some set of changes in the variables  $x, y$ . So, formally, the *coherence* of the models is determined by condition (4) to select the parameters  $a, b, c$ . However, the choice of a set of variable parameters is informal, to a large extent, it is determined by the content characteristics of the models [12, p.16].

**Discussion.** Within the framework of a multi-model approach to the study of natural biosystems, closed and open models, models with and without regard to the internal state of organisms, are considered. In closed models there is a continuum set of positive equilibrium solutions, in open models there is a finite set of isolated non-negative equilibrium solutions. In models without taking into account the intracellular content of the substance, it is possible to prove the stability of equilibrium solutions, including using the signs of structural stability (sign-stability). In models with regard to intracellular nutrient content, this can be done with some limitations, although on the basis of computational experiments there remains an idea of the correctness of the stability properties for this group of models as a whole.

Signs of stability of aquatic ecosystems in mathematical models have been identified: the properties of sustainability of solutions are model signs of stability of aquatic ecosystems.

**Conclusion.** In conclusion, it should be noted that in order to study aquatic ecosystems and communities of water organisms in detail, it is necessary to use a set of mathematical models for the same object. This determines the effectiveness of using the information at our disposal. Data on aquatic ecosystems are collected from a variety of sources and all of these data can be collected and applied in a set of coherent models.

The stability properties of solutions are model signs of stability of aquatic ecosystems.

## REFERENCES

- 1 Kostitsyn V.A. Evolution of the Atmosphere, Biosphere and Climate / trans. from French; ed. from ed. N.N. Moissejeva. - M.: Nauka, 1984. - 96 p.
- 2 Jorgensen S.E., Loffler H., Rast W., Straskraba M. Lake and Reservoir Management // Elsevier. - 2005. - 512 p.
- 3 Menshutkin V.V. Mathematical Modeling of Populations and Communities of Aquatic Animals. - L.: Nauka, 1971. - 196 p.
- 4 Rational Use of Water Resources of the Azov Sea Basin/ ed. I.I. Vorovich. - M.: Nauka, 1981. - 360 p.
- 5 Poluektov R.A., Pykh Yu.A., Shvytov I.A. Dynamic Models of Ecological Systems. - L.: Gidrometeoizdat, 1980. - 288 p.
- 6 Shitikov V.K., Rosenberg G.S., Zinchenko T.D. Quantitative Hydroecology: Methods of Systemic Identification. - Togliatti: IEVB RAS, 2003. - 463 p.
- 7 Antonovskiy M.Ya., Semyonov S.M. Mathematical Methods of Environmental Forecasting. - M.: Znaniye, 1978. - 67 p.
- 8 Ismailova A.A. Theoretical Foundations and Concept of Solutions to Problems of Studying Biological Objects and Environmental Monitoring by Methods of Mathematics and Computer Science // Theory of Models and Algebra: Mater. International Conf. - Karaganda, 2012. - P. 79-81.

9 Ismailova A., Abakumov A., Adamov. A. Modeling of Microbial Communities of Plant Organisms in Aquatic Ecosystem //International Journal of INFORMATION. – 2014. – Vol.17, No.1. – P. 209-218.

10 Abakumov a.i., Giricheva E.E. Multi-Model Approach to the Study of Aquatic Ecosystems // Izvestiya Samara Scientific Center of the RAS. – 2009. – Vol. 11, No. 1(7). – P. 1399-1402.

11 Gubanov V.G., Degermenji A.G. On the Confinement of the Biotic Cycle of Matter in Supraorganismal Systems (Methodological Aspect). Biotic Confinement Measure// Essays of Ecological Biophysics. Novosibirsk: Publishing House of Siberian Branch of RAS, 2003. – P. 318-333.

12 Abakumov A.I., Pak S.Ya. Dynamics of Phytoplankton Abundance Depending on Mineral Nutrition (Mathematical Models) // Informatics and Control Systems. – 2010. – No. 3 (25). – P. 10-19.

**Р. Н. МОЛДАШЕВА<sup>1</sup>, А. А. ИСМАИЛОВА<sup>1</sup>, А. М. ЗАДАҒАЛИ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>С. Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті,  
Нұр-Сұлтан, Қазақстан

<sup>2</sup>Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

## **МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРДЕ СУ ЭКОЖҮЙЕЛЕРІНІҢ ТҰРАҚТЫЛЫҒЫ БЕЛГІЛЕРІ**

Қазіргі уақытта су ресурстары туралы түрлі деректер жинақталған, дегенмен су экожүйелерінің ағымдағы жағдайын бағалау үшін қолжетімді параметрлер болып гидробиологиялық және гидрохимиялық көрсеткіштер болып табылады, олар суқоймалары ішіндегі экологиялық жағдайды бағалау үшін негіз бола алады. Еліміздің көлдері мен өзендері туралы көп жылдық және әр түрлі деректерді жүйелеу, ақпараттық-коммуникациялық технологияларды пайдаланбай, су экожүйесінің жағдайын бағалау және болжау үшін математикалық аппараттарды қолдану мүмкін емес. Су экожүйелерін сапалы математикалық модельдеу және су экожүйелерін зерттеудің ақпараттық-аналитикалық жүйесін дамыту су қоймасы мен оның экожүйесі туралы әртүрлі сапалы мәліметтер базасын, деректерді басқару және өңдеу құралдарын, сондай-ақ су экожүйесінің жұмыс атқаруының математикалық модельдерінің кешенін қамтитын өзекті мәселе болып табылады. Су экожүйелерін сапалы математикалық модельдеу және су экожүйелерін зерттеудің ақпараттық-аналитикалық жүйесін дамыту су қоймасы мен оның экожүйесі туралы әртүрлі сапалы мәліметтер базасын, деректерді басқару және өңдеу құралдарын, сондай-ақ су экожүйесінің жұмыс істеуінің математикалық модельдерінің кешенін қамтитын өзекті мәселе болып табылады.

Зерттеулер ақпараттық технологияларға, деректерді статистикалық өңдеуге және математикалық модельдеуге негізделген. Математикалық модельдер дифференциалдық теңдеулер жүйесіне негізделген, шешімдері жеке есептеу бағдарламалары мен компьютерлік пакеттерінің (Maple, Matlab, Mathematics және т.б.) көмегімен шешіледі.

Мүмкіндігінше, модельдерде шешімдер қасиеттеріне аналитикалық зерттеулер жүргізіледі, ең алдымен бұл стационарлық немесе кеңістіктегі біртекті шешімдерге, сондай-ақ шешімдердің асимптотикалық қасиеттеріне қатысты. Су қоймаларының экожүйесінің төменгі трофикалық деңгейлері зерттеледі, себебі бұл су экожүйелерінің жұмысын анықтайды. Фитопланктонның түрлік құрамы су қоймасының экологиялық жағдайының индикаторы болып табылады.

Фитопланктонның сандық сипаттамалары негізінде су экожүйесінің биологиялық өнімділігі есептеледі. Судың физика-химиялық сипаттамалары су қоймалардың ластануы мен фитопланктон үшін минералды тамақтану құрамы туралы қорытынды жасауға мүмкіндік береді.

*Түйін сөздер:* математикалық модельдеу, ақпараттық-аналитикалық жүйе, су экожүйесі, деректер қоры.

**Р. Н. МОЛДАШЕВА<sup>1</sup>, А. А. ИСМАИЛОВА<sup>1</sup>, А. М. ЗАДАҒАЛИ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Казахский агротехнический университет им. С. Сейфуллина,  
Нур-Султан, Казахстан

<sup>2</sup>Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,  
Нур-Султан, Казахстан

## **ПРИЗНАКИ СТАБИЛЬНОСТИ ВОДНЫХ ЭКОСИСТЕМ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ**

На сегодняшний день накоплены различные данные о водных ресурсах, однако доступными параметрами для оценки текущего состояния водных экосистем остаются гидробиологические и гидрохимические показатели, которые могут быть основой для оценки экологической ситуации внутри водоема. Систематизация многолетних и разнообразных данных об озерах и реках страны, применение математических аппаратов для оценки и прогнозирования состояния водной экосистемы невозможно без использования информационно-коммуникационных технологий. Качественное математическое моделирование водных экосистем и разработка Информационно-аналитической системы исследования водных экосистем является актуальной задачей, включающей базы разнокачественных данных о водоеме и его экосистеме, средства управления данными и их обработки, а также комплекс математических моделей функционирования экосистемы водоема.

В основу исследований положены информационные технологии, статистическая обработка данных и математическое моделирование. Математические модели основаны на системах дифференциальных уравнений, решения ищутся с помощью собственных вычислительных программ и вычислительных компьютерных пакетов (Maple, Matlab, Mathematics и т.д.). По возможности в моделях проводятся аналитические исследования свойств решений, в первую очередь это касается стационарных или однородных по пространству решений, а также асимптотических свойств решений. Исследуются нижние трофические уровни экосистемы водоема, так как этим определяется функционирование водных экосистем. Видовой состав фитопланктона является индикатором экологического состояния водоема. На основе количественных характеристик фитопланктона рассчитывается биопродуктивность водной экосистемы. Физико-химические характеристики воды позволяют сделать выводы о загрязнении водоема и составе минерального питания для фитопланктона.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, информационно-аналитическая система, водная экосистема, база данных, фитопланктон.



**Т. Т. МУСАБАЕВ<sup>1,2\*</sup>, Е. Б. АҚМАНБЕТОВ<sup>1</sup>, А. Р. НИЕТТЕСОВА<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> РГП «Республиканский центр государственного градостроительного планирования и кадастра», г. Нур-Султан, Казахстан

<sup>2</sup> Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,  
г. Нур-Султан, Казахстан  
e-mail: [eti.enu@mail.ru](mailto:eti.enu@mail.ru)

## **МОНИТОРИНГ СОСТОЯНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ КОММУНИКАЦИЙ БЕСПИЛОТНЫМИ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ**

*В статье рассмотрены актуальные вопросы необходимости использования беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) для решения инженерно-геодезических задач при ведении государственного градостроительного кадастра. Кроме того, мониторинг является важной составной частью мероприятий по обеспечению устойчивости и безопасной эксплуатации инженерных объектов в разных климатических условиях. Представлены результаты применения беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) при исследовании, мониторинге и учете надземных инженерных коммуникаций для принятия управленческих решений по проведению мероприятий, направленных на уменьшение негативного воздействия техногенного и природного характера.*

**Ключевые слова:** ортофотоплан, инженерные коммуникации, магистральные трубопроводы, мониторинг, беспилотные летательные аппараты.

Технологический рост, инновации, модернизация и цифровизация городских и региональных ресурсов и их системы – основа успешного социально-экономического развития, конкурентоспособности и сотрудничества крупных городов и регионов.

В Послании народу Казахстана от 1 сентября 2020 года «Казахстан в новой реальности: время действий» Главой государства отмечена необходимость цифровизации земельных отношений и перестроения подходов к территориальному и пространственному развитию страны [1]. На VIII съезде Национальной палаты предпринимателей «Атамекен» 28 сентября 2021 года Президент указал на важность продолжения активного внедрения цифровых решений и подчеркнул, что оцифровка информации об инженерных коммуникациях, земельных участках, генеральных планах застройки, доступных мощностях являются ключевыми факторами производства [2, 3].

В соответствии с Законом «Об архитектурной, градостроительной и строительной деятельности в Республике Казахстан» государственный градостроительный кадастр содержит сведения о предыдущем и современном состоянии территорий, зданий и сооружений, малых архитектурных форм и элементов благоустройства, а также о градостроительном планировании и застройке территорий и населенных пунктов, данные о принадлежности территорий и объектов к соответствующим функциональным зонам, их настоящем и перспективном назначении, экологической, инженерно-геологической, гидрогеологической, геотехнической и сейсмической ситуациях, инженерной обеспеченности [4].

---

\* E-mail корреспондирующего автора: [eti.enu@mail.ru](mailto:eti.enu@mail.ru)

Таким образом, градостроительный кадастр представляет собой обширный кластер данных, так или иначе связанных с пространственно-территориальной привязкой к местности [5]. При всестороннем рассмотрении возможных путей получения сведений для актуализации баз данных градостроительного кадастра особое внимание уделяется методам аэрофотосъемки как наиболее прогрессивному методу представления фактического состояния тех или иных территорий.

Результатом обработки снимков БПЛА являются ортофотопланы. Ортофотоплан – это фотографический план местности на точной геодезической основе, полученный в процессе обработки аэрофотоснимков с устранением искажений в специализированных компьютерных программах.

Целью мониторинга трубопроводов инженерных коммуникаций является визуальное и приборное определение потенциально опасных участков магистральных трубопроводов, обнаружение нарушений как на самом объекте, так и в охранных зонах объектов инженерных коммуникаций, определение влияния выявленных факторов для принятия управленческих решений по проведению мероприятий, направленных на уменьшение негативного воздействия техногенного и природного характера [6].

Территория прокладки инженерных коммуникаций является динамично развивающейся системой с постоянно меняющимися и обновляющимися характеристиками. Одна из особенностей данной системы – сложная сеть инженерных коммуникаций, переплетающихся между собой. Следовательно, постоянный учет и мониторинг объектов настоящей системы и актуализация данных является важным компонентом ведения государственного градостроительного кадастра.

Безопасное функционирование инженерных коммуникаций регламентировано законодательными и нормативными актами, определяющими в том числе необходимость контроля пространственного положения линейных объектов.

Мониторинг состояния трубопроводов по ортофотопланам в основном производится для надземной части инженерных сетей и может осуществляться по следующим направлениям:

- определение опасных процессов экзогенного характера: развитие оврагов, балок и промоин, эрозионные зоны, развитие оползней, осыпей и другие;

- выявление обводненных и заболоченных территорий в охранных зонах инженерных сетей;

- обнаружение несоответствий нормативным правовым актам;

- выявление техногенных объектов и процессов в зонах отвода и охранных зонах инженерных сетей: строительство, участки техногенно-вскрытых грунтов, свалки, включая нелегитимные объекты (несанкционированные врезки);

- дифференциация типов растительности вдоль трасс коммуникаций: древесная, кустарниковая и травяная растительность;

- координация темпов ремонта трубопроводов, иных работ по поддержанию охранной зоны в надлежащем состоянии.

В настоящей статье исследованы ортофотопланы застроенной территории городов Усть-Каменогорск и Кызылорда. Съемка производилась беспилотным летательным аппаратом самолетного типа Delair UX11, характеристики которого соответствуют целям и задачам выполняемых работ.

На рис. 1 представлена строительная площадка с техногенно-вскрытым грунтом для прокладки трубопроводов подземной ливневой канализации диаметром 500 мм из материала поливинилхлорид, отличающимся надежностью при высоких нагрузках и значительных перепадах температур. На ортофотоплане можно наблюдать количество трубопроводов, подготовленные люки и колодцы ливневых канализационных сетей.



**Рисунок 1** – Участок застроенной территории города Усть-Каменогорск со строящейся подземной ливневой канализацией

Пример выявления обводненных территорий в охранных зонах инженерных сетей представлен на рис. 2. Охранная зона тепловых сетей – это земельные участки, отведенные в целях обеспечения сохранности тепловых сетей, создания нормальных условий эксплуатации, предотвращения их повреждений, а также несчастных случаев среди населения, оказавшегося в охранной зоне этих сетей. При диаметре 600 мм наземного трубопровода теплоснабжения охранная зона устанавливается в виде участка земли вдоль трассы, на рассматриваемом участке наблюдается техногенное подтопление территории отвода вдоль перехода надземной прокладки в подземную в обе стороны на расстоянии 25 м [7, 8].

При исследовании карты высот данного участка определено северное направление стока в сторону бетонного ограждения (рис. 2). Подтопление указанного участка свидетельствует о неудавшейся попытке регулирования водного стока с помощью арыков, что говорит о нарушении природного динамического равновесия в водном балансе территории при изменении условий поверхностного стока.

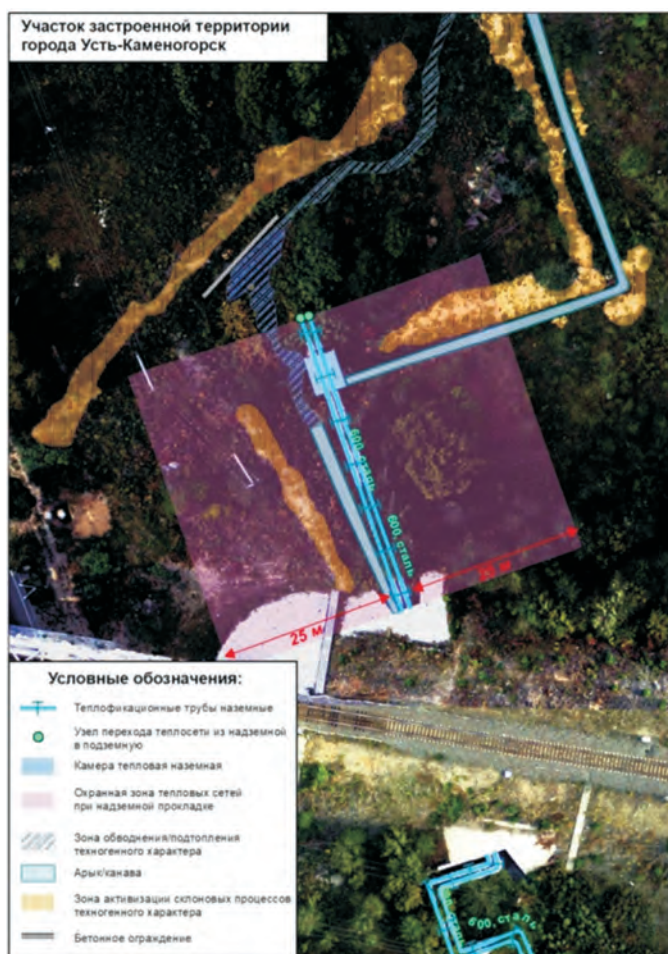


Рисунок 2 – Участок застроенной территории города Усть-Каменогорск с подтоплением охранной зоны теплотрассы вдоль перехода надземной прокладки в подземную



Помимо подтопления на рассматриваемой территории наблюдается активизация склоновых процессов техногенного характера (рис. 2), так как строительство дорог (в т.ч. железных дорог) и иных инженерных сооружений вызывает формирование осыпей. Следует отметить, что выделенная зона склонов не закреплена древесной и травяной растительностью.

При исследовании высокоточных ортофотопланов возможен мониторинг и учет типов растительных сообществ вдоль трасс коммуникаций. Так, на рис. 3 выделены 3 основных яруса растительных сообществ на участке, охватывающем охранную зону надземной магистральной теплотрассы. Древесный ярус представлен лиственным древостоем, тогда как территория отвода теплотрассы представлена более молодым подростом или подлеском (рис. 3 и рис. 4).



Рисунок 3 – Участок застроенной территории города Усть-Каменогорск с выделением ярусов растительных сообществ вдоль теплотрассы

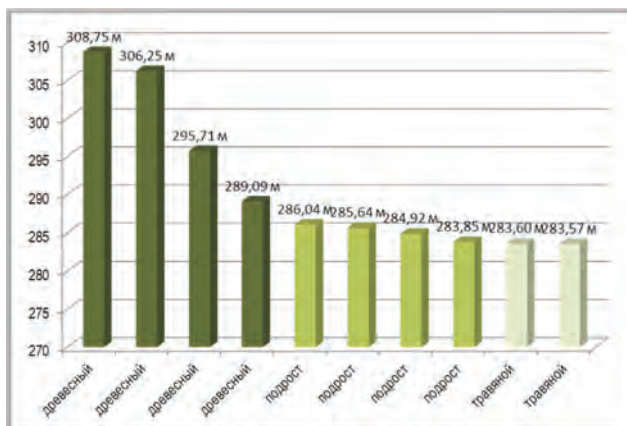
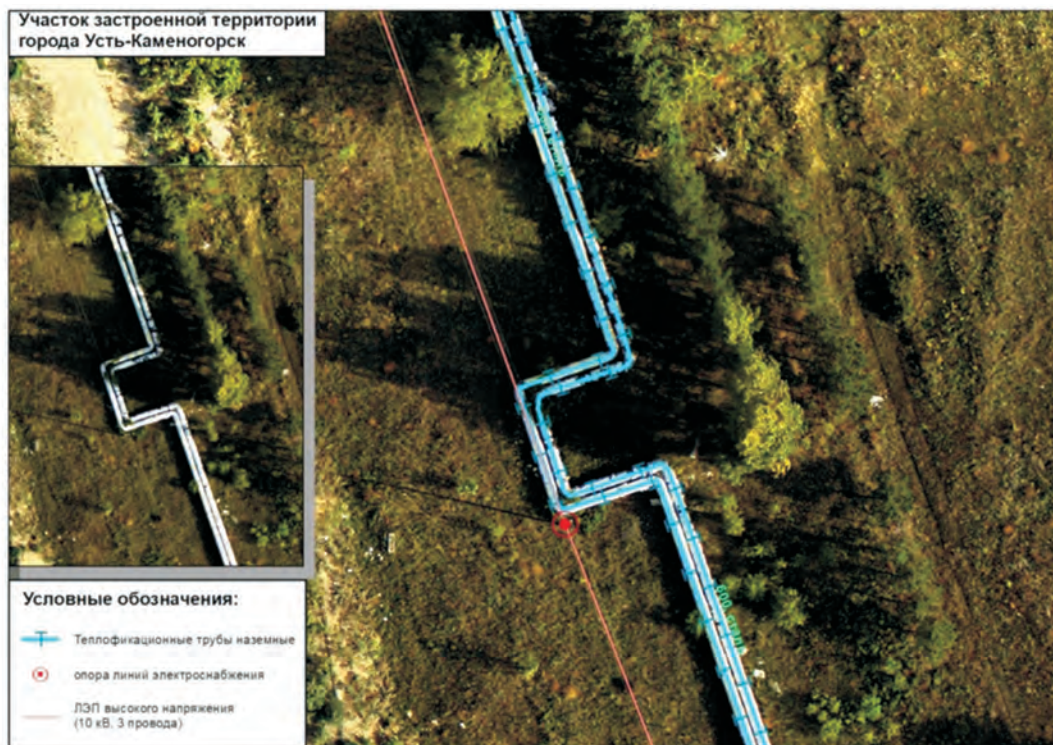


Рисунок 4 – Высотные отметки ярусов растительных сообществ на указанном участке (рис. 3) застроенной территории города Усть-Каменогорск

По карте высот участка ортофотоплана определены высотные отметки древесного и травяного ярусов, а также отметки подроста. Наибольшая разница в высотах между древостоем и подростом составила около 22 м, наименьшая – около 5 м; что говорит о том, что второй ярус действительно является подростом, поскольку подрост способен стать главным ярусом древостоя, тогда как подлесок образует древесный полог [9].

На нижеуказанных схемах выявлены несоответствия Правилам № 331 от 28 сентября 2017 года (далее - Правила) установления охранных зон объектов тепловых сетей и особых условий использования земельных участков, расположенных в границах таких зон. Согласно Приложению 1 Правил, расстояние по горизонтали опор и ЛЭП высокого напряжения (более 1 до 20 кВ) от надземной прокладки теплотрасс должно составлять 3 метра. Однако на рис. 5 и рис. 6 данное нормативное расстояние не соблюдено и составляет 0,5 м и 2,1 м соответственно.



**Рисунок 5** – Участок застроенной территории города Усть-Каменогорск и нарушение нормативного расстояния ЛЭП высокого напряжения от надземной теплотрассы





Рисунок 6 – Участок застроенной территории города Кызылорда и нарушение нормативного расстояния ЛЭП высокого напряжения от надземной теплотрассы

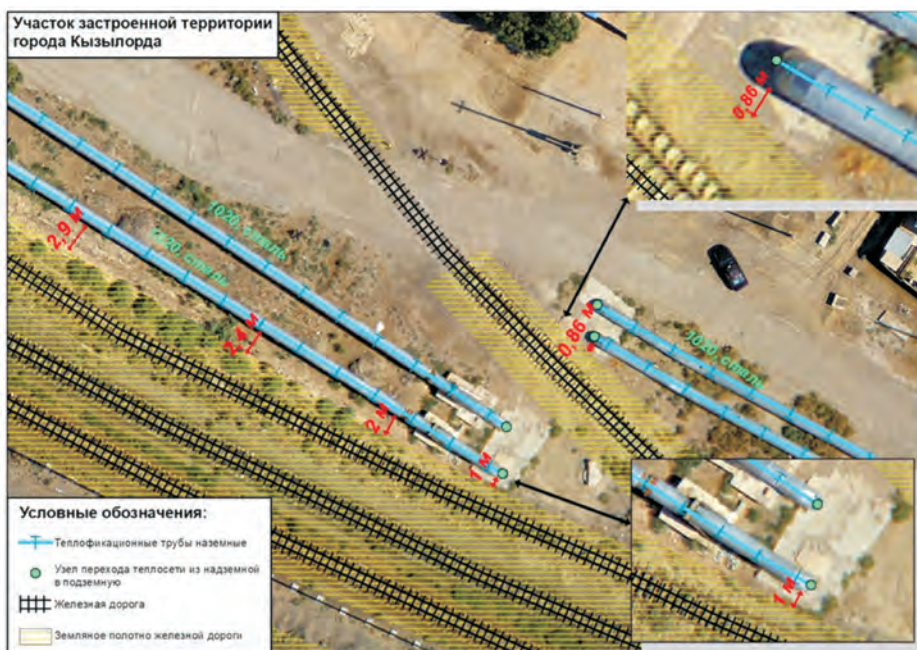


Рисунок 7 – Участок застроенной территории города Кызылорда с нарушением расстояния земляного полотна железной дороги от надземной теплотрассы

При исследовании территории железнодорожного транспорта обнаружено несоответствие Правилам (Приложению 1), где расстояние по горизонтали земляного полотна железных дорог от надземной теплотрассы должно быть не менее 3 метров. На рис. 7 это нормативное расстояние не учитывалось.

Таким образом, применение ортофотопланов при исследовании, мониторинге и учете надземных инженерных коммуникаций для решения инженерно-геодезических задач во многом упрощает и повышает эффективность проводимых работ; использование ортофотопланов дает возможность комплексно изучить состояние линейного объекта, включая контроль развития экзогенных и иных процессов и несоответствий нормативным правовым актам [9].

Объективное представление о текущем техническом состоянии объектов и территории даст возможность местным исполнительным органам и потенциальным инвесторам принимать оптимальные управленческие решения. Использование ортофотопланов станет единым достоверным источником данных о состоянии инфраструктуры, а также повысит эффективность планирования и застройки территории, реализации инвестиционных проектов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Послание Главы государства народу Казахстана «Казахстан в новой реальности: время действий» от 1 сентября 2020 года;

2 Официальный сайт Президента Республики Казахстан [Электронный ресурс] // Глава государства принял участие в VIII съезде Национальной палаты предпринимателей «Атамекен». – Режим доступа: <https://www.akorda.kz/ru/glava-gosudarstva-prinyal-uchastie-v-viii-sezde-nacionalnoy-palaty-predprinimateley-atameken-2884739>, дата обращения: 20.12.2021 г.;

3 Официальный сайт Национальная палата предпринимателей Республики Казахстан «Атамекен» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://atameken.kz/ru/news/45164-vyjti-iz-pandemii-s-men-shimi-poteryami-o-chem-govorili-na-viii-езде-npp-atameken>, дата обращения: 20.12.2021 г. [Ofitsial'nyy sayt Natsional'naya palata predprinimateley Respubliki Kazakhstan «Atameken»];

4 Закон Республики Казахстан от 16 июля 2001 года № 242-III «Об архитектурной, градостроительной и строительной деятельности в Республике Казахстан»;

5 Елизаров А.С., Курчатова А.Н. Мониторинг надземных трубопроводов с помощью глобальных навигационных спутниковых систем // Вестник СГУГиТ, Том 25, № 1, 2020 (28);

6 Макарычева Е.М. и др. 3D-ГИС для сопровождения работ по геотехническому мониторингу объектов магистральных трубопроводов // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. 2020. Т. 10. № 4. (342);

7 Приказ Министра энергетики Республики Казахстан от 22 января 2015 года № 32 «Об утверждении Правил организации охраны магистральных трубопроводов»;

8 Приказ Министра энергетики Республики Казахстан от 28 сентября 2017 года № 331 «Об утверждении Правил установления охранных зон объектов тепловых сетей и особых условий использования земельных участков, расположенных в границах таких зон»;

9 Мусабаев Т.Т., Ниеттесова А.Р. Применение беспилотных летательных аппаратов в градостроительном кадастре // Инновационные подходы в современной науке. сб. ст. по материалам междунар. науч.-практ. конф. – № 1 (85). – М., Изд. «Интернаука», 2021, С. 74-78.

## REFERENCES

- 1 Poslaniye Glavy gosudarstva narodu Kazakhstana «Kazakhstan v novoy realnosti: vremya deystviy» ot 1 sentyabrya 2020 goda;
- 2 Ofitsialnyy sayt Prezidenta Respubliki Kazakhstan [Elektronnyy resurs] // Glava gosudarstva prinyal uchastie v VIII syezde Natsionalnoy palaty predprinimateley «Atameken. – Rezhim dostupa: <https://www.akorda.kz/ru/glava-gosudarstva-prinyal-uchastie-v-viii-sezde-nacionalnoy-palaty-predprinimateley-atameken-2884739>. data obrashcheniya: 20.12.2021 g.;
- 3 Ofitsialnyy sayt Natsionalnaya palata predprinimateley Respubliki Kazakhstan «Atameken» [Elektronnyy resurs]. – Rezhim dostupa: <https://atameken.kz/ru/news/45164-vyjti-iz-pandemii-s-men-shimi-poteryami-o-chem-govorili-na-viii-sezde-npp-atameken>. data obrashcheniya: 20.12.2021 g. [Ofitsial'nyy sayt Natsional'naya palata predprinimateley Respubliki Kazakhstan «Atameken»];
- 4 Zakon Respubliki Kazakhstan ot 16 iyulya 2001 goda № 242-II «Ob arkhitekturnoy. gradostroitelnoy i stroitelnoy deyatel'nosti v Respublike Kazakhstan»;
- 5 Elizarov A.S., Kurchatova A.N. Monitoring nadzemnykh truboprovodov s pomoshchyu globalnykh navigatsionnykh sputnikovyykh sistem // Vestnik SGUGiT. Tom 25. № 1. 2020 (28);
- 6 Makarycheva E.M. i dr. 3D-GIS dlya soprovozhdeniya rabot po geotekhnicheskomu monitoringu ob'ektov magistralnykh truboprovodov // Nauka i tekhnologii truboprovodnogo transporta nef'ti i nef'teproduktov. 2020. T. 10. № 4. (342);
- 7 Prikaz Ministra energetiki Respubliki Kazakhstan ot 22 yanvarya 2015 goda № 32 «Ob utverzhdenii Pravil organizatsii okhrany magistralnykh truboprovodov»;
- 8 Prikaz Ministra energetiki Respubliki Kazakhstan ot 28 sentyabrya 2017 goda № 331 «Ob utverzhdenii Pravil ustanovleniya okhrannykh zon ob'ektov teplovykh setey i osobykh usloviy ispolzovaniya zemelnykh uchastkov. raspolozhennykh v granitsakh takikh zon»;
- 9 Musabayev T.T., Niyettesova A.R. Primeneniye bespilotnykh letatelnykh apparatov v gradostroitel'nom kadastre // Innovatsionnyye podkhody v sovremennoy nauke. sb. st. po materialam mezhdunar. nauch.-prakt. konf. – № 1 (85). – M., Izd. «Internauka». 2021. S. 74-78.

***Т. Т. МУСАБАЕВ<sup>1,2</sup>, Е. Б. АҚМАНБЕТОВ<sup>1</sup>, А. Р. НИЕТТЕСОВА<sup>1</sup>***

*<sup>1</sup>РГП «Республикалық мемлекеттік қала құрылысын жоспарлау және кадастр орталығы», Нұр-Сұлтан қаласы, Қазақстан*

*<sup>2</sup>Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қаласы, Қазақстан*

## **ПИЛОТСЫЗ ҰШУ АППАРАТТАРЫМЕН ИНЖЕНЕРЛІК КОММУНИКАЦИЯЛАРДЫҢ ЖАЙ-КҮЙІН МОНИТОРИНГІЛЕУ**

*Мақалада мемлекеттік қала құрылысы кадастрын жүргізу кезінде инженерлік-геодезиялық міндеттерді шешу үшін пилотсыз ұшу аппараттарын (ПҰА) қолдану қажеттілігінің өзекті мәселелері қарастырылған. Бұдан басқа мониторинг әр түрлі климаттық жағдайларда инженерлік объектілердің тұрақтылығы мен қауіпсіз пайдаланылуын қамтамасыз ету жөніндегі іс-шаралардың маңызды құрамдас бөлігі болып табылады. Техногенді және табиғи сипаттағы теріс әсерді азайтуға бағытталған іс-шараларды жүргізу бойынша басқарушылық шешімдерді қабылдау үшін жерүсті инженерлік коммуникацияларын зерттеу, мониторингілеу және есепке алу кезінде пилотсыз ұшу аппараттарын (ПҰА) қолдану нәтижелері ұсынылған.*

***Түйін сөздер:** ортофотожоспар, инженерлік коммуникациялар, магистральдық құбырлар, мониторингілеу, пилотсыз ұшу аппараттары.*

**TURLYBEK T. MUSSABAYEV<sup>1,2</sup>, ERKEBULAN B. AKMANBETOV<sup>1</sup>,  
AINURA R. NIETTESOVA<sup>1</sup>**

*<sup>1</sup>RSE «Republican Center of State Urban Planning and Cadastre»,  
Nur-Sultan, Kazakhstan*

*<sup>2</sup>L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*

## **MONITORING OF THE STATE OF ENGINEERING COMMUNICATIONS BY UNMANNED AERIAL VEHICLES**

*The article deals with topical issues of the need to use unmanned aerial vehicles (UAVs) to solve engineering and geodetic tasks in the conduct of the state urban cadastre. In addition, monitoring is an important component of measures to ensure the sustainability and safe operation of engineering facilities in different climatic conditions. The results of the use of unmanned aerial vehicles (UAVs) in the study, monitoring and accounting of aboveground engineering communications for making management decisions on measures aimed at reducing the negative impact of man-made and natural nature are presented.*

**Key words:** *orthophotoplane, engineering communications, trunk pipelines, monitoring, unmanned aerial vehicles.*



**Е. А. НЫСАНОВ, С. Ж. ҚҰРАҚБАЕВА\*, А. Х. МАХАТОВА, А. Е. ҚОЖАБЕКОВА,  
А. А. МУСАБЕКОВ**

*М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент, Қазақстан  
e-mail: nysanov51@bk.ru, sevam@mail.ru*

## **АЛЬФА-БӨЛШЕКТЕРДІҢ ҰДЫРАУЫН ЖӘНЕ ИЗОТОПТАРДЫҢ БӨЛІНУІН КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛЬДЕУ МЕН СИПАТТАУ**

Мақалада альфа-бөлшектердің ыдырауын және изотоптардың бөлінуін компьютерлік модельдеу ерекшеліктері қарастырылған. Оң зарядталған альфа-бөлшектермен заттың жұқа пластинасын соққыласа, онда олар ядролардан жақын қашықтықта өту кезінде атом ядросынан кері итеріліп, тұзу сызықты жолдан ауытқи бастайды, тіпті ядродан қатты кері итеріліп және альфа-бөлшектер көзіне қарай қозғала отырып, ұшу бағытын өзгерте алады. Қазіргі заманғы компьютерлік математика жүйесі *Mathcad* көмегімен осы жағдайлар компьютерлік модельденген және альфа-бөлшектер траекторияларының графиктері салынған. Альфа-бөлшектер қозғалысының траекториясын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулерді дайындау және *Vulstoer* функциясы арқылы оларды шешу ұсынылған. Модельдеу бөлшектердің болжамды мінезқұлқын тамаша растайды-олардың бір бөлігі ядро болмаған жағдайда болатын олардың тұзу сызықты ұшуынан ауытқуды, ал кейбір бөлшектер қозғалыс бағытын қарама-қарсыға өзгертуді бастан кешіреді. Физикалық қондырғының әр түрлі орындарында орнатылған бөлшектердің датчиктері заттар мен материалдар құрылысының атом теориясының растауы болып табылатын траекторияның осындай өзгерістерін белгілеп отырады. Изотоптарды бөлудің спектроскопиялық әдісін сипаттауға арналған қолданбалы бағдарлама құрылып, жан-жақты талқыланды. Әрине, сипатталған модельдер абсолютті дәл деп айтуға болмайды. Мысалы, бөлшектер ядроға дәл бағытталса, онда елеулі қателіктер туындауы мүмкін. Егер бөлшектердің жылдамдығы үлкен болса, онда бөлшектер ядроның кері итеру күшін жеңе алады, нәтижеде бөлшектер оларға сіңеді. Мұндай сіңіру жағдайлары құрылған модельдерде есепке алынбаған. Ядролық физиканың маңызды есептерінің бірі изотоптарды бөлу болып табылады. Изотоптарды бөлудің спектроскопиялық әдісін сипаттауға арналған қолданбалы бағдарлама құрылған. Бұл әдіс ұшып шығатын және магниттік өрістің әсерінен ауытқитын иондардың траекториясының ерекшеліктеріне негізделген. Иондардың қозғалысын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулер жүйесі келтірілген. Электр заряды бар бөлшектердің бірқалыпты магнит өрісінде қозғалу есебі *Mathcad* ортасында шешілген.

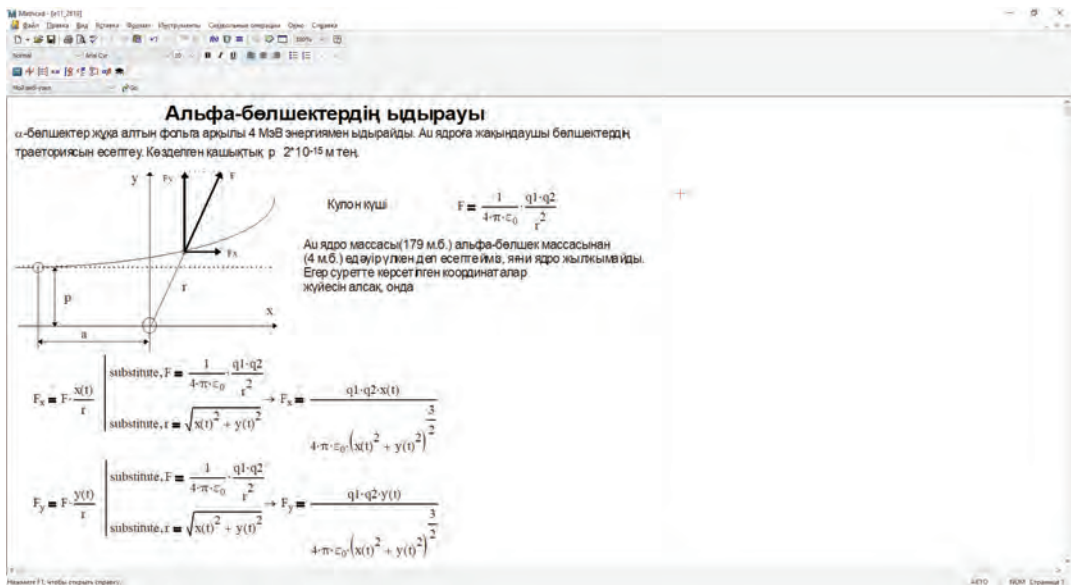
**Түйін сөздер:** альфа-бөлшектер, изотоптар, иондар, магнит өрісі, компьютерлік модельдеу, *Mathcad*, қолданбалы бағдарлама.

**Кіріспе.** Қазіргі кезде қолданбалы бағдарламаларды құру, қолдану және тарату негізгі мәселелердің бірі болып отыр. Кейінгі кезде қолданбалы бағдарламалық кешендер құруда бағдарламалау тілдерімен бір қатарда компьютерлік математика жүйесі кеңінен қолданылуда. Түрлі салалардағы құбылыс сипаттамаларын толыққанды және жан-жақты өңдеу заманауи компьютерлік технологиялар мен модельдеу әдістерінсіз мүмкін емес. Сондықтан компьютерлік математика жүйесін қолданып молекулалар мен атомдық құбылыстарды компьютерлік модельдеу және оларды өңдеу үшін қолданбалы бағдарламалар құру өзекті мәселелердің бірі болып табылады.

\* E-mail корреспондирующего автора: sevam@mail.ru

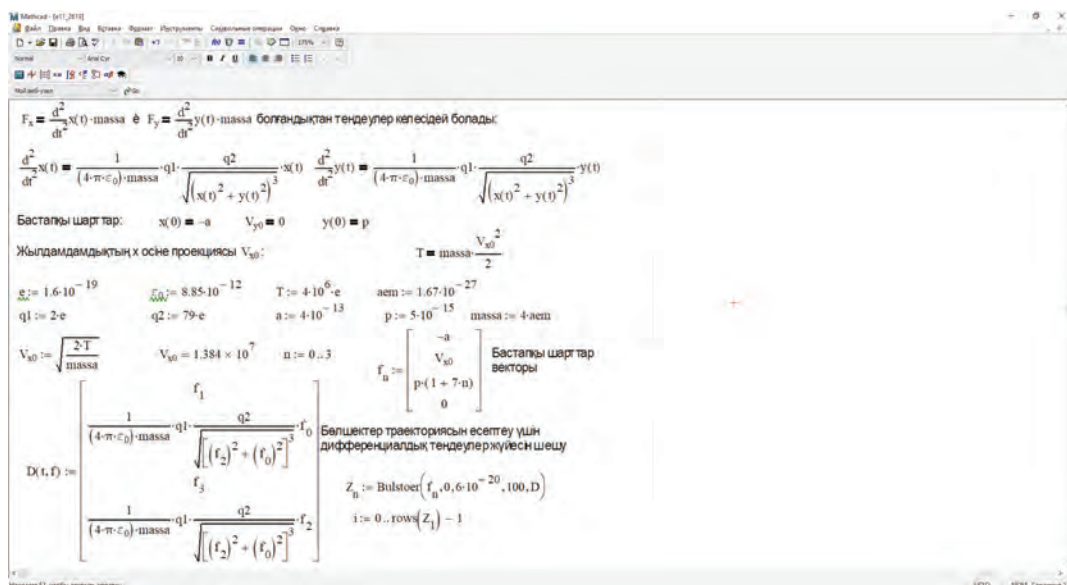
Мақалада молекулалар мен атомдық құбылыстарды сипаттайтын кейбір өзекті мәселелерді шешу үшін Mathcad компьютерлік математика ортасында алғаш рет қолайлы қолданбалы бағдарламалар құрылған. Бұл бағдарламаларда көрнекілік үшін компьютерлік графика кеңінен қолданылған. Құрылған қолданбалы бағдарламаларды инженерлік, ғылыми-техникалық есептеулерде кеңінен қолдануға болады.

Енді іргелі мағынасын асыра бағалау қиын бөлшектер әлемінен мысал қарастырайық [1-3]. Біз альфа-бөлшектерін жұқа алтын фольга көмегімен ыдырату туралы сөз қозғаймыз. Қазір біз материяның оң зарядталған ядросы бар атомдардан тұратынын білеміз, оның айналасында орбиталар бойынша теріс зарядталған электрондар қозғалады. Алайда, заттың атом құрылысы туралы гипотеза айтылған кезде, бір маңызды сәт - атомдардың ядросы бар болуының эксперименталды дәлелі жетпеді. Сол уақытта күрделі эксперименттердің нәтижесінде бұл шындық тікелей емес, жанама түрде көрсете алынды (тікелей дәлел молекулалар мен атомдарды бақылауға және суретке түсіруге мүмкіндік берген электронды микроскоптардың көмегімен кейінірек алынды). Ғалымдар, егер оң зарядталған альфа-бөлшектермен заттың жұқа пластинасын соққыласа, онда олар ядролардан жақын қашықтықта өту кезінде атом ядросынан кері итеріліп, түзу сызықты жолдан ауытқуы керек деп ойлады. Сонымен қатар, есептеулер кейбір бөлшектер тіпті ядродан қатты кері итеріліп және альфа-бөлшектер көзіне қарай қозғала отырып, ұшу бағытын өзгерте алатынын көрсетті. Қазіргі заманғы компьютерлік математика жүйесі Mathcad [4-14] көмегімен біз осы жағдайды модельдей аламыз. Альфа-бөлшектер қозғалысының траекториясын сипаттайтын формулалар 1-суретте келтірілген. F Лоренц күшінің құраушылары үшін формулалар аналитикалық түрде алынған (атом ядросынан альфа-бөлшектердің кері итерілу күші).



1-сурет – Альфа-бөлшектер ыдырауын модельдеуге қажетті формулалар





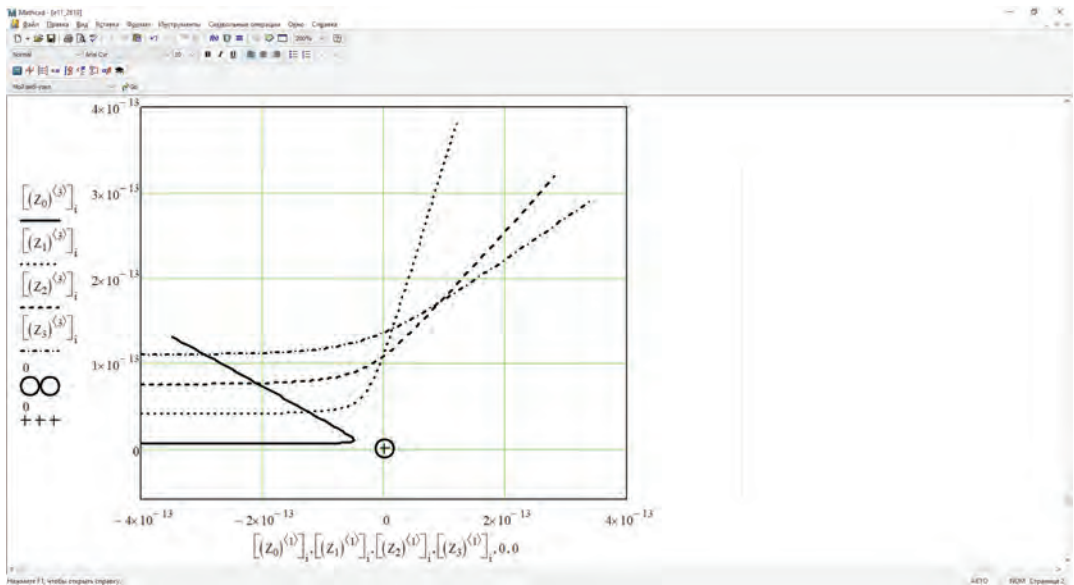
2-сурет – Альфа-бөлшектер ыдырауын модельдеуге қажетті дифференциалдық теңдеулер жүйесі

2-суретте альфа-бөлшектер қозғалысының траекториясын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулерді дайындау және Mathcad-тың Bulstoer функциясы арқылы оларды шешу ұсынылған. Ядро ортасынан әртүрлі қашықтықтағы альфа-бөлшектерді "іске қосудың" бірнеше нұсқаларына арналған шешім z матрицасында сақталады.

**Әдістер мен материалдар.** Сәйкес шекаралық шарттары бар екінші ретті жай дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу үшін Mathcad ортасының сандық әдісі, ал алынған нәтижелерді графикалық түрде бейнелеу үшін оның графикалық мүмкіндіктері қолданылды.

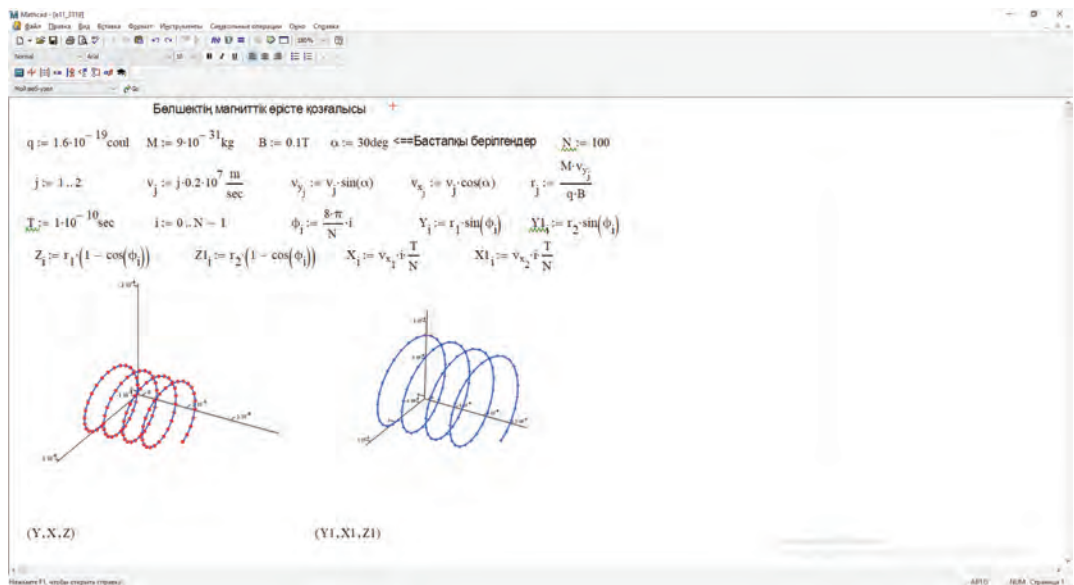
**Нәтижелер мен оларды талқылау.** Альфа-бөлшектер қозғалысының траекториясын сипаттайтын сәйкес шекаралық шарттары бар екінші ретті жай дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі 3-суретте графикалық түрде бейнеленген. Модельдеу бөлшектердің болжамды мінез-құлқын тамаша растайды-олардың бір бөлігі ядро болмаған жағдайда болатын олардың түзу сызықты ұшуынан ауытқуды, ал кейбір бөлшектер қозғалыс бағытын қарама-қарсыға өзгертуді бастан кешіреді. Физикалық қондырғының әр түрлі орындарында орнатылған бөлшектердің датчиктері заттар мен материалдар құрылысының атом теориясының растауы болып табылатын траекторияның осындай өзгерістерін белгілеп отырады.

Әрине, сипатталған модель абсолютті дәл деп айтуға болмайды. Мысалы, бөлшектер ядроға дәл бағытталса, онда елеулі қателіктер туындауы мүмкін. Егер бөлшектердің жылдамдығы үлкен болса, онда бөлшектер ядроның кері итеру күшін жене алады, нәтижеде бөлшектер оларға сіңеді. Мұндай сіңіру жағдайларын сипатталған модель есепке алмайды.



3-сурет – Альфа-бөлшектер ыдырауының траекториялары

Ядролық физикада бірдей электр заряды бар, бірақ массасы әртүрлі атомдар изотоптар деп аталады. Ядролық физиканың маңызды есептерінің бірі изотоптарды бөлу болып табылады. Модельдеуде изотоптарды бөлудің спектроскопиялық әдісін пайдаланамыз. Бұл әдіс ұшып шығатын және магниттік өрістің әсерінен ауытқитын иондардың траекториясының ерекшеліктері мен иондардың қозғалысын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге негізделген. Электр за-



4-сурет – Магнит өрісіндегі электр заряды бар бөлшектер қозғалысының траекториялары

ряды бар бөлшектердің бірқалыпты магнит өрісінде қозғалу есебі осындай. Сонымен,  $q$  зарядты және  $M$  массалы бөлшек  $H$  кернеулігі бар магнит өрісі әсер ететін облысқа  $\alpha$  бұрышымен ұшып шықсын. 4-сурет әр түрлі массасы бар екі бөлшек үшін траекториялардың құрылуын көрсетеді. Бөлшектердің қозғалысы Лоренц күшінің әсерінен болады. 4-суретте көрініп тұрғандай, бөлшектер  $X$  осі бойымен кеңістіктік спиралына сәйкес траектория бойынша қозғалады. Неғұрлым бөлшектердің бастапқы жылдамдығы жоғары болса, спираль диаметрі соғұрлым жоғары болады. Бұл мысал кеңістіктегі күрделі қозғалысты визуализациялау туралы жақсы түсінік береді.

Альфа-бөлшектер қозғалысының траекториясын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулерді дайындау және Bulstoer функциясы арқылы оларды шешу ұсынылған. Ядролық физиканың маңызды есептерінің бірі изотоптарды бөлу болып табылады. Изотоптарды бөлудің спектроскопиялық әдісін сипаттауға арналған қолданбалы бағдарлама құрылып, жан-жақты талқыланған. Бұл әдіс ұшып шығатын және магниттік өрістің әсерінен ауытқитын иондардың траекториясының ерекшеліктеріне негізделген. Иондардың қозғалысын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулер жүйесі келтірілген. Электр заряды бар бөлшектердің бірқалыпты магнит өрісінде қозғалу есебі Mathcad ортасында шешілген.

**Қорытынды.** Модельдеу бөлшектердің болжамды мінез-құлқын тамаша растайды-олардың бір бөлігі ядро болмаған жағдайда болатын олардың түзу сызықты ұшуынан ауытқуды, ал кейбір бөлшектер қозғалыс бағытын қарама-қарсыға өзгертуді бастан кешіреді. Физикалық қондырғының әр түрлі орындарында орнатылған бөлшектердің датчиктері заттар мен материалдар құрылысының атом теориясының растауы болып табылатын траекторияның осындай өзгерістерін белгілеп отырады. Әрине, құрылған модель абсолютті дәл деп айтуға болмайды. Мысалы, бөлшектер ядроға дәл бағытталса, онда елеулі қателіктер туындауы мүмкін. Егер бөлшектердің жылдамдығы үлкен болса, онда бөлшектер ядроның кері итеру күшін жеңе алады, нәтижеде бөлшектер оларға сінеді. Мұндай сіңіру жағдайларын құрылған модель есепке алмайды. Электр заряды бар бөлшектердің бірқалыпты магнит өрісінде қозғалу есебі шешілген. Неғұрлым бөлшектердің бастапқы жылдамдығы жоғары болса, спираль диаметрі соғұрлым жоғары болады. Бұл мысал кеңістіктегі күрделі қозғалысты визуализациялау туралы жақсы түсінік береді.

## ӘДЕБИЕТ

1 Гульд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Часть 1. – М.: Мир, 1990. – 349 с. ISBN: 5-03-001593-0

2 Детлафф А.А., Яворский Б.М. Курс физики: учебное пособие для вузов. – 8-е изд., – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 720 с. ISBN: 978-5-7695-6478-9

3 Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – Изд. 11-е. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 560 с. ISBN: 5-7695-2629-7

4 Дьяконов В. Компьютерная математика. Теория и практика. – М.: Горячая линия – Телеком, 2001. – 115 с. ISBN: 5-89251-065-4

5 Hecht Eugene. (2017). Optics. Pearson Education, Inc. ISBN: 978-0133977226

6 Ракитин В.И. Руководство по методам вычислений и приложения Mathcad. – М.: Физматлит, 2005. – 264 с. ISBN 5-9221-0636-8

- 7 Макаров Е. Инженерные расчеты в Mathcad 15. Учебный курс. – СПб. : Питер, 2011. – 448 с. ISBN: 978-5-459-00357-4
- 8 Brent Maxfield. (2006). Engineering with Mathcad: Using Mathcad to Create and Organize your Engineering Calculations. Butterworth-Heinemann. ISBN: 9780080466941
- 9 Охорзин, В. А. Компьютерное моделирование в системе Mathcad / В.А. Охорзин. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 144 с. ISBN 5-279-03037-6.
- 10 Philip Pritchard. (2008). Mathcad: A Tool for Engineering Problem Solving. McGraw-Hill Companies, Incorporated. ISBN: 9780073191850
- 11 Охорзин, В. А. Прикладная математика в системе Mathcad / В.А. Охорзин. – М.: Лань, 2008. – 352с. ISBN: 978-5-8114-0814-6
- 12 Maxfield B. (2009). Essential Mathcad for Engineering, Science, and Math ISE. ISBN: 9780123748461
- 13 Maxfield B. (2013). Essential Ptc(r) MathCAD Prime(r) 3.0: A Guide for New and Current Users. Academic Press. ISBN: 9780124104105
- 14 David Randolph, Martin II. (2020). Engineering Calculations with Creo Parametric and PTC Mathcad Prime. Independently published . ISBN: 979-8649196673

## REFERENCES

- 1 Gould H., Tобоchnik Ya. Computer modeling in physics. Part 1. -М.: Mir, 1990.-349 p. ISBN: 5-03-001593-0
- 2 Detlaff A.A., Yavorsky B.M. Course of physics: textbook for higher educational institutions. - 8th ed., - М.: Publishing Center "Academy", 2008. - 720 p. ISBN: 978-5-7695-6478-9
- 3 Trofimova T.I. Course of physics: textbook for universities. – Ed. 11th. - М.: Publishing Center "Academy", 2006. - 560 p. ISBN: 5-7695-2629-7
- 4 Dyakonov V. Computer Mathematics. Theory and practice. -M: Hotline - Telecom, 2001.- 115s. ISBN:5-89251-065-4
- 5 Hecht Eugene. (2017). Optics. Pearson Education, Inc. ISBN: 978-0133977226
- 6 Rakin V.I. Guide to Calculation Methods and Mathcad Applications. –М.: Fizmatlit, 2005.- 264 p. ISBN 5-9221-0636-8
- 7 Makarov E. Engineering calculations in Mathcad 15. Training course. - St. Petersburg. : Peter, 2011. - 448 p. ISBN: 978-5-459-00357-4
- 8 Brent Maxfield (2006). Engineering with Mathcad: Using Mathcad to Create and Organize your Engineering Calculations. Butterworth-Heinemann. ISBN: 9780080466941
- 9 Okhorzin, V.A. Computer modeling in the Mathcad system / V.A. Okhorzin. - М.: Finance and statistics, 2006. - 144 p. ISBN 5-279-03037-6.
- 10 Philip Pritchard. (2008). Mathcad: A Tool for Engineering Problem Solving. McGraw Hill Companies, Incorporated. ISBN: 9780073191850
- 11 Okhorzin, V.A. Applied mathematics in the Mathcad system / V.A. Okhorzin. - М.: Lan, 2008. -352с. ISBN: 978-5-8114-0814-6
- 12 Maxfield B. (2009). Essential Mathcad for Engineering, Science, and Math ISE. ISBN: 9780123748461
- 13 Maxfield B. (2013). Essential Ptc(r) MathCAD Prime(r) 3.0: A Guide for New and Current Users. Academic Press. ISBN: 9780124104105
- 14 David Randolph, Martin II. (2020). Engineering Calculations with Creo Parametric and PTC Mathcad Prime. Independently published. ISBN: 979-8649196673

**Е. А. НЫСАНОВ, С. Д. ҚУРАКБАЕВА, А. Х. МАХАТОВА,  
А. Е. КОЖАБЕКОВА, А. А. МУСАБЕКОВ**

*Южно-Казахстанский университет им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан*

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПИСАНИЕ РАСПАДА АЛЬФА-ЧАСТИЦ И РАЗДЕЛЕНИЯ ИЗОТОПОВ**

*В статье рассмотрены особенности компьютерного моделирования распада альфа-частиц и разделения изотопов. Когда положительно заряженные альфа-частицы ударяются о тонкую пластинку материи, тогда они при близком расстоянии к ядрам отталкиваются от ядра атома, отклоняясь в движении от прямой линии, и могут даже изменить направление полета, сильно отталкиваясь от ядра и двигаясь к источнику альфа-частиц. Эти случаи моделированы и построены графики траекторий альфа-частиц с помощью современной компьютерной математической системы Mathcad. Предлагается составить дифференциальные уравнения, описывающие траекторию движения альфа-частицы, и решить их с помощью функции Vultstoeer среды Mathcad. Моделирование прекрасно подтверждает предсказанное поведение частиц – некоторые из них отклоняются от своего линейного полета в отсутствие ядра, а некоторые частицы меняют направление движения в противоположном направлении. Датчики частиц, установленные в разных частях физического устройства, обнаруживают такие изменения траектории, что является подтверждением атомной теории строения веществ и материалов. Разработана и подробно описана прикладная программа для описания спектроскопического метода разделения изотопов. Конечно, описанные модели не можем считать абсолютно точными. Например, если частицы нацелены точно на ядро, могут возникнуть значительные ошибки. Если скорость частиц высока, то частицы могут преодолеть силу отталкивания ядра, в результате чего частицы поглощаются ими. Такие условия поглощения не учитываются в разработанных моделях. Одна из важных задач ядерной физики является разделение изотопов. Разработана прикладная программа для описания спектроскопического метода разделения изотопов. Этот метод основан на характеристиках траектории ионов, которые излучают и колеблются под действием магнитного поля. Приведена система дифференциальных уравнений, описывающая движение ионов. Задача о движении электрически заряженных частиц в однородном магнитном поле решена в среде Mathcad.*

**Ключевые слова:** альфа-частицы, изотопы, ионы, магнитное поле, компьютерное моделирование, Mathcad, прикладная программа.

**E. A. NYSANOV, S. D. KURAKBAYEVA, A. KH. MAKHATOVA,  
A. E. KOZHABEKOVA, A. A. MUSABEKOV**

*M.Auezov South Kazakhstan University, Shymkent, Kazakhstan*

## **COMPUTER SIMULATION AND DESCRIPTION OF ALPHA PARTICLE DECAY AND ISOTOPE SEPARATION**

*The computer simulation features of the alpha particle decay and isotope separation are discussed in presented paper. When positively charged alpha particles hit a thin plate of matter, then at a close distance to the nuclei they are repelled from the nucleus of an atom, deviating from a straight line in motion, and can even change the rectilinear motion, strongly repulsing from the nucleus and moving towards the source of alpha particles. These cases are simulated and graphs of the trajectories of alpha particles are plotted using modern computer mathematical system Mathcad. It is proposed to compose differential*

*equations describing the trajectory of the alpha particle and solve them by using the Bulstoer function in the Mathcad. The simulations perfectly confirm the predicted behavior of particles - some of them deviate from their linear motion in the absence of a nucleus, and some of the particles change direction in the opposite one. Particle sensors installed in different parts of the physical device detect such changes in the trajectory, which is a confirmation of the atomic theory of the structure of matter and materials. An application program for describing the spectroscopic method of isotope separation has been developed and discussed in detail. Of course, the described models cannot be considered absolutely accurate. For example, if the particles are aimed exactly at the nucleus, significant errors can occur. If the particle speed is high, then the particles can overcome the repulsive force of the nucleus, causing the particles to be absorbed by them. Such absorption conditions are not taken into account in the developed models. One of the important tasks of nuclear physics is the separation of isotopes. An application program has been developed to describe the spectroscopic method of isotope separation. This method is based on the characteristics of the trajectory of ions that radiate and oscillate under an impact of a magnetic field. A system of differential equations describing the motion of ions is given. The problem of the motion of electrically charged particles in a uniform magnetic field is solved in the Mathcad.*

**Key words:** *alpha particles, isotopes, ions, magnetic field, computer simulation, Mathcad, applied program.*



**A. G. OSPAN<sup>1\*</sup>, M. E. MANSUROVA<sup>1</sup>, YE. KH. KAKIMZHANOV<sup>1</sup>,  
S. SH. IXANOV<sup>1</sup>, V. B. BARAKHNIN<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup>*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

<sup>2</sup>*Federal Research Center for Information and Computing Technologies,  
Novosibirsk, Russia*

<sup>3</sup>*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

## **DEVELOPMENT OF A PROGRAM FOR THE INTEGRATION OF SOCIO-ECONOMIC INDICATORS WITH SPATIAL DATA TO ANALYZE THE STANDARD OF LIVING OF THE POPULATION OF KAZAKHSTAN**

*Up-to-date and reliable information is vital for assessing the socio-economic status of the population and effective decision-making. With the help of a spatial information base, social security and living standards data can be integrated to formulate strategic development plans and improve decision-making. This article presents the work on the integration of information about the standard of living and social security of the inhabitants of Kazakhstan with the display of data on the map. GIS tools were used for integration, as the latest technological advances in this field allow the manipulation of large amounts of geographic data and the creation of a spatial environment with socio-economic data. This work includes collecting unstructured data from the Bureau of National Statistics, reformatting the data into a structured database as an attribute-value pair; calculating important living standards indicators such as the real income index, the depth and severity of poverty and the social inequality index, and monitoring the results on the web map to compare regions based on the results obtained. It is also important to note the operation performed for the gridding of table attributes, since it was implemented automatically using the GIS tool. The results of the work are presented for three important indicators of the standard of living and displayed on a map using a heat map to visually show the changes in the indices for each region of Kazakhstan.*

**Key words:** *socio-economic information, living standards indicators, spatial data, GIS, map visualization, data extraction.*

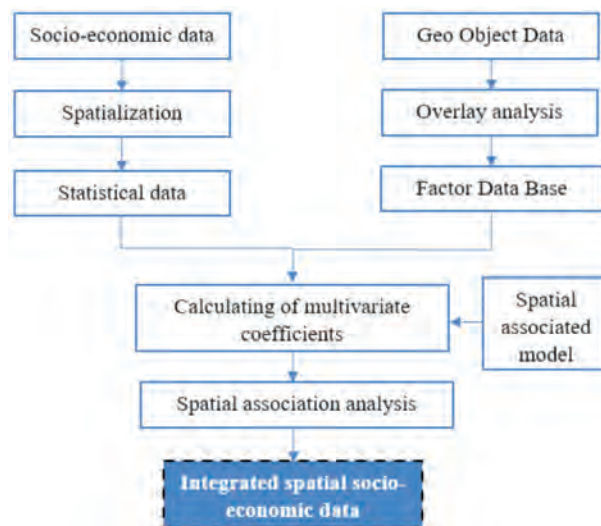
**Introduction.** Economics professionals and governments need powerful tools to help them analyze, display and disseminate results, and make informed decisions about where to create new jobs or improve the quality of life in a given region [1]. Today, GIS technologies (such as ArcGIS Pro, QGIS, Google Earth Engine) are powerful and efficient in realizing these functions, helping economic professionals to support and control the change and growth of people's social life. A GIS facilitates the study of geographic distribution (single columns of an attribute table focusing on trends), geographic variation (single columns of an attribute table focusing on fluctuations), and geographic relationships (pairs of columns in an attribute table) [2].

Statistics are generally mathematical calculations such as mean, squared error, variance, correlation, and other mathematical statistics that support the scientific collection, organization, analysis, and interpretation of sample data to draw conclusions about their original population. Spatial statistical and econometric methods are broadly classified into three sub-domains based on the characteristics of spatial data: spatial point structures, geo-statistics, and attributes associated with discrete spatial units, mainly polygons [3].

---

\* E-mail корреспондирующего автора: [asselyaospan@gmail.com](mailto:asselyaospan@gmail.com)

The procedure for integrating socio-economic data and spatial reference of heterogeneous data is shown in Figure 1. This model was presented by the International Cartographic Association in its work “Cartography beyond the ordinary world” [4]. Using this model for statistical data associated with geographic features, one can obtain a spatial factor atlas about the main socio-economic indicators and convert the statistics into spatial data. Thus, the quantitative distribution in the cells of the spatial grid and integration with natural statistics data will be implemented.



*Figure 1 – Diagram of a model for integrating socio-economic data with spatial data*

Based on this scheme, our tasks of integrating indicators of the level of social life of the people of Kazakhstan with a GIS-based spatial database with data visualization on a web map for a better understanding of the situation and comparison of results were completed.

**Related work.** Recent technological advances in GIS make it possible to manipulate large amounts of geographic data and create spatial environments with socioeconomic data. The creators of ArcGIS [5] have introduced a separate package called “GIS for Economic Development”, where the thematic map has a table of contents that allows the reader to add layers of information to the base map. For example, a sociologist can use a base map of a particular country, and add datasets from the Bureau of Statistics to add layers of data to a map that shows the standard of living, age, and employment status of residents, thus combining multiple datasets in an infinite number of ways.

Recognizing the synergies (from the integration of GIS and spatial statistics/econometrics), spatial data scientists have proposed and made efforts to integrate the technical fields of the two disciplines [6]. Recent developments have resulted in greater availability of spatial statistics and econometrics tools on various platforms, including commercial GIS software (e.g. ArcGIS), statistical and mathematical software (e.g. Python), stand-alone packages and libraries in popular programming environments. Spatial statistical and econometric methods are broadly classified into three sub-domains based on the characteristics of spatial

data: structures, geo-statistics and attributes associated with discrete spatial units, mainly polygons [7]. Fischer, M.M., Getis, A. provide an extensive overview of spatial statistics and econometrics tools [8].

Griffith D.A. points out that one of the goals of spatial statistics is to provide a better understanding of how geographic landscapes function, some of which are economies of space [9]. It poses the following challenges for spatial econometricians, as suggested by contemporary spatial statistical work: (1) formulate efficient and efficient implementations of spatial autoregression for massive georeferenced datasets; (2) determining the usefulness of the main eigenvector of the geographic weights matrix for empirical analysis; (3) transformation of georeferenced data generation mechanisms in terms of mixed parametric models including spatial filters based on eigenvectors; and (4) improving our understanding of the terms spatially structured random effect (SSRE) and spatially unstructured random effect (SURE) that can appear in spatial statistical/econometric model specifications.

Introducing the term “spatial econometrics”, Paelinck, J. emphasizes the need to account for geographic dependence in spatial models, eliminate asymmetries in spatial relationships, recognize the importance of covariates located elsewhere, and include topological variables that explicitly span space. in the model specification [10].

Spatial statisticians often deal with observational data and therefore conduct correlation studies. Paelinck J. points out that one of the goals of spatial econometrics is to better understand how spatial economics works [10]. He discusses specification and multiple modes in the context of spatiotemporal representations. He concludes that partial difference equation models appear to be a suitable analysis tool for large sets of small spatial units. In conclusion, especially applied spatial statistics/econometrics has been made possible by the existence of GIS and other computer software packages. Let’s take a look at the work done in this area.

In [11], the authors applied GIS to integrate social, economic and environmental factors to assess land vulnerability to degradation in the Pir Panjal Himalayas, Kashmir, India. In this work, a GIS tool was used to obtain information about irrigated lands and vegetation areas, as well as lands where degradation is high. The data obtained were compared with population density, age of residents, and economically important enterprises.

The authors of [12] present a GIS method for modeling ecosystem services by mapping socio-economic scenarios. As a result, the authors developed scenarios with the involvement of local stakeholders and experts to determine how major land cover classes might change under the influence of different sets of factors, formalized spatial rules such as agriculture can only occur on certain soil types, and created a future land cover map. cover, which can then be used to model ecosystem services.

The work [13] provides an analysis of the human resources of Kazakhstan based on GIS. Demographic, social, economic and environmental indicators were used to calculate human resources. Here, the results of the calculation of human resources are displayed on a map of Kazakhstan, where cities are identified as a “talent magnet”, industrial areas and peripheral regions with the lowest rates, and an analysis of the reasons for such results is also made.

Based on the above works, it can be concluded that the integration of socio-economic data with GIS is an effective method and gives a positive result in the course of analysis and research.

If we turn to the implementation of our program, then different methods and tools were used here. For example, for our work, all tabular data are taken from the Bureau of National Statistics [14] and they are in the form of unstructured data. To solve this problem, the article [15] provides a CRL (Cells Rule Language) method that extracts data from arbitrary semi-structured tables (in text formats, spreadsheets and web tables) and transforms them into a structured form from which they can be loaded to the database using standard ETL tools (Extract, Transform, Load). A formal language of rules for the analysis and interpretation of tables, called CRL (Cells Rule Language), has been proposed. The execution of such rules allows you to restore the semantics of the table, which was originally absent, but necessary for extracting and transforming tabular information. The complete implementation algorithm is given in [16].

As soon as our tables are brought into a structured database, and are ready for manipulation for calculation, an economic model will be built to assess the standard of living of the population of Kazakhstan. In [13], four indicators are used to calculate human resources, and the results are successful, therefore, a similar model will be used for our economic model, only indicators for the standard of living of the population.

**Materials and methods.** To accomplish our tasks, the following steps will be performed:

1. Collection of data from the Bureau of National Statistics.
2. Converting unstructured tabular data to structured databases using SQL.
3. Selection of living standards indicators based on the UN guidelines for measuring poverty: the index of real money incomes of the population, the severity of poverty, the depth of poverty and the inequality index (Gini coefficient).
4. Construction of an economic model for effective analysis of the standard of living of the population.
5. Performing coordinate referencing of all regions of Kazakhstan and visualizing the results on a web map for comparison and analysis.

The definition of the term poverty is described in the guidelines on measuring poverty by the United Nations Economic Commission for Europe [17]. This guide notes the concept of inequality, which is measured by the Gini coefficient, as well as the monetary approach to poverty, including in terms of income and consumption spending, most commonly used to measure poverty in monetary terms. It is now widely recognized that the concept of poverty goes beyond the material conditions of people's lives and is also expressed in ill health, job insecurity, social exclusion, malnutrition, and personal insecurity.

Based on UN information, for the study of the living standards of Kazakhstan, indicators such as the index of real money incomes of the population, the severity of poverty, the depth of poverty and the inequality index (Gini coefficient) from the Bureau of National Statistics of Kazakhstan (1) were selected.

The depth of poverty index shows how far people have fallen below the poverty line (depth of poverty) as a percentage of the poverty line. The depth of poverty index can be expressed as follows (formula 1):

$$P_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{G_i}{z} \quad (1)$$

where the poverty gap ( $G_i$ ) is equal to the poverty line minus actual (equivalent) income or expenditure for those living in poverty and zero for those who are not.

The following formula (2) also calculates the poverty depth coefficient (P1), which characterizes the average distance of the poor from the poverty line:

$$P_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \max \left( \frac{z - x_i}{z}; 0 \right) \right]^1 \quad (2)$$

where  $z$  is the average subsistence minimum for one member of the household;  $x_i$  is the indicator of the per capita income index of person  $i$  covered by the survey;  $n$  is the total surveyed population.

The poverty severity coefficient (P2), which characterizes the degree of inequality among the poor, is calculated using formula (3):

$$P_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \max \left( \frac{z - x_i}{z}; 0 \right) \right]^2 \quad (3)$$

The difference between the poverty depth ratio and the poverty severity ratio is that the latter is calculated more heavily by households that are severely underfunded.

The Gini coefficient (Income Concentration Index) is a statistic for assessing economic equality. It was invented by the economist Gini Corrado [17]. It shows the even distribution of income or wealth among the members of society. The coefficient is measured using a graphical method - the Lorenz curve. To get the Gini coefficient, you need to: a) calculate the area of the figure (T), which is formed by the line of absolute equality and the Lorenz curve; b) calculate the area of triangle OFE; c) divide the area T by the area OFE: Gini coefficient = T / OFE.

As a result, we get a number from 0 to 1. If incomes are evenly distributed, then the indicator will be 0, if everything belongs to one person, then - 1. In general, the lower the Gini coefficient, the better, the less economic inequality in the country.

After receiving the results of the above indicators of the standard of living, it is necessary to perform a spatial reference to the regions of Kazakhstan. To perform this task, the ArcGIS tool will be used, since there is a tool that automatically determines vector  $x$ ,  $y$  coordinates from the names of areas, without adding extra attributes to the tables. For the best understanding and analysis of the results, a heat map will be applied, which will highlight the regions in comparison with each other.

**Results and discussion.** Based on the above calculations, results were obtained from 2001 to 2021 for the regions of Kazakhstan. To visualize and compare the results, the data will be displayed on a map using a heat map, where the colors change from the minimum to the maximum value. The convenience of using a web map is that the user himself can choose the colors he needs, thus making it easier to read the results on the map.

Using formulas (1), (2) and (3), we have obtained indicators of the depth and severity of poverty from 2001 to 2021. (Table 1) life of the population over the past 10 years.

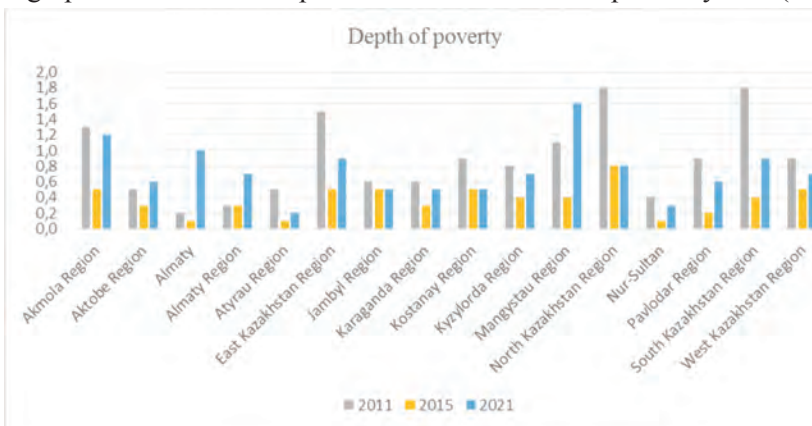


**Table 1** – Indicators of the depth and severity of poverty in the regions of Kazakhstan from 2001 to 2021.

Regions of Kazakhstan										
Akmola Region	12,2	8,5	1,3	0,5	1,2	5,0	3,2	0,5	0,1	0,4
Aktobe Region	15,0	8,0	0,5	0,3	0,6	7,1	3,0	0,1	0,1	
Almaty	3,9	1,4	0,2	0,1	1,0	1,2	0,3	0,0	0,0	0,3
Almaty Region	20,8	6,7	0,3	0,3	0,7	9,5	2,1	0,1	0,1	0,2
Atyrau Region	20,6	14,7	0,5	0,1	0,2	10,2	5,4	0,1	0,0	0,0
East Kazakhstan Region	12,3	6,6	1,5	0,5	0,9	5,5	2,4	0,5	0,2	0,2
Jambyl Region	24,0	9,4	0,6	0,5	0,5	10,3	3,0	0,1	0,1	0,1
Karaganda Region	11,3	5,0	0,6	0,3	0,5	4,7	1,8	0,2	0,1	0,1
Kostanay Region	15,0	9,7	0,9	0,5	0,5	7,3	3,8	0,3	0,1	0,1
Kyzylorda Region	17,8	10,5	0,8	0,4	0,7	6,8	3,2	0,2	0,1	0,2
Mangystau Region	23,2	7,5	1,1	0,4	1,6	11,4	2,2	0,2	0,1	0,5
North Kazakhstan Region	6,3	7,1	1,8	0,8	0,8	2,4	2,5	0,6	0,3	0,2
Nur-Sultan	1,6	0,8	0,4	0,1	0,3	0,5	0,3	0,1	0,0	0,1
Pavlodar Region	9,3	4,5	0,9	0,2	0,6	3,8	1,5	0,3	0,1	0,1
South Kazakhstan Region	19,0	10,0	1,8	0,4	0,9	8,0	3,0	0,5	0,1	0,2
West Kazakhstan Region	13,9	8,3	0,9	0,5	0,7	5,6	2,9	0,2	0,1	0,1

■ - max indicators, ■ - min indicators.

In this Table 1, the regions marked in orange and green have the highest depth of poverty and the lowest. In Mangistau and North Kazakhstan regions, the depth of poverty is higher than in other cities, which indicates an unsatisfactory standard of living in these regions. Below are graphs for a better comparison of results over the past 10 years. (Figure 2, 3)



**Figure 2** – Indicators of the depth of poverty of the regions of Kazakhstan from 2011 to 2021

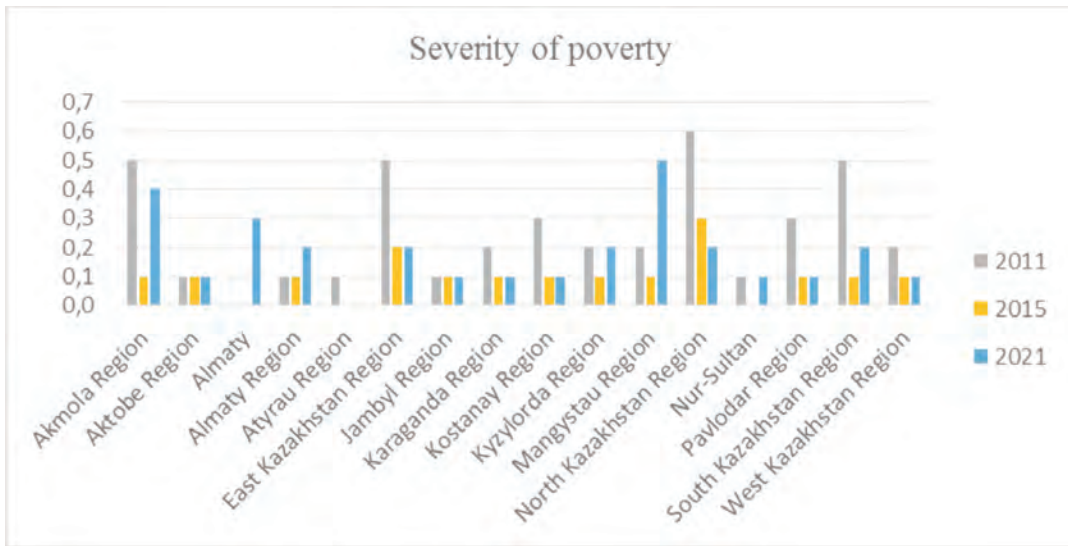


Figure 3 – Poverty severity rates of the regions of Kazakhstan from 2011 to 2021

The depth and severity of poverty indicators for 2021 were displayed on a web map using a regional and heat map, where the color changes depending on the value of the coefficient. (Figure 4). Here we can see that two layers are used. The first layer displays tabular data for the depth of poverty, and colors from light blue to dark blue. The second layer is a heat map for poverty severity, in red and green circles.

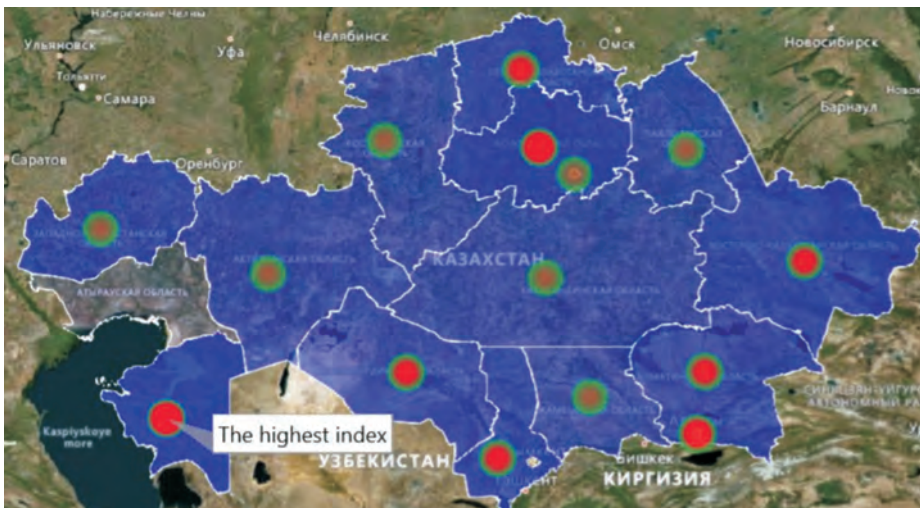


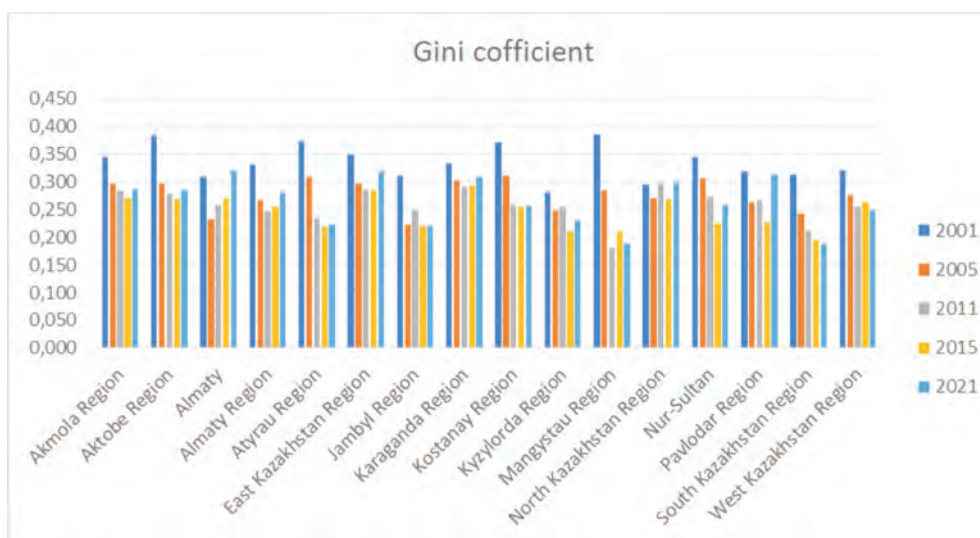
Figure 4 – Displaying data of depth and severity of poverty for regions of Kazakhstan for 2021 on the web map

Table 2 shows the performance of the Gini coefficient from 2001 to 2021, as mentioned above, the lower the Gini index and close to zero, the more equal the region is and vice versa.

**Table 2** – Indicators of the Gini coefficient for the last 20 years in all regions of Kazakhstan.

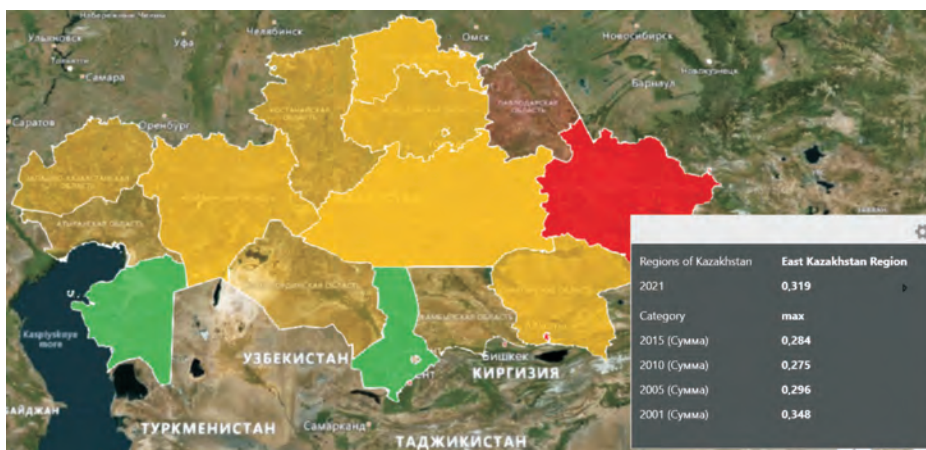
Regions of Kazakhstan	2001	2005	2011	2015	2021	Regions of Kazakhstan	2001	2005	2011	2015	2021
Akmola Region	0,344	0,297	0,284	0,270	0,287	Kostanay Region	0,370	0,310	0,258	0,254	0,256
Aktobe Region	0,382	0,296	0,278	0,269	0,285	Kyzylorda Region	0,280	0,248	0,255	0,210	0,230
Almaty	0,309	0,233	0,259	0,271	0,321	Mangystau Region	0,385	0,284	0,180	0,210	0,188
Almaty Region	0,331	0,267	0,246	0,255	0,280	North Kazakhstan Region	0,295	0,271	0,296	0,269	0,298
Atyrau Region	0,372	0,309	0,234	0,219	0,222	Nur-Sultan	0,345	0,306	0,272	0,224	0,259
East Kazakhstan Region	0,348	0,296	0,285	0,284	0,319	Pavlodar Region	0,318	0,263	0,266	0,226	0,312
Jambyl Region	0,310	0,222	0,248	0,221	0,220	South Kazakhstan Region	0,313	0,242	0,213	0,194	0,188
Karaganda Region	0,333	0,303	0,291	0,292	0,309	West Kazakhstan Region	0,321	0,276	0,255	0,263	0,249

Here you can see that social inequality for 2021 is more pronounced in the largest city of Kazakhstan - Almaty, where the incomes of the population are very different from each other. Also, the North Kazakhstan region showed the best results for 2015 and 2021, which indicates that the incomes of the population are close to each other. The developed countries of the world practice economic models that help bring the Gini coefficient closer to 0 [16]. In Figure 5, one can observe the declining dynamics for all regions, here the conclusion is that the country has improved its social condition over the past 20 years. On the one hand, it is necessary to take into account both devaluation and other categories that mainly describe economic development and the standard of living of the population. However, these tasks are outside the scope of our work.

**Figure 5** – Graph of Gini coefficient indicators from 2001 to 2021 for the regions of Kazakhstan



Below the data display of the Gini coefficient is shown in Figure 6, where a heat map is used, which highlights areas by their values: red - maximum, yellow - average, green - minimum. There is also a sheet map displaying tabular data for 20 years of the geobject to which the coordinate referencing is performed.



*Figure 6* – Heatmap of Kazakhstan with Gini coefficient indicators for 2021

In the future, the establishment of such tasks as finding the causes of poverty, identifying the stability of variability is to be set. For example, a significant number of employed population on life indices, between such indicators of labor/employment and acute poverty, a direct or inverse correlation, and whether there is a relationship between fast working youth and the level of income in the region. That is, it requires a thorough analysis of all indicators that are relevant to the socio-economic life of the population. All these works will be carried out in anticipation of our research.

**Conclusion.** Our main goal in this work was to integrate socio-economic indicators with the map for better monitoring and comparison of results. To accomplish these tasks, a collection of unstructured tabular data was made, consisting of indicators describing the socio-economic condition of the population. Since there are many indicators, it was important to choose the most important 3-4 indicators. Moreover, the choice was made in favor of such indicators as the severity of poverty, the depth of poverty and the inequality index (Gini coefficient). Mean income measures were used to calculate the Gini coefficient. All calculations were made in ArcGIS Analytics, it is important to properly prepare the incoming data.

After receiving the results, the regions were coordinated to the map, where the program automatically recognized the vector coordinates of all regions of Kazakhstan. Here it should be taken into account that today the ArcGIS program recognizes names only in English.

Since, now we are interested in automatically displaying attribute values on a map, only a vector map was used, where raster data is not specified. In addition, for the best understanding, a heat map layer has been added where the color changes depending on the value.

Based on the results obtained, we can say that all our tasks that we set at the beginning have been completed, there are also new tasks that, based on this work, we will continue in the future.

## REFERENCES

- 1 Romanee Thongdara & Lal Samarakoon, Rajendra P. Shrestha & S. L. Ranamukhaarachchi. Using GIS and Spatial Statistics to Target Poverty and Improve Poverty Alleviation Programs: A Case Study in Northeast Thailand. *Applied Spatial Analysis and Policy* 5(2). 2012 <http://dx.doi.org/10.1007/s12061-011-9066-8>
- 2 Daniel A Griffith and Yongwan Chun. *GIS and Spatial Statistics/Econometrics: An Overview* University of Texas at Dallas, Richardson, TX, United States. 2018. <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-409548-9.09680-9>
- 3 Chun, Y., Griffith, D.A. Spatial statistics and geostatistics. *International journal of geographical information science*. Volume 30, 2016-Issue 6. <https://doi.org/10.1080/13658816.2015.1107074>
- 4 Paula Juliasz, Sonia Vanzella Castellar. *Cartography beyond the ordinary world*. International Cartographic Association. Fluminense Federal University, Brazil. July 2018. <https://www.researchgate.net/publication/326585981>
- 5 GIS for Economic Development. ESRI company. 2018. <https://www.esri.com/content/dam/esrisites/sitecore-archive/Files/Pdfs/library/bestpractices/economic-development.pdf>
- 6 Goodchild, M.F. *Geographical information science*. *International Journal of Geographical Information Systems*, Vol. 15, No. 1, June 2009, 3–9. <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeps.2009.09.160>
- 7 Cressie, N., Liu, D., *Spatial statistics in geographic information systems (GIS)*. *Statistics Reference Online*, Wiley StatsRef. 2014. <http://dx.doi.org/10.1002/9781118445112.stat07806>
- 8 Fischer M.M., Getis A., *Handbook of applied spatial analysis*. Springer, Berlin. 2010. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-03647-7>
- 9 Griffith, D.A. Spatial weights. In: Richardson, D., Castree, N., Goodchild, M., Kobayashi, A., Liu, W., Martson, R. (Eds.), *International encyclopedia of geography*. Wiley, New York (forthcoming). *GIS and Spatial Statistics/Econometrics: An Overview*. 2017 <https://digitalcommons.unomaha.edu/facultybooks/316/>
- 10 Paelinck, J. Some challenges for spatial econometricians. Paper presented at the 2nd International Scientific Conference about Spatial Econometrics and Regional Economic Analysis, University of Lodz, Poland. June 4–5, 2013. <https://dSPACE.uni.lodz.pl/xmlui/bitstream/handle/11089/10455/01-paelinck.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- 11 Shakil Ahmad Romshoo, Muzamil Amin, K.L.N. Sastry, Manish Parmar. 2020. Integration of social, economic and environmental factors in GIS for land degradation vulnerability assessment in the Pir Panjal Himalaya, Kashmir, India. *Applied Geography*, Volume 125 (2020) 102307. <https://doi.org/10.1016/j.apgeog.2020.102307>
- 12 R D Swetnam, B Fisher, B P Mbilinyi, P K T Munishi, S Willcock, T Ricketts, S Mwakalila, A Balmford, N D Burgess, A R Marshall, S L Lewis. Mapping socio-economic scenarios of land cover change: A GIS method to enable ecosystem service modelling. 2011 Mar;92(3):563-74. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2010.09.007>
- 13 Nyussupova, G., Aidarkhanova, G., Kenespayeva, L., & Kelinbayeva, R. (2022). Analysis of Human Capital in the Republic of Kazakhstan through GIS: Regional Aspect. *International Journal of Geoinformatics*, 18(1), 15–25. <https://doi.org/10.52939/ijg.v18i1.2099>
- 14 Agency for Strategic planning and reforms of the Republic of Kazakhstan Bureau of National statistics. <https://stat.gov.kz/>
- 15 A. O. Shigarov, I. V. Bychkov, V. V. Paramonov, P. V. Belykh. 2015. Analysis and interpretation of arbitrary tables based on the execution of CRL rules. *Computing technologies* Vol. 20, No. 6, 2015 <http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1704>
- 16 Shigarov, A. Table understanding using a rule engine // *Expert Systems with Applications*. 2015. Vol. 42, No. 2. P. 929–937. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2014.08.045>



17 Poverty Measurement Guide. UNITED NATIONS ECONOMIC COMMISSION FOR EUROPE. New York and Geneva, 2017 [https://unece.org/fileadmin/DAM/stats/publications/2018/ECECESSTAT20174\\_ru.pdf](https://unece.org/fileadmin/DAM/stats/publications/2018/ECECESSTAT20174_ru.pdf)

**Ә. Ғ. ОСПАН<sup>1</sup>, М.Е. МАНСУРОВА<sup>1</sup>, Е.Х. КАКИМЖАНОВ<sup>1</sup>, С.Ш. ИКСАНОВ<sup>1</sup>,  
В.Б. БАРАХНИН<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup> Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

<sup>2</sup> Ақпараттық және есептеуіш технологиялар федералды зерттеу орталығы,  
Новосибирск, Ресей

<sup>3</sup> Новосибирск мемлекеттік Университеті, Новосибирск, Ресей

## **ҚАЗАҚСТАН ХАЛҚЫНЫҢ ӨМІР СҮРУ ДЕҢГЕЙІН ТАЛДАУ ҮШІН ӘЛЕУМЕТТІК-ЭКОНОМИКАЛЫҚ КӨРСЕТКІШТЕРДІ КЕҢІСТІКТІК ДЕРЕКТЕРМЕН ИНТЕГРАЦИЯЛАУ БАҒДАРЛАМАСЫН ӘЗІРЛЕУ**

Халықтың әлеуметтік-экономикалық жағдайын бағалау және тиімді шешімдер қабылдау үшін өзекті және сенімді ақпарат қажет. Кеңістіктік ақпараттық базаның көмегімен әлеуметтік қамсыздандыру мен өмір сүру деңгейі туралы деректерді стратегиялық даму жоспарларын әзірлеу және шешім қабылдау процесін жақсарту үшін біріктіруге болады. Бұл мақалада Қазақстан тұрғындарының өмір сүру деңгейі мен әлеуметтік қамтамасыз етілуі туралы ақпаратты картада көрсете отырып интеграциялау бойынша жұмыстар ұсынылған. Интеграция үшін ГАЖ құралдары қолданылды, өйткені осы саладағы соңғы технологиялық жетістіктер географиялық деректердің үлкен көлемін басқаруға және әлеуметтік-экономикалық деректермен кеңістіктік орта құруға мүмкіндік береді. Бұл жұмыс Ұлттық статистика бюросынан құрылымданбаған деректерді жинауды, деректерді атрибуты-мәні жұбы ретінде құрылымдалған дерекқорға қайта форматтауды, нақты табыс индексі, кедейліктің тереңдігі мен ауырлығы және әлеуметтік теңсіздік индексі сияқты өмір сүру деңгейінің маңызды көрсеткіштерін есептеуді қамтиды. Интернеттегі нәтижелерді бақылау, алынған нәтижелер негізінде аймақтарды салыстыруға арналған карта. Сондай-ақ, кесте атрибуттарының торын құру үшін жасалған операцияны атап өту керек, өйткені ол автоматты түрде ГАЖ құралының көмегімен жүзеге асырылды. Жұмыс нәтижелері өмір сүру деңгейінің үш маңызды көрсеткіші бойынша ұсынылған және Қазақстанның әрбір өңірі бойынша көрсеткіштердің өзгергенін көрнекі көрсету үшін жылу картасының көмегімен картада көрсетілген.

**Түйін сөздер:** әлеуметтік-экономикалық ақпарат, өмір сүру деңгейінің көрсеткіштері, кеңістіктік деректер, ГАЖ, картографиялық визуализация, деректерді шығару.

**А.Г. ОСПАН<sup>1</sup>, М.Е. МАНСУРОВА<sup>1</sup>, Е.Х. КАКИМЖАНОВ<sup>1</sup>,  
С.Ш. ИКСАНОВ<sup>1</sup>, В.Б. БАРАХНИН<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup> Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

<sup>2</sup> Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия

<sup>3</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

## РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ ИНТЕГРАЦИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ АНАЛИЗА УРОВНЯ ЖИЗНИ НАСЕЛЕНИЯ КАЗАХСТАНА

Актуальная и достоверная информация необходима для оценки социально-экономического положения населения и принятия эффективных решений. С помощью пространственной информационной базы данные о социальном обеспечении и уровне жизни могут быть интегрированы для разработки стратегических планов развития и улучшения процесса принятия решений. В данной статье представлены работы по интеграции информации об уровне жизни и социальной обеспеченности жителей Казахстана с отображением данных на карте. Для интеграции использовались инструменты ГИС, поскольку последние технологические достижения в этой области позволяют манипулировать большими объемами географических данных и создавать пространственную среду с социально-экономическими данными. Эта работа включает в себя сбор неструктурированных данных из Бюро национальной статистики, реформатирование данных в структурированную базу данных в виде пары атрибут-значение, расчет важных показателей уровня жизни, таких как индекс реального дохода, глубина и серьезность бедности и индекс социального неравенства, отслеживание результатов в Интернете, карта для сравнения регионов на основе полученных результатов. Также важно отметить операцию, выполненную для построения сетки атрибутов таблицы, так как она была реализована автоматически с помощью инструмента ГИС. Результаты работы представлены по трем важным показателям уровня жизни и отображены на карте с помощью тепловой карты, чтобы наглядно показать изменение показателей по каждому региону Казахстана.

**Ключевые слова:** социально-экономическая информация, показатели уровня жизни, пространственные данные, ГИС, картографическая визуализация, извлечение данных.

**Е. Н. СЕЙТКУЛОВ<sup>1\*</sup>, Р. М. ОСПАНОВ<sup>1</sup>, Б. Б. ЕРГАЛИЕВА<sup>1</sup>,  
А. Т. АХМЕДИЯРОВА<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева,  
Нур-Султан, Казахстан  
e-mail: yerzhan.seitkulov@gmail.com

<sup>2</sup>Центр научных и научно-технических исследований National Security  
Алматы, Казахстан

## **АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ГЕНЕРАЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ S-БЛОКОВ**

*В работе выполнен обзор алгебраических методов генерации криптографических S-блоков. В данной работе рассмотрены методы генерации S-блоков, основанные на применении полиномиальных преобразований (линейных, квадратичных, кубических), дробно-линейных преобразований и других специальных видов алгебраических преобразований. Также приведен ряд примеров генерации S-блоков с помощью квазигрупп и других алгебраических структур. Рассмотренные методы генерации S-блоков позволяют получить новые S-блоки, обладающие необходимыми криптографическими свойствами, такими же или даже лучше, чем у S-блока, построенного для алгоритма Rijndael.*

**Ключевые слова:** информационная безопасность, криптография, криптографические алгоритмы, S-блоки, алгебраические методы.

**Введение.** Одной из важных и сложных задач в современной криптографии является нахождение эффективных методов генерации криптографических оптимальных S-блоков, определяющих устойчивость криптографических алгоритмов к различным криптоаналитическим атакам. В данной работе рассматривается алгебраический подход к решению этой задачи. При алгебраических методах S-блоки проектируются в соответствии с некоторыми доказанными математическими соотношениями и принципами. Классическим алгебраическим методом генерации S-блоков является метод, с помощью которого был построен S-блок для алгоритма Rijndael [1] (победитель конкурса AES). Существует ряд модификаций такого метода, основанные на варьировании выбора определенного неприводимого многочлена, по модулю которого определяется умножение в поле  $GF(2^8)$ , выбора первого преобразования из альтернативных преобразований в работе Ниберга [2], выбора определенной матрицы аффинного преобразования и выбора определенной сдвиговой константы. В работе [3] представлен обзор методов генерации Rijndael S-блоков и их модификаций, а также обобщенный алгебраический метод конструирования 8-битных Rijndael S-блоков. В данной работе дается обзор других алгебраических методов генерации S-блоков, существенно отличающихся от вышеуказанных. Рассматриваются методы генерации S-блоков, основанные на применении полиномиальных преобразований (линейных, квадратичных, кубических), дробно-линейных преобразований и других специальных видов алгебраических преобразований. Также приводится ряд приме-

---

\* E-mail корреспондирующего автора: yerzhan.seitkulov@gmail.com

ров генерации S-блоков с помощью квазигрупп и других алгебраических структур, эллиптических кривых, теории графов. Рассматриваемые методы генерации S-блоков позволяют получить новые S-блоки, обладающие необходимыми криптографическими свойствами, такими же или даже лучше, чем у S-блока, построенного для алгоритма Rijndael.

**Алгебраические методы.** Как известно, для симметричного блочного алгоритма шифрования Rijndael S-блок конструируется на основе выбора определенного неприводимого многочлена, по модулю которого определяется умножение в поле  $GF(2^8)$ , выбора первого преобразования из альтернативных преобразований из работы Ниберга, выбора определенной матрицы аффинного преобразования и выбора определенной сдвиговой константы. Аналогичным образом можно построить другие S-блоки, варьируя наборы выбираемых компонентов, используемых в конструкции наподобие Rijndael S-блока. Таким образом, был создан ряд модификаций построения Rijndael-подобных S-блоков. А в работе [3] был представлен обобщенный алгебраический метод конструирования 8-битных Rijndael S-блоков. Однако существует ряд других алгебраических методов генерации S-блоков, существенно отличающихся от методов построения Rijndael S-блоков и их модификаций.

Существуют методы генерации S-блоков, основанные на применении полиномиальных преобразований (линейных, квадратичных, кубических).

Например, в работе [4] предлагается алгебраический метод получения динамических S-блоков с использованием линейного полиномиального преобразования и перестановки. Метод состоит из следующих основных этапов.

1. Применяется преобразование  $F : GF(2^n) \rightarrow GF(2^n)$ , определяемое формулой  $F(x) = (ax + b) \bmod (2^n + 1)$ , где  $a, b, x \in GF(2^n)$ ,  $a \neq 0$ .

2. К результату первого этапа применяется модулярная мультипликативная инверсия по модулю  $\bmod (2^n + 1)$ .

3. Далее к полученному результату применяется перестановка.

В работе [5] предлагается еще один алгебраический метод получения динамических S-блоков с использованием полиномиального квадратичного преобразования, динамического аффинного преобразования и перестановочной техники создания окончательного S-блока. Метод состоит из следующих основных этапов.

1. Применяется квадратичное преобразование  $F : GF(2^n) \rightarrow GF(2^n)$ , определяемое формулой  $F(x) = (a^2x + b) \bmod 2^n$ , где  $a, b, x \in GF(2^n)$ ,  $a \neq 0$ .

2. К результату первого этапа применяется модулярная мультипликативная инверсия по модулю  $\bmod (2^n + 1)$ .

3. Далее применяется динамическое аффинное преобразование.

4. Далее к полученному результату применяется динамическая перестановка.

В работе [6] S-блок  $F : GF(2^n) \rightarrow GF(2^n)$  определяется формулой кубического преобразования  $F(x) = (a^3x + b) \bmod (2^n + 1)$ , где  $a, b, x \in GF(2^n)$ ,  $a \neq 0$ . Так, например, 8-битный

S-блок  $F : GF(2^8) \rightarrow GF(2^8)$  определяется как 
$$F(x) = \begin{cases} (63x^3 + 100) \bmod 257, & x \neq 135 \\ 31, & x = 135 \end{cases}.$$

При  $x = 135$   $F(x) \notin GF(2^8)$ , поэтому для сохранения биективности для этих значений  $x$  значение  $F(x)$  доопределяется как 31 при  $x = 135$ .

Существуют методы генерации S-блоков, основанные на применении дробно-линейных преобразований и других специальных видах алгебраических преобразований.

Например, в работе [7] S-блок  $F : GF(2^8) \rightarrow GF(2^8)$  определяется как композиция  $F = g \circ f$  двух преобразований. Первое преобразование определяется как

$$g(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ где } a, b, c, d \in GF(2^8) \text{ и } ad - bc \neq 0. \text{ Это преобразование является дробно-}$$

линейным преобразованием (известное как преобразование Мёбиуса), определяющее действие проективной общей линейной группы  $PGL(2, GF(2^8))$  на  $GF(2^8)$ . С помощью этого действия можно построить 16776960 S-блоков. S-блок строится путем вычисления  $g(x)$  для фиксированных значений  $a, b, c, d \in GF(2^8)$  для каждого элемента  $x \in GF(2^8)$  с проверкой условий  $ad - bc \neq 0$  и  $cx + d \neq 0$ . Числа, полученные в результате вычисления  $g(x)$  затем преобразуются в двоичную форму и представляются как степень  $w$ , где  $w$  – корень примитивного неприводимого многочлена. Неприводимый многочлен, по модулю которого определяется умножение в поле  $GF(2^8)$ , выбирается из списка 30 неприводимых многочленов степени 8 [8]. Второе преобразование  $f$  является перестановкой определенного типа из симметрической группы  $S_{256}$ . Это преобразование позволяет изменить положение элементов, а также разрушить структуру поля Галуа. В табличной форме эта перестановка следующая:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	212	16	44	114	149	42	176	240	76	160	96	189	207	251	84	214
1	112	229	228	230	196	8	201	191	159	106	125	110	164	117	33	249
2	213	155	248	167	56	116	69	38	177	206	192	58	70	172	87	204
3	217	168	123	145	238	77	127	173	63	99	80	62	246	133	137	85
4	244	129	78	83	161	9	209	183	25	59	12	188	90	73	171	113
5	35	236	130	163	158	242	187	134	57	18	100	225	92	142	13	150
6	200	24	170	5	237	36	148	147	140	72	71	154	165	174	184	21
7	239	75	97	151	152	128	256	215	231	51	136	105	232	61	226	107
8	26	88	182	68	198	143	4	233	54	43	46	120	22	220	52	60
9	19	181	29	11	30	245	175	89	104	178	79	45	2	103	241	193
10	47	202	6	223	221	243	3	40	115	95	14	93	64	32	144	81
11	190	162	141	180	101	119	124	28	254	210	7	253	109	224	37	186
12	250	74	1	194	205	131	10	219	146	135	23	132	98	126	66	203
13	41	121	195	252	185	255	208	122	222	227	53	20	86	234	102	211
14	49	39	138	48	65	139	199	91	179	67	235	15	216	157	247	34
15	50	108	153	169	197	156	111	27	118	82	218	31	17	55	166	94

Таким образом,  $F(a) = f(g(a))$  для любого  $a \in GF(2^8)$ .

Так, например, в работе [9] S-блок  $F : GF(2^8) \rightarrow GF(2^8)$  строится с помощью дробно-линейного преобразования  $g(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ , где  $a = 35 \in GF(2^8)$   $b = 15 \in GF(2^8)$   $c = 9 \in GF(2^8)$   $d = 5 \in GF(2^8)$  и перестановки, задаваемой следующей таблицей.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	212	139	143	19	31	230	50	172	191	39	174	86	184	156	224	109
1	209	185	176	171	61	23	60	128	220	18	252	85	81	186	237	22
2	98	204	9	102	182	46	126	54	119	248	107	233	4	47	197	190
3	131	17	232	254	6	65	201	243	132	150	30	16	26	3	137	69
4	63	92	111	7	112	68	236	21	40	78	250	104	219	89	0	161
5	113	120	148	251	66	169	175	12	216	145	10	165	214	181	179	189
6	64	166	15	207	75	117	247	215	14	79	44	52	33	108	228	8
7	25	1	115	70	173	123	100	13	211	133	155	67	56	57	223	5
8	127	35	103	29	2	141	180	142	183	87	217	195	151	196	213	125
9	135	110	205	203	229	97	129	27	194	114	208	249	76	59	177	42
10	93	37	225	82	147	168	88	222	124	239	11	48	136	20	178	28
11	122	210	245	158	235	241	91	55	118	72	41	43	188	130	200	53
12	32	94	246	202	80	164	116	221	193	101	198	121	146	162	74	34
13	152	255	140	159	167	62	73	106	24	160	163	138	51	105	71	99
14	226	58	84	192	238	234	170	154	244	242	206	49	240	199	90	231
15	157	96	77	253	218	83	134	149	187	45	227	144	153	95	36	38

Аналогично в работе [10] S-блок  $F : GF(2^8) \rightarrow GF(2^8)$  строится с помощью дробно-линейного преобразования  $F(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{cx+d}, x \neq 47 \\ 149, x = 47 \end{cases}$ , где  $a = 29 \in GF(2^8)$   $b = 15 \in GF(2^8)$

$c = 8 \in GF(2^8)$   $d = 5 \in GF(2^8)$ . При  $x = 47$  знаменатель обращается в 0, поэтому для сохранения биективности для этого значения  $x$  значение  $F(x)$  доопределяется как 149. Неприводимый многочлен, по модулю которого определяется умножение в поле  $GF(2^8)$ ,  $m(x) = x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + 1$ .

В другой работе [11] S-блок  $F : GF(2^8) \rightarrow GF(2^8)$  строится с помощью дробно-линейного преобразования  $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , где  $a = 45 \in GF(2^8)$   $b = 10 \in GF(2^8)$   $c = 2 \in GF(2^8)$   $d = 9 \in GF(2^8)$ .

В работе [12] S-блок  $F : GF(2^n) \rightarrow GF(2^n)$  строится с помощью так называемого дробно-кубического преобразования  $F(x) = \frac{1}{\alpha x^3 + \beta} \text{mod}(2^n + 1)$ , где  $\alpha, \beta, x \in GF(2^n)$ ,  $\alpha, \beta$  не равно 0 одновременно,  $\alpha x^3 + \beta \neq 0$ . Так, например, 8-битный S-блок  $F : GF(2^8) \rightarrow$

$GF(2^8)$  определяется как  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{95x^3 + 15} \text{mod}(2^8 + 1), x \neq 176, x \neq 184 \\ 0, x = 176 \\ 106, x = 184 \end{cases}$ . При  $x = 176$

$\frac{1}{95x^3 + 15} \text{mod}(2^8 + 1) \notin GF(2^8)$ , а при  $x = 184$   $95x^3 + 15 = 0$ , поэтому для сохранения

биективности для этих значений  $x$  значение  $F(x)$  доопределяется как 0 при  $x = 176$  и 106 при  $x = 184$ .

В [13] S-блок  $F : GF(2^8) \rightarrow GF(2^8)$  определяется по формуле:

$$F(x) \begin{cases} \frac{A \times x \otimes \alpha}{A \times x \otimes \beta}, & \text{если } x \neq A^{-1} \times \beta \\ 01 & \text{(в шестнадцатеричном представлении), если } x = A^{-1} \times \beta \end{cases},$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 10001101 \\ 11000110 \\ 01100011 \\ 10110001 \\ 11011000 \\ 01101100 \\ 00110110 \\ 00011011 \end{pmatrix}, \quad \alpha = FE, \quad \beta = 3F \quad (\text{в шестнадцатеричном представлении}).$$

Умножение в поле  $GF(2^8)$  выполняется по модулю неприводимого многочлена  $m(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x^1$ .

Существуют методы генерации S-блоков, основанные на применении квазигрупп и других алгебраических структур.

Например, в работе [14] предлагается метод построения криптографически стойких 4-битовых S-блоков с использованием квазигрупп порядка 4. Цель работы – предоставить итеративный инструмент для проектирования криптографически стойких S-блоков (в [14] обозначаемых как Q-S-блоки, поскольку их построение осуществляется квазигруппами) для будущих разработок в симметричной низкоресурсной (легковесной) криптографии. Этот метод позволяет работать в основном с несколькими разными стойкими S-блоками, повторно используя только одну аппаратную схему и просто изменяя несколько параметров. Метод состоит из следующих основных шагов. Соответствующие определения можно найти в [14].

Шаг 1. Выбирается одна нелинейная квазигруппа порядка 4.

Шаг 2. Задается количество раундов.

Шаг 3. Задаются лидеры. Обычно их количество совпадает с количеством раундов.

Шаг 4. Генерируются все возможные входные 4-битовые блоки в лексикографическом порядке (их общее количество  $2^4 = 16$ ).

Шаг 5. Для каждого входного блока выполняются следующие шаги:

Шаг 5.1. К входному блоку применяется  $e$ -преобразование с лидером  $\ell$ .

Шаг 5.2. Изменяется полученный выше результат и снова применяется  $e$ -преобразование с уже другим лидером  $\ell$ .

Шаг 5.3. Эти шаги повторяются столько раз, сколько есть количество раундов.

Шаг 5.4. Сохраняется 4-битный результат последнего раунда.

Шаг 6. В конце объединяются все сохраненные результаты, генерируя перестановку порядка 16 или 4-битный Q-S-блок.

Далее выполняется проверка оптимальности полученного S-блока.

В работе [15] предлагается метод построения 8-битовых S-блоков, основанный на применении действия проективной специальной линейной группы  $PSL(2, \mathbb{Z})$  на проективной линии  $PL(GF(7))$  над конечным полем  $GF(7)$ . Метод состоит из следующих основных шагов.

Шаг 1. Выполняется действие проективной специальной линейной группы  $PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle x, y : x^2 = y^2 = 1 \rangle$  на проективной линии  $PL(GF(7)) = GF(7) \cup \infty = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty\}$  над конечным полем  $GF(7)$ . В результате получается группа перестановок  $G$ , порождаемая  $\bar{x} = (0 \infty)(1 6)(2 3)(4 5)$  и  $\bar{y} = (0 \infty 1)(2 4 6)(3 5)$ .

Шаг 2. Рисуются диаграмма смежных классов, используя перестановки  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ . Диаграмма смежных классов – это графический способ представления перестановочного действия конечно порожденной группы. На рисунке 1 показана диаграмма смежных классов, полученная для группы перестановок  $G$ . Поскольку  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  имеют порядок 2 и 3 соответственно, порождающий  $\bar{x}$  обозначается ребром, а порождающий  $\bar{y}$  изображается треугольником. Вершины треугольника переставлены против часовой стрелки, а фиксированные точки  $\bar{y}$  обозначены жирными точками на диаграмме смежных классов.

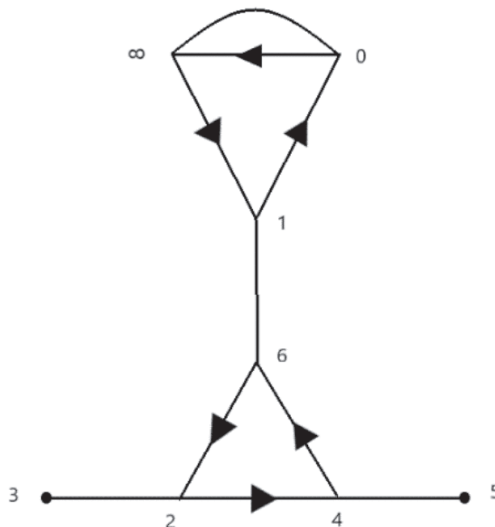


Рисунок 1 – Диаграмма смежных классов для группы перестановок  $G$ .

Шаг 3. Строится матрица смежности  $M$  из диаграммы смежных классов для действия  $PSL(2, \mathbb{Z})$  на  $PL(GF(7))$ . Матрица смежности ориентированного графа  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество вершин, а  $E$  — множество ребер, имеет значение 1 на своей  $(i, j)$ -й позиции, если существует ребро из  $v_i$  в  $v_j$ , где  $v_1, v_2, \dots, v_n$  — произвольный список вершин ориентированного графа. Т.е. элементы  $M = (m_{ij})$  матрицы смежности ориентированного графа определяются следующим образом:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \text{ – ребро } G \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

В диаграмме смежных классов на рисунке 1 вершины помечены как 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и  $\infty$ . Из рисунка видно, что существует ребро от 0 до 1, поэтому в матрица смежности элемент, расположенный на пересечении 1-й строки и 8-го столбца, равен 1, а все остальные элементы 1-й строки равны 0. Точно так же во 2-й строке матрицы смежности 1-й и 7-й элементы равны 1, потому что существует ребро от 1 до 0 и от 1 до 6. Все остальные элементы в этой строке равны нулю. Таким же образом, заполняя оставшиеся элементы в матрице, в результате формируется следующая матрица смежности  $M$ :

$$M = \begin{pmatrix} 00000001 \\ 10000010 \\ 00011000 \\ 00110000 \\ 00000110 \\ 00001100 \\ 01100000 \\ 11000000 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. К элементам поля  $GF(2^8)$  применяются преобразования  $T_k$ , определяемые следующим образом:  $T_k(t_n) = Mt_n + \sum_{r \in I_k} t_{n+r(\bmod 256)}$ , где  $t_n \in GF(2^8)$  в 8-битной двоичной форме,  $n = 0, 1, 2, \dots, 255$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$ ,  $I_k$  – 8 различных множеств целых чисел  $I_1 = \{1, 2, 3, \dots, 128\}$ ,  $I_2 = \{2, 4, 6, \dots, 128\}$ ,  $I_3 = \{4, 8, 12, \dots, 128\}$ ,  $I_4 = \{8, 16, 24, \dots, 128\}$ ,  $I_5 = \{16, 32, 48, \dots, 128\}$ ,  $I_6 = \{32, 64, 96, \dots, 128\}$ ,  $I_7 = \{64, 128\}$ ,  $I_8 = \{128\}$  а  $M$  – матрица, построенная на предыдущем шаге. Например, для  $k = 7$   $T_7(t_n) = Mt_n + t_{n+64(\bmod 256)} + t_{n+128(\bmod 256)}$ . Аналогично, для  $k = 8$   $T_8(t_n) = Mt_n + t_{n+128(\bmod 256)}$ . В результате применения преобразований  $T_1, \dots, T_8$  получаются 8 различных 8-битовых S-блоков.

Существует множество еще других алгебраических методов генерации подстановок, например, [16], [17]. Их все объединяет то, что они были получены в результате многочисленных исследований, направленных на поиск наиболее эффективных методов построения оптимальных S-блоков. Рассмотренные методы генерации S-блоков позволяют получить новые S-блоки, обладающие необходимыми криптографическими свойствами, такими же или даже лучше, чем у S-блока, построенного для алгоритма Rijndael.

**Заключение.** В данной работе рассмотрен ряд алгебраических методов генерации криптографических S-блоков. Классическим алгебраическим методом генерации S-блоков является метод конструирования Rijndael S-блоков. Существующие модификации этого метода основаны на варьировании выбора определенного неприводимого многочлена, по модулю которого определяется умножение в поле  $GF(2^8)$ , выбора первого преобразования из альтернативных преобразований в работе Ниберга, выбора определенной матрицы аффинного преобразования и выбора определенной

сдвиговой константы. В результате многочисленных исследований, направленных на поиск наиболее эффективных методов построения оптимальных S-блоков, был построен ряд других алгебраических методов генерации S-блоков, существенно отличающихся от метода конструирования Rijndael S-блоков. В данной работе рассмотрены методы генерации S-блоков, основанные на применении полиномиальных преобразований (линейных, квадратичных, кубических), дробно-линейных преобразований и других специальных видов алгебраических преобразований. Также приведен ряд примеров генерации S-блоков с помощью квазигрупп и других алгебраических структур. Рассмотренные методы генерации S-блоков позволяют получить новые S-блоки, обладающие необходимыми криптографическими свойствами, такими же или даже лучше, чем у S-блока, построенного для алгоритма Rijndael.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК, № AP09258274

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Daemen, J., Rijmen, V. The Design of Rijndael: AES - The Advanced Encryption Standard // Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002, 238 p., doi: 10.1007/978-3-662-04722-4.
- 2 Nyberg, K. Differentially uniform mappings for cryptography // Advances in Cryptology, Proc. Eurocrypt'93, LNCS 165, T. Helleseht, Ed., Springer-Verlag, 1994, pp. 55-64.
- 3 Оспанов Р., Сейткулов Е., Ергалиева Б. обобщенный алгебраический метод конструирования 8-битных rijndael S-блоков // Вестник КазАТК, 120(1), 156–163. <https://doi.org/10.52167/1609-1817-2022-120-1-156-163>
- 4 A. H. Zahid, E. Al-Solami and M. Ahmad, "A Novel Modular Approach Based Substitution-Box Design for Image Encryption," in IEEE Access, vol. 8, pp. 150326-150340, 2020, doi: 10.1109/ACCESS.2020.3016401.
- 5 Zahid A. H. et al. Dynamic S-Box Design Using a Novel Square Polynomial Transformation and Permutation // IEEE Access, vol. 9, pp. 82390-82401, 2021, doi: 10.1109/ACCESS.2021.3086717.
- 6 Zahid A.H., Arshad M.J. An Innovative Design of Substitution-Boxes Using Cubic Polynomial Mapping. Symmetry 2019, 11, 437.
- 7 Altaleb A., Saeed M.S., Hussain I., Aslam M. An algorithm for the construction of substitution box for block ciphers based on projective general linear group. AIP Advances. 2017, 7, 035116
- 8 Church, R. Tables of irreducible polynomials for the first four prime moduli // The Annals of Maths., 2nd Series, vol. 36, no. 1, pp. 198-209, Jan (1935) <http://www.jstor.org/stable/1968675>.
- 9 Nizam Chew L.C., Ismail E.S. S-box Construction Based on Linear Fractional Transformation and Permutation Function. Symmetry 2020, 12, 826.
- 10 Farwa, Shabieh & Idrees, Lubna. (2016). A highly nonlinear S-box based on a fractional linear transformation. SpringerPlus. 5. 10.1186/s40064-016-3298-7.
- 11 Iqtadar Hussain, Tariq Shah, Muhammad Asif Gondal, Majid Khan and Waqar Ahmad Khan Construction of New S-box using a Linear Fractional Transformation // World Applied Sciences Journal 14 (12): 1779-1785, 2011
- 12 Zahid, A.H., Arshad, M.J., Ahmad, M.: A novel construction of efficient substitution-boxes using cubic fractional transformation, Entropy 21 (2019), no. 3, Paper No. 245 (2019)
- 13 Nitaj A., Susilo W., Tonien J. A New Improved AES S-box with Enhanced Properties // Liu J., Cui H. (eds) Information Security and Privacy. ACISP 2020. Lecture Notes in Computer Science, vol 12248. Springer, Cham. 2020. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-55304-3\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-030-55304-3_7)



14 Mihajloska, H., Gligoroski, D. Construction of Optimal 4-bit S-boxes by Quasigroups of Order 4 // SECURWARE 2012 : The Sixth International Conference on Emerging Security Information, Systems and Technologies, 2012, pp. 163-168.

15 Siddiqui N, Yousaf F, Murtaza F, Ehatisham-ul-Haq M, Ashraf MU, Alghamdi AM, et al. (2020) A highly nonlinear substitution-box (S-box) design using action of modular group on a projective line over a finite field. PLoS ONE 15(11): e0241890. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0241890>

16 Hussain S., Jamal S. S., Shah T., Hussain I. A Power Associative Loop Structure for the Construction of Non-Linear Components of Block Cipher. IEEE Access, vol. 8, pp. 123492-123506, 2020

17 Gao W., Idrees B., Zafar S., Rashid T. Construction of Nonlinear Component of Block Cipher by Action of Modular Group  $PSL(2, Z)$  on Projective Line  $PL(GF(28))$ . IEEE Access, vol. 8, pp. 136736-136749, 2020

***Е. Н. СЕЙТҚҰЛОВ<sup>1</sup>, Р. М. ОСПАНОВ<sup>1</sup>, Б. Б. ЕРҒАЛИЕВА<sup>1</sup>,  
А. Т. АХМЕДИЯРОВА<sup>2</sup>***

*<sup>1</sup>Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті  
Нұр-Сұлтан, Қазақстан  
e-mail: yerzhan.seitkulov@gmail.com*

*<sup>2</sup>National Security ғылыми және ғылыми-техникалық зерттеулер орталығы  
Алматы, Қазақстан*

## **ОПТИМАЛДЫ S-БЛОКТАРДЫ ТУЫНДАУДЫҢ АЛГЕБРАЛЫҚ ӘДІСТЕРІ**

*Жұмыста криптографиялық S-блоктарды құрудың алгебралық әдістеріне шолу ұсынылған. Бұл жұмыста біз көпмүшелік түрлендірулерді (сызықтық, квадраттық, кубтық), бөлік сызықтық түрлендірулерді және алгебралық түрлендірулердің басқа да арнайы түрлерін пайдалану негізінде S-блоктарды генерациялау әдістерін қарастырамыз. Сондай-ақ, квазигруппаларды және басқа алгебралық құрылымдарды пайдаланып S-блоктарын құрудың бірқатар мысалдары келтірілген. S-блоктарын генерациялаудың қарастырылған әдістері Rijndael алгоритмі үшін құрастырылған S-блоктарымен бірдей немесе тіпті жақсырақ қажетті криптографиялық қасиеттері бар жаңа S-блоктарын алуға мүмкіндік береді.*

***Түйін сөздер:** ақпараттық қауіпсіздік, криптография, криптографиялық алгоритмдер, S-блоктары, алгебралық әдістер.*

***YERZHAN N. SEITKULOV<sup>1</sup>, RUSLAN M. OSPANOV<sup>1</sup>, BANU B. YERGALIYEVA<sup>1</sup>,  
AINUR AKHMEDIYAROVA<sup>2</sup>***

*<sup>1</sup>Gumilyov Eurasian National University  
Nur-Sultan, Kazakhstan  
e-mail: yerzhan.seitkulov@gmail.com*

*<sup>2</sup>Center for Scientific and Scientific and Technical Research National Security  
Almaty, Kazakhstan*

## ALGEBRAIC METHODS FOR GENERATING OPTIMAL S-BLOCKS

*The paper presents a review of algebraic methods for generating cryptographic S-boxes. In this paper, we consider methods for generating S-boxes based on the use of polynomial transformations (linear, quadratic, cubic), fractional linear transformations, and other special types of algebraic transformations. A number of examples of generating S-boxes using quasigroups and other algebraic structures are also given. The considered methods for generating S-boxes make it possible to obtain new S-boxes that have the necessary cryptographic properties that are the same or even better than those of the S-box built for the Rijndael algorithm.*

**Key words:** *information security, cryptography, cryptographic algorithms, S-boxes, algebraic methods.*

**Э. Э. ЭЛЬДАРОВА\*, Н. Б. БАЙТЕМИРОВА**

*Евразийский национальный университет имени Л.Ю.Гумилева,  
Нур-Султан, Казахстан, doctorphd\_eldarova@mail.ru  
Атырауский университет им.Х.Досмухамедова,  
Атырау, Казахстан, bnb-84@mail.ru*

## **ПОВЫШЕНИЕ ВИЗУАЛЬНОГО КАЧЕСТВА РАЗМЫТЫХ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

*Цель устранения размытия изображения заключается в восстановлении четкого изображения с необходимой структурой краев и четкими деталями из входного размытого изображения. Эффект размытия изображения возникает по разным причинам, например, движением или фокусным расстоянием, дрожанием камеры, движением объекта или расфокусировкой. Так как на практике параметры размытия неизвестны или известны лишь приблизительно по характеру видимых искажений, в данном исследовании рассматриваются методы устранения размытия изображения вслепую. В статье исследуются новейшие алгоритмы слепого устранения размытия, разработанные за последние пять лет: SVRNN, SRN, RCGAN, Gao et al., DMPHN, DeblurGAN, MBMF, MSCNN, DeblurGAN-v2, EDPN, RCAN, MSRN, GFN, SelfDeblur. Задачей исследования является выбор наиболее эффективного метода устранения размытости для дальнейшего применения при разработке программных обеспечений для улучшения визуальных качеств цифровых изображений. Эксперименты продемонстрировали, что недавно разработанные методы сходятся быстрее, чем более ранние алгоритмы и способны извлекать изображение, более согласованное с субъективным мнением экспертов. Лучшим методом восстановления размытых изображений на сегодняшний день является DeblurGAN-v2, EDPN и DBGAN(+).*

***Ключевые слова:** качество изображения, цифровое изображение, размытия изображений, безэталонная оценка, объективные показатели.*

**Введение.** Устранение размытости изображения является важной задачей в области компьютерного зрения и обработки изображений. Задача устранения размытия, направленная на восстановление резкости изображений, привлекла исследователей для удовлетворения потребностей растущих пользователей ручных камер и поддержки различных задач компьютерного зрения, таких как обнаружение объектов и сегментация изображений. Изображение является четким, если мы можем правильно воспринимать форму всех его объектов. Например, изображение лица является четким, если мы можем распознать губы, глаза, нос и т.д. Формы содержащихся в нем объектов распознаются по его краям. Таким образом, цель устранения размытия изображения заключается в восстановлении четкого изображения с необходимой структурой краев и четкими деталями из входного размытого изображения. Эффект размытия изображения возникает по разным причинам, например, движением или фокусным расстоянием, дрожанием камеры, движением объекта или расфокусировкой. Процесс размытия можно математически моделировать следующим образом [1-4]:

$$I_B = K * I_S + N ,$$

---

\* E-mail корреспондирующего автора: doctorphd\_eldarova@mail.ru

где  $I_B$  и  $I_S$  – размытые и резкие изображения соответственно.  $K$  – неизвестное (слепое) или известное (неслепое) ядро размытия,  $N$  – шум,  $*$  – операция свертки.

В зависимости от того, что известно о ядре размытия  $K$ , задачи устранения размытия можно разделить на две категории: неслепое устранение размытия и слепое устранение размытия. Неслепое устранение размытия основано на предположении, что ядро размытия  $K$  известно, тогда как слепое устранение размытия основано на предположении, что оно не известно.

Неслепое устранение размытия часто предполагает, что эффект размытия является однородным и моделирует процесс размытия с помощью свертки с заданным фильтром нижних частот. Основное внимание при неслепом удалении размытия уделяется разработке подходящих априорных значений для упорядочения четких изображений, чтобы подавить увеличение шума измерения при обращении процесса свертки. Наиболее известные методы неслепоего устранения размытия опубликованы в работах Chan and Wong, 1998, Cai et al., 2009, Bao et al., 2016, Javaran et al., 2017, Danielyan et al., 2011; Quan et al., 2014, Zhang et al., 2017; Kruse 5 et al., 2017, Tai et al., 2010, Whyte et al., 2012.

В зависимости от настройки эффектов размытия существующие подходы слепого устранения размытия можно разделить на две категории: слепое устранение размытия при равномерном движении объекта, при котором предполагается, что размытие создается путем свертки с неизвестным ядром и слепое удаление размытия при неравномерном движении, при котором учитываются сложные пространственно изменяющиеся эффекты размытия. Слепые методы удаления размытия при равномерном движении также предполагают, что размытие является равномерным, и размытие моделируют с помощью свертки с неизвестным ядром размытия. По сравнению с неслепыми, слепые методы однородного устранения размытия направлены на построение ядра размытия. Как только ядро определено, изображение можно восстановить, вызвав какой-нибудь неслепой метод корректировки размытия. Многие существующие слепые методы при равномерном движении оценивают ядро размытия на основе выбранных сильных краев изображения: Cho and Lee, 2009, Sun et al., 2013, Wang et al., 2018, Schuler et al., 2015, Ren et al., 2016, Pan et al., 2016, Yang and Ji, 2019. Существует ряд подходов слепого устранения размытия при неравномерном движении: Sun et al., 2015, Gong et al., 2017, Nah et al., 2017, Xin et al., 2018, Gao et al., 2019, Zhang et al., 2018, Zhang et al., 2019, Zhang et al., 2019, Kupyn et al., 2018, Liu et al., 2018, Xin et al., 2018, Quan et al. 2020,

Задача устранения размытия слепого изображения широко распространена во многих технических областях, таких как астрономические изображения, рентгенография, оптика, фотография, приложения отслеживания движений и многие другие. Так как на практике параметры размытия неизвестны или известны лишь приблизительно по характеру видимых искажений, в данном исследовании рассматриваются методы устранения размытия изображения вслепую или так называемые методы слепой деконволюции.

Исследователи разработали множество алгоритмов и методов для повышения качества размытых цифровых изображений. Соответственно, проводится множество исследований и эксперименты для оценки производительности алгоритмов устра-

нения размытия. Анализируя [5-7] и другие множество исследований, связанных с данной работой, можно сделать вывод, что за последние десятилетия был достигнут значительный прогресс, о чем свидетельствует появление ряда современных методов, хорошо коррелирующих с субъективными оценками качества изображений. Однако экспериментальные результаты также показывают, что некоторые методы не позволяют оценить качество реалистичных размытых изображений. Это свидетельствует о важности методов NR-IQA, специфичных для размытия.

**Методы и материалы.** Мы оцениваем алгоритмы слепого устранения размытия, разработанные в последние пять лет: SVRNN (Zhang J. et al.,2018), SRN (Tao X. et al.,2018), RCGAN (Zhang H. et al.,2019), Gao et al.,( Gao H. et al.,2019), DMPHN (Kupyn O. et al.,2018), DeblurGAN (Gong D. et al.,2017 ), MBMF (Nah S., Hyun Kim T., Mu Lee K.,2017), MSCNN (Kupyn O. et al.,2019), DeblurGAN-v2 (Xu R. et al.,2021), EDPN (Zhang Y. et al.,2018), RCAN (Li J. et al.,2018), MSRN (Zhang X. et al.,2018), GFN (Ren D. et al.,2020), SelfDeblur (Zhang K. et al.,2020). Задача исследования – выбрать наиболее эффективный метод устранения размытия для дальнейшего применения при разработке программных обеспечений для повышения визуальных качеств цифровых изображений. Мы оценили эти методы с использованием общедоступных кодов.

В качестве данных для проверки и тестирования используется набор данных Lai [6]. Набор данных Lai состоит из реальных и синтезированных размытых изображений. Реальный набор данных содержит 100 реальных размытых изображений, снятых в разных сценариях. Все эти размытые изображения классифицируются со следующими пятью атрибутами: искусственные (66), естественные (14), люди/лица (12), насыщенные (28) и текстовые (17). У реальных изображений нет чистых копий, что делает невозможным количественную оценку путем сравнения с эталоном. Синтезированный набор данных включает 25 четких изображений, из которых синтезировали 100 неоднородных и 100 однородных размытых изображений. Синтезированный набор данных имеет вышеупомянутые пять атрибутов, и каждая группа имеет не менее пяти изображений.



**Рисунок 1** – Примеры изображений атрибутами в реальном наборе данных.

Оценка изображений выполняется двумя методами типа FR и NR (сравнения с эталоном и безэталонная оценка). В качестве FR метода использовали и сравнили известные SSIM и PSNR [8], широко рекомендованные исследователями PieAPP [9], DISTS [10] и новейшие методы IQT [11], IQMA [12]. Стоит отметить, что методы IQT и IQMA являются победителями конкурса NTIRE 2021 по оценке качества изображения (IQA), проводимой совместно с семинаром «Новые тенденции в восстановлении и улучшении изображения» (NTIRE) на конференции CVPR 2021 [13]. Цель этого конкурса состояла в том, чтобы получить метод оценки качества изображения,



способный точнее оценить сходство между исправленными искаженными изображениями и эталонными изображениями с наилучшей корреляцией с экспертной оценкой MOS. Методы IQT и IQMA достигают оценки SRCC выше 0,79 и оценки PLCC 0,780 на базе изображений PIPAL, что превосходит самые высокие оценки существующих алгоритмов (SRCC <0,65 и PLCC <0.68), такие как LPIPS, VGG, PieAPP, DISTIS, SWD, FSIM, SSIM, PSNR.

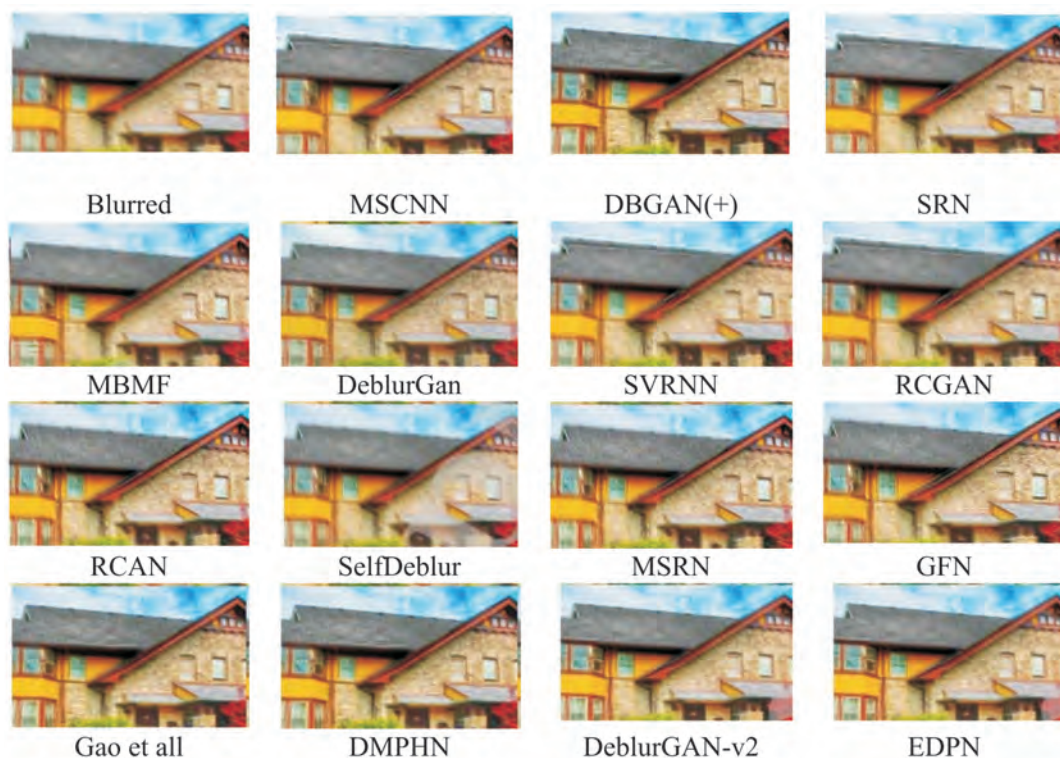
Для выбора безэталонной оценки качества восстановленных размытых изображений использовали классические и новейшие методы, такие как Li et al. [14], BIBLE [15], SPARISH [16], Javaran T. et al.[17], Zhang S. Q. et al[18], Liu L. et al.[19], NSSIM [20], которые более согласованы с субъективными оценками по сравнению с другими методами.

**Таблица 1** – Сравнение характеристик PLCC и SRCC для различных оценочных мер на наборе данных Lai

Меры	Lai's синтетика		Lai's real		Меры	Lai's синтетика		Lai's real	
	PLCC	SRCC	PLCC	SRCC		PLCC	SRCC	PLCC	SRCC
FR методы					NR методы				
SSIM	0,5435	0,5336			LI	0.7013	0.6024	0.3901	0.3161
PSNR	0,5102	0,4477			BIBLE	0.7943	0.6888	0.3606	0.3165
PieAPP	0.7974	0.6074			SPARISH	0.5254	0.4448	0.2704	0.2717
DISTS	0.7873	0.6548			Javaran T. et al.	0.8770	0.7685	0.4018	0.4935
IQT	<b>0.8896</b>	<b>0.8011</b>			Zhang S. Q. et al	<b>0.8104</b>	<b>0.6843</b>	<b>0.6115</b>	<b>0.5352</b>
IQMA	0.8803	0.7009			Zhang S. Q. et al	0.7912	0.7801	0.4952	0.5001
					Liu L. et al.	0.7912	0.7801	0.4952	0.5001
					NSSIM	0.7832	0.6711	0.4941	0.4052

Так как в качестве данных для проверки и тестирования используется набор данных Lai, все сравниваемые меры проверяем на согласованность с субъективными оценками по базе Lai. Результаты проверки показаны в таблице 1. Из Таблицы 1 легко понять, что сравниваемые метрики размытия не очень хорошо работают на реальных размытых изображениях. Многие значения ниже 0,5. Метрики IQT, Zhang S. Q. et al дают лучшие результаты с точки зрения PLCC и SRCC. Для синтетических размытых изображений большинство оценок лучше согласуется с субъективными оценками, имея корреляционные значения выше 0,7. Таким образом, анализируя результаты, приведенные в таблице 1, для оценки методов устранения размытия следует выбирать оценки IQT и Zhang S. Q. et al.

**Обсуждение результатов эксперимента.** Примеры слепого устранения размытия, примененного к неоднородному набору данных Lai, приведены на рисунке 2.



**Рисунок 2** – Примеры применения разных методов обработки на синтетических размытых изображениях

Методы на основе CNN (MSCNN, MBMF) предназначены для динамического устранения размытия сцены. Однако эти методы не могут устранить сильные (размытие из-за ограниченного рецепторного поля в их сетях). Сеть MBMF (Gong et al., 2017) сопоставляет размытое изображение с полем движения. MBMF необходимо обучать на наборе данных, состоящем из размытых изображений и соответствующих полей векторов движения. Гонг и др. (2017) произвели размытие путем синтеза трехмерных движений, состоящих из перемещений по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  и вращения вокруг оси  $z$ , которых достаточно для имитации эффектов камеры, таких как масштабирование. Чтобы решить проблему динамического устранения размытия сцены, MSCNN используют многомасштабную схему и структуру глубокой сети для покрытия большого *рецепторного* поля. Кроме того, размеры их сетей слишком велики, так как сеть должна обрабатывать разные размытия с одинаковым весом.

По сравнению с методами MSCNN, MBMF, метод SVRNN генерирует гораздо более четкие изображения с более четкой структурой и символами. SRN устраняет размытие наравне с MSCNN, но быстро реализуется (1,87с).

Модель Gao et al в целом дает лучшие результаты, чем модели MSCNN и SRN. А также довольно хорошо справляется с неоднородными и высокодинамичными сценами по сравнению с другими, как показано на рисунке 2. DeblurGAN по объективной

шкале уступает SRN. А модель DeblurGAN-v2 демонстрирует явно более высокое визуальное качество по сравнению с SRN, что делает его лучшим с точки зрения субъективной оценки качества результирующего изображения. Результаты устранения размытия методами MSRN и RCAN визуально одинаковы, и объективные показатели менее различные. EDPN превосходит методы RCAN, GFN, MSRN, SRN. DBGAN(+) и SelfDeblur дает хорошие результаты на динамических размытых изображениях, превосходя другие методы.

Результаты устранения размытия реальных изображений из набора данных показаны на рисунках 3 и 4.

В целом SVRNN (Zhang et al., 2018) и SRN (Tao et al., 2018) дают наилучшие результаты. SVRNN особенно хорошо восстанавливает изображения, содержащие объекты с высокой пространственной частотой, такие как текст. Среди многомасштабных методов обучения SRN, который имеет общий вес, превосходит MSCNN (Nah et al., 2017), который их не имеет. Метод ядерной оценки MBMF (Gong et al., 2017) не дает достаточно четких изображений. Ни один из методов не смог восстановить очень размытые изображения, показанные на рисунке 3.

Метод SelfDeblur дает удовлетворительные результаты на реальных размытых изображениях, превосходя другие методы. Из рис. 3 видно, что изображения, обработанные методом SelfDeblur, содержат меньше шумов, чем обработанные методами MBMF и DeblurGAN, а также имеют визуально более реалистичные структуры и текстуру.

По сравнению с методами MSCNN и SRN метод DBGAN(+) обеспечивает лучшее восстановление на реальных размытых изображениях. Модели Gao et al, DBGAN(+) и EDPN успешно восстанавливают узнаваемые детали текста, чем другие.

По сравнению с другими методами, методы DBGAN(+), DeblurGAN-v2 EDPN и Gao et al имеют тенденцию восстанавливать более четкие детали, как показано на рисунках 3 и 4, и обеспечивают хорошее восстановление на реальных размытых изображениях.

В таблице 2 показаны значения оценок как для реальных, так и для синтезированных наборов данных. Методы DeblurGAN-v2, EDPN и DBGAN(+) имеют более высокие оценки на синтезированном и реальном наборах данных.

**Таблице 2** – Среднее значение оценок для реальных и синтезированных наборов данных.

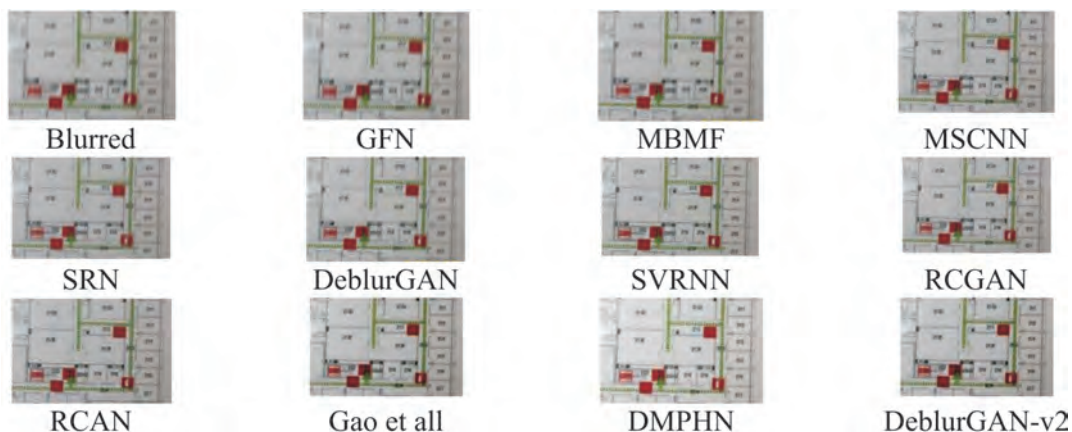
№	Методы	time	Synthetic Dataset		Real Dataset
			IQT	Zhang S. Q. et al	Zhang S. Q. et al
1	2	3	4	5	6
1	SVRNN	1,20	0,831	25,19	23,69
2	SRN	1,30	0,834	25,26	23,98
3	RCGAN	1,42	0,812	26,28	24,37
4	Gao et al	1,60	0,848	25,98	23,92
5	DMPHN	1,75	0,845	24,20	22,25
6	DeblurGAN	0,85	0,858	26,70	22,17

Окончание таблицы 2

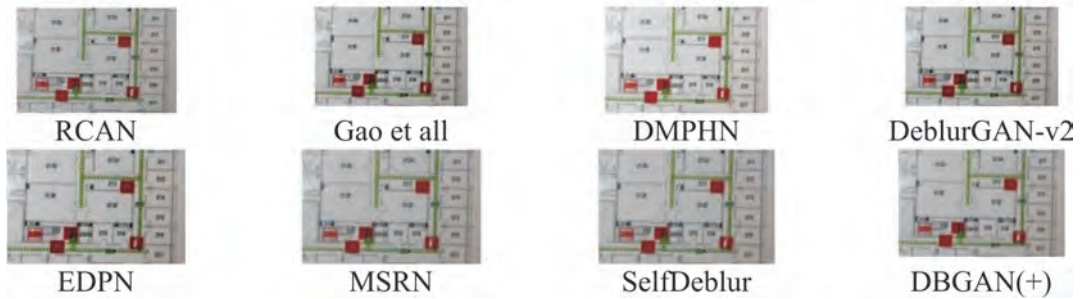
1	2	3	4	5	6
7	MBMF	135,00	0,725	24,98	22,38
8	MSCNN	2,88	0,714	24,98	22,96
9	DeblurGAN-v2	0,06	<b>0,934</b>	<b>28,55</b>	<b>26,23</b>
10	EDPN	0,22	<b>0,909</b>	<b>29,31</b>	<b>26,31</b>
11	RCAN	0,10	0,811	25,62	23,15
12	MSRN	0,04	0,803	25,17	23,65
13	GFN	0,05	0,786	21,74	19,91
14	SelfDeblur	124,00	0,792	22,97	20,97
15	DBGAN(+)	0,75	<b>0,942</b>	27,79	25,53



**Рисунок 3** – Результаты устранения размытия на реальном изображении из набора данных Lai, принадлежащем атрибуту «Естественный»







**Рисунок 4** – Результаты устранения размытия на реальном изображении из набора данных Lai, принадлежащие атрибуту «Текст»

**Заключение.** В этой главе описаны крупномасштабные эксперименты по оценке качества восстановления размытых изображений современными алгоритмами как на реальных, так и на синтезированных наборах данных.

Обсуждаемые методы потенциально способны восстановить изображение в отсутствие знаний о функции размытия точки. Представлены результаты нескольких численных экспериментов для объективного подтверждения достоинств и недостатков методов. Эксперименты продемонстрировали, что недавно разработанные методы сходятся быстрее, чем более ранние алгоритмы, и способны извлекать изображение, более согласованное с субъективным мнением экспертов.

Лучшим методом восстановления размытых изображений на сегодняшний день является DeblurGAN-v2, EDPN и DBGAN(+).

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Sahu S., Lenka M. K., Sa P. K. Blind deblurring using deep learning: A survey //arXiv preprint arXiv:1907.10128. – 2019.
- 2 Zhang K. et al. Deep Image Deblurring: A Survey //arXiv preprint arXiv:2201.10700. – 2022.
- 3 Li C. M. A Survey on Image Deblurring //arXiv preprint arXiv:2202.07456. – 2022.
- 4 Xue Z. Blind Image Deblurring: a Review //arXiv preprint arXiv:2201.10522. – 2022.
- 5 El-Henawy I. M., Amin A. E., Kareem Ahmed H. A. A comparative study on image deblurring techniques //International Journal of Advances in Computer Science and Technology (IJACST). – 2014. – Т. 3. – №. 12. – С. 01-08.
- 6 Lai W. S. et al. A comparative study for single image blind deblurring //Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2016. – С. 1701-1709.
- 7 Голуб Ю. И., Старовойтов Ф. В., Старовойтов В. В. Сравнительный анализ безэталонных оценок резкости цифровых изображений //Доклады Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. – 2019. – №. S7 (125). – С. 113-120.
- 8 Wang Z. et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity //IEEE transactions on image processing. – 2004. – Т. 13. – №. 4. – С. 600-612.
- 9 Prashnani E. et al. Pieapp: Perceptual image-error assessment through pairwise preference // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2018. – С. 1808-1817.
- 10 Ding K. et al. Image quality assessment: Unifying structure and texture similarity //arXiv preprint arXiv:2004.07728. – 2020.



- 11 Cheon M. et al. Perceptual image quality assessment with transformers //Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2021. – С. 433-442.
- 12 Guo H. et al. Iqma network: Image quality multi-scale assessment network //Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2021. – С. 443-452.
- 13 Gu J. et al. NTIRE 2021 challenge on perceptual image quality assessment //Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2021. – С. 677-690.
- 14 Li L. et al. No-reference quality assessment of deblurred images based on natural scene statistics //IEEE Access. – 2017. – Т. 5. – С. 2163-2171.
- 15 Li L. et al. No-reference image blur assessment based on discrete orthogonal moments //IEEE transactions on cybernetics. – 2015. – Т. 46. – №. 1. – С. 39-50.
- 16 Li L. et al. Image sharpness assessment by sparse representation //IEEE Transactions on Multimedia. – 2016. – Т. 18. – №. 6. – С. 1085-1097.
- 17 Askari Javarani T., Alidadi A., Arab S. R. A No-Reference Blur Metric based on Second-Order Gradients of Image //Journal of AI and Data Mining. – 2021. – Т. 9. – №. 1. – С. 11-18.
- 18 Zhang S. et al. No-reference image blur assessment based on response function of singular values //Symmetry. – 2018. – Т. 10. – №. 8. – С. 304.
- 19 Liu L. et al. Blind image blur metric based on orientation-aware local patterns //Signal Processing: Image Communication. – 2020. – Т. 80. – С. 115654.
- 20 Zhang H. et al. No-reference blurred image quality assessment by structural similarity index //Applied Sciences. – 2018. – Т. 8. – №. 10. – С. 2003.

### **Э. Э. ЭЛЬДАРОВА, Н. Б. БАЙТЕМИРОВА**

*Л.Ю.Гумилев атындағы Евразиялық ұлттық университеті,  
Нұр-Сұлтан, Қазақстан, doctorphd\_eldarova@mail.ru  
Х.Досмухамедов атындағы Атырау университеті,  
Атырау, Қазақстан, bnb-84@mail.ru*

### **БҰЛЫҢҒЫР САНДЫҚ КЕСКІНДЕРДІҢ ВИЗУАЛДЫ САПАСЫН ЖАҚСARTY**

Бейненің бұлыңғырлығын жоюдың мақсаты кірістірілген бұлдыр бейнеден қажетті жиек құрылымы мен анық бөліктері бар анық бейнені қалпына келтіру болып табылады. Бейненің бұлыңғыр әсері әртүрлі себептермен пайда болады, мысалы, қозғалыс немесе фокустық қашықтық, камераның шайқалуы, нысанның қозғалысы немесе фокустың болмауы. Тәжірибеде бұлыңғырлық параметрлері белгісіз немесе көрінетін бұрмаланулардың сипаты бойынша ғана белгілі болғандықтан, бұл зерттеуде кескіннің бұлыңғырлығын тәуекелді түрде жою әдістері талқыланады. Мақалада соңғы бес жылда жасақталған бұлыңғырлықты жоюдың ең соңғы алгоритмдері зерттеледі: SVRNN, SRN, RCGAN, Gao және т.б., DMPHN, DeblurGAN, MBMF, MSCNN, DeblurGAN-v2, EDPN, RCAN, MSRN, GFN, SelfDeblur. Зерттеудің міндеті сандық бейнелердің визуалды сапасын жақсарту үшін бағдарламалық жасақтаманы әзірлеуде қолдану үшін бұлыңғырлықты жоюдың ең тиімді әдісін таңдау болып табылады. Тәжірибе көрсеткендей, жаңадан әзірленген әдістер кейінгі алгоритмдерге қарағанда тезірек орындалады және сарапшылардың субъективті пікіріне сәйкес келетін кескінді шығаруға қабілетті. Қазіргі уақытта бұлыңғыр бейнелерді қалпына келтірудің ең жақсы әдісі DeblurGAN-v2, EDPN және DBGAN(+) болып табылады.

**Түйін сөздер:** бейне сапасы, сандық бейне, бұлыңғыр бейнелер, эталонсыз бағалау, объективті көрсеткіштер.

**E. E. EL DAROVA, N. B. BAYTEMIROVA**

*L.N. Gumilyov Eurasian National University,  
Nur-Sultan, Kazakhstan, doctorphd\_eldarova@mail.ru  
Kh. Dosmukhamedov Atyrau university, Atyrau, Kazakhstan, bnb-84@mail.ru*

### **IMPROVING VISUAL QUALITY OF BLURRED DIGITAL IMAGES**

*The goal of image deblurring is to recover a sharp image with the necessary edge structure and sharp details from the input blurred image. Blurring occurs due to various reasons, such as motion or focal length, camera shake, subject movement, or out of focus. Since, in practice, the blur parameters are unknown or known only approximately by the nature of the visible distortions, this study discusses methods for eliminating image blur blindly. The article explores the latest blind blur removal algorithms developed in the last five years: SVRNN, SRN, RCGAN, Gao et al., DMPHN, DeblurGAN, MBMF, MSCNN, DeblurGAN-v2, EDPN, RCAN, MSRN, GFN, SelfDeblur. The task of the study is to choose the most effective method for removing blur, for further application in the development of software to improve the visual qualities of digital images. Experiments have shown that the newly developed methods converge faster than older algorithms and are able to extract an image that is more consistent with the subjective opinion of experts. DeblurGAN-v2, EDPN and DBGAN(+) are currently the best method for restoring blurry images.*

**Key words:** *image quality, digital image, image blur, -reference assessment, objective metrics.*

УДК 621.398

<https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.182>

**М. А. БЕЙСЕНБИ, А. А. МАЙМУРЫНОВА\***

*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, кафедра системного анализа и управления, Нур-Султан, Казахстан.  
beisenbi@mail.ru, aizhan\_maimurynova@mail.ru.*

### **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОСНОВНОГО КОНТУРА СИСТЕМЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫМИ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ХАОТИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ С М-ВХОДАМИ И N-ВЫХОДАМИ В КЛАССЕ КАТАСТРОФ «ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ОМБИЛИКА»**

*Актуальной проблемой в условиях неопределенности параметров объекта управления и внешних воздействий для управления неустойчивыми и детерминированными хаотическими процессами является применение методов адаптации. При этом эталонная модель с желаемой динамикой и основной контур управления адаптивной системы строятся в классе катастроф «гиперболическая омбилика», а апериодическая робастная устойчивость эталонной модели с желаемой динамикой и основной контур управления самоорганизующейся адаптивной системы с повышенным потенциалом робастной устойчивости исследуется градиентно-скоростным методом вектор функции Ляпунова.*

***Ключевые слова:** гиперболическая омбилика, детерминированные хаотические процессы, градиентно-скоростной метод, робастная устойчивость, адаптивная система, лемма Морса, функция Ляпунова.*

**Введение.** Синтез основного контура адаптивной системы управления при известных параметрах неустойчивыми и детерминированным хаотическими процессами [1,2,3,4] неразрывно связан с обеспечением устойчивости, робастности и качества управления [5,6]. В адаптивных системах управления внешние воздействия компенсируются, т.е. система управления становится инвариантным относительно внешних воздействий [2,7,8], а выбор эталонной модели и синтез основного контура управления в классе катастроф «гиперболическая омбилика» [10] обеспечивает робастную устойчивость [5,6], а желаемая динамика эталонной модели, исследование и синтез всех подсистем адаптивного управления, градиентно скоростным методом вектор

---

\* E-mail корреспондирующего автора: [akkma@mail.ru](mailto:akkma@mail.ru)

функций Ляпунова [11] гарантирует аperiodическую робастную устойчивость системы заданного качества управления.

Задача синтеза основного контура управления при известных значениях параметров объекта управления решается градиентно-скоростным методом вектор-функции Ляпунова [11].

Методы, основанные на применении функций Ляпунова [7,9,12,13], являются основными в управлении. Но в настоящее время эти методы служат только инструментом для теоретических исследований [14,15,16,17,18] и не могут дать ответы на основные вопросы исследования и синтеза адаптивных регуляторов в реальных условиях. Основным препятствием при этом являются отсутствие универсального подхода к построению функций Ляпунова [12,13,19].

Из геометрической интерпретации теоремы об асимптотической устойчивости [7,12,13] прямого метода А.М. Ляпунова можно наглядно убедиться, что динамика изменения фазовой траектории в фазовом пространстве определяются вектором скорости  $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ , а динамика изменения требуемой функций Ляпунова вдали фазовой траектории в фазовом пространстве всюду определяется вектором градиента  $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$

от функций Ляпунова  $V(x)$ . На границе аperiodической робастной устойчивости эти векторы имеют одинаковые значения по величине и противоположенного знака. На этой основе рассматривается динамическая система как градиентные системы, а функции Ляпунова как потенциальные функции из теории катастроф [10] и позволяет написать:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n ;$$

Применение этих соотношений и леммы Морса позволяет построить необходимую функцию Ляпунова и решить задачи синтеза при известных значениях параметров объекта управления.

Из условий границы аperiodической робастной устойчивости эталонной модели с желаемой динамикой и основного контура системы адаптивного управления неустойчивыми процессами вычисляются коэффициенты усиления обратной связи.

В настоящее время общепризнано, что реальные объекты управления являются нелинейными и детерминированный хаос с порождением «странного аттрактора» является внутренним свойством любой нелинейной детерминированной динамической системы [1,2,3,4]. В линеаризованных динамических системах это проявляется как потеря робастной устойчивости [5,6].

#### **Результаты и их обсуждение.**

**Исследование системы основного контура управления.** Пусть МИМО система управления представляется уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $x(t) \in R^n$  – вектор состояния системы управления;  $u(t) \in R^m$  – вектор-функция управляющих воздействий;  $yx(t) \in R^l$  – вектор выхода системы размерности  $l$ ;  $A \in R^{n \times n}$  – матрица объекта управления размерности  $n \times n$ ;  $B \in R^{m \times n}$  – матрица управления размерности  $m \times n$ ;  $C \in R^{l \times n}$  – матрица выхода системы управления размерности  $l \times n$ .

Первое уравнение системы управления включает в себе всю динамику системы, второе же уравнение выхода представляет собой статическое соотношение. Для исследования динамических свойств, как правило, рассматривается только первое уравнение.

Пусть матрицы  $A$  и  $B$  заданы в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Закон управления задается в виде катастрофы «гиперболическая омбилика» (трех-параметрические структурно-устойчивое отображение) [10,19,20]:

$$u_i(t) = +x_i^3 + x_{i+1}^3 + k_{i,i+1}x_i x_{i+1} - k_i^1 x_i - k_i^2 x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

Первое уравнение системы (1.1) с учетом закона управления (1.2) в развернутой форме записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b_{11}x_1^3 + b_{11}x_2^3 + b_{11}k_{12}x_1x_2 - (a_{11} + b_{11}k_1^1)x_1 \pm (-a_{12} + b_{11}k_1^2)x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = b_{22}x_1^3 + b_{22}x_2^3 + b_{22}k_{21}x_1x_2 - (a_{21} + b_{22}k_2^1)x_1 \pm (-a_{22} + b_{22}k_2^2)x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + b_{nn}x_{n-1}^3 + b_{nn}x_n^3 + b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}x_n - (-a_{n,n-1} + b_{nn}k_n^1)x_{n-1} \\ \pm (-a_{nn} + b_{nn}k_n^2)x_n \end{cases} \quad (1.3)$$

Система (3.3) имеет стационарные состояния [10,19]:

$$x_{1s}^1 = 0, x_{2s}^1 = 0, x_{3s}^1 = 0, \dots, x_{ns}^1 = 0 \quad (1.4)$$

И другие стационарные состояния:

$$x_{is}^{2,3} = \pm \sqrt{k_i^1 + \frac{a_{ii}}{b_{ii}}}, x_{(i+1)s} = 0, x_{is}^4 = \frac{1}{k_{i,i+1}} \left( k_i^2 + \frac{a_{i,i+1}}{b_{ii}} \right) \quad (1.5)$$

Апериодическая робастная устойчивость стационарного состояния (1.4) системы (1.3) исследуется градиентно-скоростным методом вектор-функции Ляпунова.

Из уравнения состояния (1.3) определяем компоненты векторов градиентов от вектор-функции Ляпунова [11]

$$\begin{cases} \frac{\partial V_i(x)}{\partial x_j} = -b_{ii}x_i^3 - \frac{1}{2}b_{ii}k_{i,i+1}x_i x_{i+1} + b_{ii} \left( k_i^1 - \frac{a_{ij}}{b_{ii}} \right) x_j \quad \text{при } j = i; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \\ \frac{\partial V_i(x)}{\partial x_j} = -b_{ii}x_{i+1}^3 - \frac{1}{2}b_{ii}k_{i,i+1}x_i x_{i+1} + b_{ii} \left( k_i^2 - \frac{a_{ij}}{b_{ii}} \right) x_j \quad \text{при } j = i + 1; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \\ \frac{\partial V_i(x)}{\partial x_j} = -a_{ij}x_j, \quad \text{при } j \neq i; \quad j \neq i + 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.6)$$



Из (1.6) по компонентам векторов градиентов построим вектор-функцию Ляпунова в скалярной форме:

$$\begin{aligned}
 V(x) = & -\frac{1}{4}b_{11}x_1^4 - \frac{1}{4}b_{11}k_{12}x_1^2x_2 + \frac{1}{2}b_{11}\left(k_1^2 - \frac{a_{11}}{b_{11}}\right)x_1^2 - \frac{1}{4}b_{11}x_2^4 - \frac{1}{4}b_{11}k_{12}x_1x_2^2 + \frac{1}{2}b_{11}\left(k_1^2 - \frac{a_{12}}{b_{11}}\right)x_2^2 - \frac{1}{2}a_{13}x_3^2 - \\
 & \dots - \frac{1}{2}a_{1n}x_n^2 - \frac{1}{4}b_{22}x_1^4 - \frac{1}{4}b_{22}k_{12}x_1^2x_2 + \frac{1}{2}b_{22}\left(k_2^2 - \frac{a_{21}}{b_{22}}\right)x_1^2 - \frac{1}{4}b_{22}x_2^4 - \frac{1}{4}b_{22}k_{12}x_2^2x_2 + \frac{1}{2}b_{22}\left(k_2^2 - \frac{a_{22}}{b_{22}}\right)x_2^2 - \\
 & \frac{1}{2}a_{23}x_3^2 - \dots - \frac{1}{2}a_{2n}x_n^2 - \dots - \frac{1}{2}a_{n1}x_1^2 - \frac{1}{2}a_{n2}x_2^2 - \dots - \frac{1}{4}b_{nn}x_{n-1}^4 - \frac{1}{4}b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}^2x_n + \frac{1}{2}b_{nn}\left(k_n^2 - \frac{a_{n,n-1}}{b_{nn}}\right)x_{n-1}^2 - \\
 & \frac{1}{4}b_{nn}x_n^4 - \frac{1}{4}b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}x_n^2 + \frac{1}{2}b_{nn}\left(k_n^2 - \frac{a_{nn}}{b_{nn}}\right)x_n^2
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

По виду функции (1.7) условия существования функции Ляпунова, т.е. ее положительная определенность не очевидна, но функция (1.7) в начале координат обращается в нуль и является непрерывно-дифференцируемой функцией, т.е. удовлетворяет условиям леммы Морса из теории катастроф [10]. В соответствии с леммой Морса функция (1.7) может быть локальна в окрестности начала координат и представлена в виде квадратичной формы:

$$\begin{aligned}
 V(x) \approx & [b_{11}k_1^1 - a_{11} + b_{22}k_1^2 - a_{21} - a_{31} - \dots - a_{n1}]x_1^2 + \\
 & + [b_{11}k_2^1 - a_{12} + b_{22}k_2^2 - a_{22} - a_{32} - \dots - a_{n2}]x_2^2 + \dots + \\
 & [-a_{1n} - a_{2n} - a_{3n} - \dots + b_{n-1n-1}k_n^1 - a_{n-1,n} + b_{nn}k_n^2 - a_{nn}]x_n^2
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Условия существования функции Ляпунова, т.е. положительная определенность вектор-функции Ляпунова задаются системой неравенств:

$$\begin{cases} [b_{11}k_1^1 - a_{11} + b_{22}k_1^2 - a_{21} - a_{31} - \dots - a_{n1}] > 0 \\ [b_{11}k_2^1 - a_{12} + b_{22}k_2^2 - a_{22} - a_{32} - \dots - a_{n2}] > 0 \\ [-a_{1n} - a_{2n} - a_{3n} - \dots + b_{n-1n-1}k_n^1 - a_{n-1,n} + b_{nn}k_n^2 - a_{nn}] > 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

1.2. Исследуется аperiodическая робастная устойчивость стационарного состояния (1.5) системы (1.3). Для этого систему (1.3) записываем в отклонениях относительно стационарного состояния (1.5):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b_{11}x_1^3 + b_{11}x_2^3 + b_{11}k_{12}x_1x_2 + 3b_{11}\sqrt{k_1^2 + \frac{a_{12}}{b_{11}}}x_1^2 + 3b_{11}\sqrt{k_1^2 + \frac{a_{12}}{b_{11}}}x_2^2 + b_{11}\left(k_1^2 + \frac{a_{11}}{b_{11}}\right)x_1 - \\ - b_{11}\left(k_1^2 + \frac{a_{12}}{b_{11}}\right)x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = b_{22}x_1^3 + b_{22}x_2^3 + b_{22}k_{12}x_1x_2 + 3b_{22}\sqrt{k_2^2 + \frac{a_{21}}{b_{22}}}x_1^2 + 3b_{22}\sqrt{k_2^2 + \frac{a_{22}}{b_{22}}}x_2^2 + b_{22}\left(k_2^2 + \frac{a_{21}}{b_{22}}\right)x_1 - \\ + b_{22}\left(k_2^2 + \frac{a_{22}}{b_{22}}\right)x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_{n-1}^3 + b_{nn}x_n^3 + b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}x_n + 3b_{nn}\sqrt{k_n^2 + \frac{a_{n,n-1}}{b_{nn}}}x_{n-1}^2 - \\ + 3b_{nn}\sqrt{k_n^2 + \frac{a_{nn}}{b_{nn}}}x_n^2 - b_{nn}\left(k_n^2 + \frac{a_{n,n-1}}{b_{nn}}\right)x_{n-1} - b_{nn}\left(k_n^2 + \frac{a_{nn}}{b_{nn}}\right)x_n \end{cases} \tag{1.10}$$

Из уравнения состояния (1.10) определяются компоненты векторов градиентов от вектор-функции Ляпунова  $V(x) = (V_1(x), \dots, V_n(x))$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial V_i(x)}{\partial x_j} = -b_{ii}x_i^3 - \frac{1}{2}b_{ii}k_{i,i+1}x_i x_{i+1} - 3b_{ii}\sqrt{k_i^1 - \frac{a_{ij}}{b_{ii}}}x_i^2 - b_{ii}\left(k_i^1 - \frac{a_{ij}}{b_{ii}}\right)x_i \\ \text{при } j = i; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \\ \frac{\partial V_i(x)}{\partial x_j} = -b_{ii}x_{i+1}^3 - \frac{1}{2}b_{ii}k_{i,i+1}x_i x_{i+1} - 3b_{ii}\sqrt{k_i^2 - \frac{a_{ij}}{b_{ii}}}x_{i+1}^2 - b_{ii}\left(k_i^2 - \frac{a_{ij}}{b_{ii}}\right)x_j \\ \text{при } j = i + 1; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \\ \frac{\partial V_i(x)}{\partial x_j} = -a_{ij}x_j, \text{ при } j \neq i; j \neq i + 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.11)$$

Определим вектор-функцию Ляпунова в скалярной форме по компонентам градиента (1.11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} V(x) = & -\frac{1}{4}b_{11}x_1^4 - \frac{1}{4}b_{11}k_{12}x_1^2x_2 - b_{11}\sqrt{k_1^1 + \frac{a_{11}}{b_{11}}}x_1^3 - b_{11}\left(k_1^1 + \frac{a_{11}}{b_{11}}\right)x_1^2 - \frac{1}{4}b_{11}x_2^4 - \frac{1}{4}b_{11}k_{12}x_1x_2^2 - b_{11}\sqrt{k_1^2 + \frac{a_{12}}{b_{11}}}x_2^3 - \\ & b_{11}\left(k_1^2 + \frac{a_{12}}{b_{11}}\right)x_2^2 - \frac{1}{2}a_{13}x_3^2 - \dots - \frac{1}{2}a_{1n}x_n^2, \dots, -\frac{1}{2}a_{n1}x_1^2 - \frac{1}{2}a_{n2}x_2^2 - \dots - \frac{1}{4}b_{nn}x_n^4 - \frac{1}{4}b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}^2x_n - \\ & b_{nn}\sqrt{k_n^1 + \frac{a_{n,n-1}}{b_{nn}}}x_{n-1}^3\left(k_2^1 - \frac{a_{21}}{b_{22}}\right)x_1^2 - \frac{1}{4}b_{22}x_2^4 - \frac{1}{4}b_{22}k_{12}x_2^2x_2 + \frac{1}{2}b_{22}\left(k_2^2 - \frac{a_{22}}{b_{22}}\right)x_2^2 - \frac{1}{2}a_{23}x_3^2 - \dots - \frac{1}{2}a_{2n}x_n^2 - \dots - \\ & \frac{1}{2}a_{n1}x_1^2 - \frac{1}{2}a_{n2}x_2^2 - \dots - \frac{1}{4}b_{nn}x_n^4 - \frac{1}{4}b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}^2x_n - b_{nn}\sqrt{k_n^1 - \frac{a_{n,n-1}}{b_{nn}}}x_{n-1}^3 - b_{nn}\left(k_n^1 - \frac{a_{n,n-1}}{b_{nn}}\right)x_{n-1}^2 - \\ & \frac{1}{4}b_{nn}x_n^4 - \frac{1}{4}b_{nn}k_{n-1,n}x_{n-1}^2x_n - b_{nn}\sqrt{k_n^2 + \frac{a_{nn}}{b_{nn}}}x_n^3 - b_{nn}\left(k_n^2 - \frac{a_{nn}}{b_{nn}}\right)x_n^2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Как видно из (1.12), условия положительной или отрицательной определенности функции Ляпунова не являются очевидными, вследствие чего применим лемму Морса. В этом случае функцию Ляпунова (1.12) локально, в окрестности стационарных состояний (1.5), запишем в виде квадратичной формы:

$$\begin{aligned} V(x) \approx & -[b_{11}k_1^1 + a_{11} + b_{22}k_1^2 + a_{21} + a_{31} + a_{41} + \dots + a_{n1}]x_1^2 + \\ & -[b_{11}k_2^1 + a_{12} + b_{22}k_2^2 + a_{22} + a_{32} + a_{42} + \dots + a_{n2}]x_2^2 + \dots \\ & -[a_{1,n-1} + a_{2,n-1} + a_{3,n-1} + \dots + b_{n-1,n-1}k_{n-1}^1 + b_{nn}k_{n-1}^2 + a_{n-1,n-1} + a_{n,n-1}]x_{n-1}^2 + \\ & -[a_{1n} + a_{2n} + a_{3n} + \dots + b_{n-1,n-1}k_n^1 + a_{n-1,n} + b_{nn}k_n^2 + a_{nn}]x_n^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

Отсюда условие положительной определенности функции Ляпунова, т.е. необходимое условие аperiodической робастной устойчивости, будет определяться неравенствами:

$$\begin{cases} b_{11}k_1^1 + a_{11} + b_{22}k_1^2 + a_{21} + a_{31} + a_{41} + \dots + a_{n1} > 0 \\ b_{11}k_2^1 + a_{12} + b_{22}k_2^2 + a_{22} + a_{32} + a_{42} + \dots + a_{n2} > 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n-1} + a_{2,n-1} + a_{3,n-1} + \dots + b_{n-1,n-1}k_{n-1}^1 + b_{nn}k_{n-1}^2 + a_{n-1,n-1} + a_{n,n-1} > 0 \\ a_{1n} + a_{2n} + a_{3n} + \dots + b_{n-1,n-1}k_n^1 + a_{n-1,n} + b_{nn}k_n^2 + a_{nn} > 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Отсюда очевидно, что устойчивость системы управления, построенной в классе катастрофы «гиперболическая омбилика» находится в неограниченно широких границах изменения неопределенных параметров системы управления. Существование и устойчивость стационарного состояния (1.4) возможны при изменении неопреде-

ленных параметров объекта управления в области (1.9). В случае же потери устойчивости этого стационарного состояния появляются иные стационарные состояния (1.5), при этом невозможно их существование одновременно. Последние стационарные состояния (1.5) будут устойчивы, когда выполняется система неравенств (1.14).

**Исследование эталонной модели адаптивного управления.** Пусть эталонная модель с желаемыми переходными характеристиками, полученные на основе имитационного эксперимента на модели, имеет вид при  $z_i(t) = 0, i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{cases} \frac{dx_{M1}}{dt} = x_{M1}^3 + x_{M2}^3 + d_{12}x_{M1}x_{M2} - d_1^1x_{M1} - d_1^2x_{M2} + a_{13}^Mx_{M3} + \dots + a_{1n}^Mx_{Mn} \\ \frac{dx_{M2}}{dt} = x_{M1}^3 + x_{M2}^3 + d_{12}x_{M1}x_{M2} - d_2^1x_{M1} - d_2^2x_{M2} + a_{23}^Mx_{M3} + \dots + a_{2n}^Mx_{Mn} \\ \dots \\ \frac{dx_{Mn}}{dt} = a_{n1}^Mx_{M1} + a_{n2}^Mx_{M2} + a_{n3}^Mx_{M3} + \dots + x_{M,n-1}^3 + x_{Mn}^3 + d_{n-1,n}x_{M(n-1)}x_{Mn} - d_n^1x_{M(n-1)} - d_n^2x_{Mn} \end{cases} \quad (2.1)$$

Стационарные состояния системы (2.1) определяются:

$$x_{M1}^1 = 0, \quad x_{M2}^1 = 0, \quad x_{M3}^1 = 0, \dots, \quad x_{Mn}^1 = 0 \quad (2.2)$$

и

$$x_{Mi}^{2,3} = \pm\sqrt{d_i^1}, \quad x_{m(i+1)} = 0, \quad d_{i,i+1} = \sqrt{d_i^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Исследуется робастная устойчивость стационарных состояний (2.2) и (2.3) градиентно скоростным методом вектор-функций Ляпунова [11].

Условия положительной определенности вектор функции Ляпунова квадратичной формы (2.12) (условия аperiodической робастной устойчивости стационарного состояния (2.2)) определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} d_1^1 + d_2^1 - a_{31}^M - a_{41}^M, \dots, -a_{(n-1),1}^M - a_{n1}^M > 0 \\ d_1^2 + d_2^2 - a_{32}^M - a_{42}^M, \dots, -a_{(n-1),2}^M - a_{n2}^M > 0 \\ \dots \\ -a_{1,(n-1)}^M - a_{2,(n-1)}^M - a_{3,(n-1)}^M + d_{n-1}^1 + d_n^1 > 0 \\ -a_{1n}^M - a_{2n}^M - a_{3n}^M - a_{4n}^M, \dots, +d_{n-1}^2 + d_n^2 > 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Таким образом, область аperiodической робастной устойчивости стационарного состояния (2.2) определяется неравенствами (2.4).

Исследуется устойчивость стационарного состояния (2.3). Уровнения состояния (2.1) представляются в отклонениях относительно стационарного состояния (2.3):

$$\begin{cases} \frac{dx_{m1}}{dt} = x_{M1}^3 + x_{M2}^3 + 3\sqrt{d_1^1}x_{M1}^2 + d_{12}x_{M1}x_{M2} + d_1^1x_{M1} - d_1^2x_{M2} + a_{13}^Mx_{M3} + \dots + a_{1n}^Mx_{Mn} \\ \frac{dx_{m2}}{dt} = x_{M1}^3 + x_{M2}^3 + 3\sqrt{d_2^1}x_{M1}^2 + d_{12}x_{M1}x_{M2} + d_2^1x_{M1} - d_2^2x_{M2} + a_{23}^Mx_{M3} + \dots + a_{2n}^Mx_{Mn} \\ \dots \\ \frac{dx_{mn}}{dt} = a_{n1}^Mx_{M1} + a_{n2}^Mx_{M2}, \dots, +x_{M(n-1)}^3 + x_{Mn}^3 + 3\sqrt{d_{n-1}^1}x_{M(n-1)}^2 + d_{(n-1),n}x_{M(n-1)}x_{Mn} + d_n^1x_{M(n-1)} - d_n^2x_{Mn} \end{cases} \quad (2.5)$$

Условия положительной определенности вектора функции Ляпунова (условия аperiodической робастной устойчивости системы (2.5)) определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} -d_1^1 + d_2^1 - a_{31}^M - a_{41}^M, \dots, -a_{n-1,1}^M - a_{n1}^M > 0 \\ -d_1^2 + d_2^2 - a_{32}^M - a_{42}^M, \dots, -a_{n-1,2}^M - a_{n2}^M > 0 \\ \dots \dots \dots \\ -a_{1,n-1}^M - a_{2,n-1}^M, \dots, -d_{n-1}^1 + d_n^1 > 0 \\ -a_{1n}^M - a_{2n}^M, \dots, -d_{n-1}^2 + d_n^2 > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Таким образом, эталонная модель, построенная в классе катастроф «гиперболическая омбилика», является аperiodической робастной устойчивой в неограниченно широких пределах изменения параметров модели. Стационарное состояние (2.2) существует и является робастной устойчивой при изменении неопределенных параметров в области (2.4), а стационарное состояние (2.3) появляется при потере робастной устойчивости стационарного состояния (2.2), и они одновременно не существуют. Стационарное состояние (2.3) существует и является аperiodической устойчивой при выполнении системы неравенств (2.6).

**Синтез регулятора основного контура управления.** Для нахождения решения задачи синтеза основного контура ММО системы адаптивного управления неустойчивыми и детерминированными хаотическими режимами в классе катастроф «гиперболическая омбилика» при предположении, что параметры объекта управления известны, сравниваются граничные значения параметров аperiodической робастной устойчивости эталонной модели и заданной системы управления, т.е. неравенств (1.9) и (2.4) или (1.14) и (2.6) при фиксированных значениях параметров объекта управления  $a_{i,j}^M = a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, n$ .

Получим:

$$\begin{cases} k_1^1 = \frac{1}{b_{11}}(d_1^1 + a_{11}), & k_1^2 = \frac{1}{b_{22}}(d_2^1 + a_{21}) \\ k_2^1 = \frac{1}{b_{11}}(d_1^2 + a_{12}), & k_2^2 = \frac{1}{b_{22}}(d_2^2 + a_{22}) \\ \dots \dots \dots \\ k_{n-1}^1 = \frac{1}{b_{n-1,n-1}}(d_{n-1}^1 + a_{n-1,n-1}), & k_{n-1}^2 = \frac{1}{b_{nn}}(d_n^1 + a_{n,n-1}) \\ k_n^1 = \frac{1}{b_{n-1,n-1}}(d_{n-1}^2 + a_{n-1,n}), & k_n^2 = \frac{1}{b_{nn}}(d_n^2 + a_{nn}) \end{cases} \quad (3.1)$$

Или при измеряемости всех параметров объекта управления и  $a_{i,j}^M \neq a_{ij}$ ,  $i \neq j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, n$ . можно определить синтезируемые коэффициенты системы:

$$\begin{cases} k_1^1 = \frac{1}{b_{11}}[d_1^1 + a_{11} - \beta_1(a_{31}^M - a_{31} + \dots + a_{n1}^M - a_{n1})] \\ k_1^2 = \frac{1}{b_{22}}[d_2^1 + a_{21} - (1 - \beta_1)(a_{31}^M - a_{31} + \dots + a_{n1}^M - a_{n1})] \\ k_2^1 = \frac{1}{b_{11}}[d_1^2 + a_{12} - \beta_2(a_{32}^M - a_{32} + \dots + a_{n2}^M - a_{n2})] \\ k_2^2 = \frac{1}{b_{22}}[d_2^2 + a_{22} - (1 - \beta_2)(a_{32}^M - a_{32} + \dots + a_{n2}^M - a_{n2})] \\ \dots \dots \dots \\ k_n^1 = \frac{1}{b_{n-1,n-1}}[-\beta_n(a_{1n}^M - a_{1n} + a_{2n}^M - a_{2n}, \dots, + d_{n-1}^2 + a_{n-1,n})] \\ k_n^2 = \frac{1}{b_{nn}}[-(1 - \beta_n)(a_{1n}^M - a_{1n} + a_{2n}^M - a_{2n}, \dots, + d_n^2 + a_{nn})] \end{cases} \quad (3.2)$$

где,  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  – некоторые весовые коэффициенты ( $\beta_i < 1$ ).

Таким образом, при фиксированной измеряемости значений неопределенных параметров системы управления неустойчивыми и детерминированными хаотическими системами с  $m$ -входами и с  $n$ -выходами в классе катастроф «гиперболическая омбилика», коэффициенты настройки основного контура адаптивной системы вычисляются по формуле (3.1) и (3.2) в зависимости измеряемости параметров системы.

**Заключение.** В настоящее время общепризнано, что реальные объекты управления являются нелинейными и детерминированный хаос с порождением «странного аттракторов» является внутренним свойством любой нелинейной детерминированной динамической системы. В линеаризованных динамических системах это проявляется как потеря робастной устойчивости.

В условиях неопределенности параметров объекта управления и внешних воздействий основной проблемой управления неустойчивыми и детерминированными хаотическими процессами является применение методов адаптации. В адаптивных системах внешние воздействия компенсируются, а построение эталонной модели и основного контура управления в классе катастроф «гиперболическая омбилика» позволяет управлять неустойчивыми и детерминированными хаотическими процессами.

Граничные условия аperiodической робастной устойчивости эталонной модели с желаемой динамикой и основного контура управления адаптивной системы позволяет решить задачу синтеза основного контура адаптивной системы по комплексу показателей качества, таких как: устойчивость, робастность, колебательность, быстродействие, отсутствие перерегулирования, статическая точность, желаемый вид переходных процессов в системе и т.д.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Брок У. Теория хаоса.– М.: Наука, 2011-424с.
- 2 Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления. Гл.13, Управление нелинейными колебательными и хаотическими системами. Спб.: Наука,1999-475с.
- 3 Лоскутов А.Ю. Хаос и управление динамическими системами// Нелинейная динамика и управление / под ред. С.В.Емельянова, С.К.Емельянова, С.К.Коровина. – М.:Физ-мат.,2001.– Т.1. – С.163-216.
- 4 Meehan P.A., Asokanathan S.F. Control of chaotic instabilities in spinning spacecraft with dissipation using Lyapunov method//Chaos, Solitons and Fractals.-2002.13.– P.477-1869.
- 5 Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука,2002.– 303 с.
- 6 Dorato P., Vedavalli Recent Advanced in Robust Control – New York: IEEE press, 1990.
- 7 Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-ти тт. Т5: Методы современной теории автоматического управления/под ред. К.А.Пупкова, Н.Д.Егунова. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. – 784с.
- 8 Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. – М.: Машиностроение, 1972.-260с.
- 9 Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах.– М.: Наука,1990.-292с.
- 10 Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. В 2-томах. Т.1.– М.: Мир,1984.-287 с.



- 11 Бейсенби М.А. Исследование робастной устойчивости систем автоматического управления методом функции А.М Ляпунова. – Астана ,2015-204с.
- 12 Малкин И.Г. Теория устойчивости движения – М.: Наука, 1966. 540 с.
- 13 Барбаршин Е.А. Введение в теорию устойчивости движения – М.: Наука, 1967.225с.
- 14 Della Rossa, M., Goebal, R., Tanwani, A. *et al.* Piecewise structure of Lyapunov functions and densely checked decrease conditions for hybrid systems. *Math. Control Signals Syst.* 33,123-149 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00498-020-00273-9>
- 15 Chen, Horng-Giou& Han, Kuang-Wei.(1993). Stability-robustness analysis for linear systems with state-space models. *Journal of The Franklin Institute-engineering and Applied Mathematics – J FRANKLIN INST-ENG APPL MATH.* 330. 939-966.10.1016/0016-0032(93)90087-B.
- 16 F.N.Bailey. The Application of Lyapunov's Second Method to Interconnected Systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, 3(3), 443-462. (20 pages). <https://doi.org/10.1137/0303030>
- 17 Хуанг З., Чжу К. и Гао Дж. Анализ устойчивости неопределенного дифференциального уравнения вторым методом Ляпунова. *Принятие решений нечеткого оптимума* 20, 129-144 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10700-020-09336-7>
- 18 Baukas EK., Liu ZK. (2002) Robust Stabilizability. In : *Deterministic and Stochastic Time-Delay Systems. Control Engineering.* Birkhäuser Boston. [https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0077-2\\_4](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0077-2_4)
- 19 Бейсенби М.А. Методы повышения потенциала робастной устойчивости систем управления. –Астана ,2011– 292с.
- 20 Бейсенби М.А., Ержанов Б.А. Системы управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости. – Астана,2002– 164с.

## REFERENCES

- 1 Brok U. *Teoriya haosa.*– М.: Nauka, 2011-424s.
- 2 Andrievskij B.R., Fradkov A.L. *Izbrannye glavy teorii avtomaticheskogo upravleniya.* Gl.13, *Upravlenie nelinejnymi kolebatel'nymi i haoticheskimi sistemami.* Spb.: Nauka,1999-475s.
- 3 Loskutov A.YU. *Haos i upravlenie dinamicheskimi sistemami// Nelinejnaya dinamika i upravlenie / pod red. S.V.Emel'yanova, S.K.Emel'yanova, S.K.Korovina.* – М.:Fiz-mat.,2001.– Т.1. – S.163-216.
- 4 Meehan P.A., Asokanathan S.F. Control of chaotic instabilities in spinning spacecraft with dissipation using Lyapunov method//*Chaos, Solitons and Fractals.*-2002.13.– P.477-1869.
- 5 Polyak B.T., SHCHerbakov P.S. *Robastnaya ustojchivost' i upravlenie.* – М.: Nauka,2002.– 303 s .
- 6 Dorato P., Vedavalli *Recent Advanced in Robust Control* – New York: IEEE press, 1990.
- 7 *Metody klassicheskoy i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravleniya:* Uchebnik v 5-ti tt. T5: *Metody sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravleniya/pod red. K.A.Pupkova, N.D.Egunova.* – М.: izd-vo MGTU im. N.E.Baumana , 2004. – 784s.
- 8 Petrov B.N., Rutkovskij V.YU., Krutova I.N., Zemlyakov S.D. *Principy postroeniya i proektirovaniya samonastravayushchihsya sistem upravleniya.* – М.: Mashinostroenie, 1972.-260s.
- 9 Fradkov A.L. *Adaptivnoe upravlenie v slozhnyh sistemah.*– М.: Nauka,1990.-292s.
- 10 Gilmore R. *Prikladnaya teoriya katastrof. V 2-tomah.* Т.1.– М.: Mir,1984.-287 s.

11 Bejsenbi M.A. Issledovanie robstnoj ustojchivosti sistem avtomaticheskogo upravleniya metodom funkcii A.M Lyapunova. - Astana ,2015-204s.

12 Malkin I.G. Teoriya ustojchivosti dvizheniya – M.: Nauka, 1966. 540 s.

13 Barbarshin E.A. Vvedenie v teoriyu ustojchivosti dvizheniya – M.: Nauka, 1967.225s.

14 Della Rossa, M., Goebal, R., Tanwani, A. et al. Piecewise structure of Lyapunov functions and densely checked decrease conditions for hybrid systems. Math. Control Signals Syst. 33,123-149 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00498-020-00273-9>

15 Chen, Horng-Giou& Han, Kuang-Wei.(1993). Stability-robustness analysis for linear systems with state-space models. Journal of The Franklin Institute-engineering and Applied Mathematics – J FRANKLIN INST-ENG APPL MATH. 330. 939-966.10.1016/0016-0032(93)90087-B.

16 F.N.Bailey. The Application of Lyapunov’s Second Method to Interconnected Systems. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control, 3(3), 443-462. (20 pages). <https://doi.org/10.1137/0303030>

17 Huang Z., CHzhu K. i Gao Dzh. Analiz ustojchivosti neopredelennogo differencial'nogo uravneniya vtorym metodom Lyapunova. Prinyatie reshenij nechetkogo optimuma 20, 129-144 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10700-020-09336-7>

18 Baukas EK., Liu ZK. (2002) Robust Stabilizability. In : Deterministic and Stochastic Time-Delay Systems. Control Engineering. Birkhäuser Boston. [https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0077-2\\_4](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0077-2_4)

19 Bejsenbi M.A. Metody povysheniya potentsiala robstnoj ustojchivosti sistem upravleniya. – Astana ,2011– 292s.

20 Bejsenbi M.A., Erzhanov B.A. Sistemy upravleniya s povyshennym potentsialom robstnoj ustojchivosti. – Astana,2002 – 164s.

### **М. А. БЕЙСЕНБИ, А. А. МАЙМУРЫНОВА**

*Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, жүйелік талдау және басқару кафедрасы, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*

### **«ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ОМБИЛИКА» АПАТТАР КЛАСЫНДА М-КІРІСТЕР ЖӘНЕ N-ШЫҒУЛАР БАР ТҰРАҚСЫЗ ЖӘНЕ ДЕТЕРМИЛЕНГЕН ХАОСТЫҚ ҮРДІСТЕРДІ АДАПТИВТІ БАСҚАРУ ЖҮЙЕСІНІҢ НЕГІЗГІ ТІЗБЕГІН СИНТЕЗДЕУ МӘСЕЛЕСІН ШЕШУ**

*Басқару объектісі параметрлерінің белгісіздігі және сыртқы әсерлер жағдайында тұрақсыз және детерминирленген хаостық үрдістерді басқару үшін бейімделу әдістерін қолдану өзекті мәселе болып табылады. Бұл жағдайда қажетті динамикаға ие эталондық модель және бейімделу жүйесінің негізгі басқару контуры «гиперболалық омбилика» апат класында берік орнықтылық потенциалы жоғары өздігінен ұйымдастырылатын адаптивті жүйе Ляпунов векторлық функциясының градиент-жылдамдық әдісімен зерттеледі, ал қажетті динамикамен және негізгі басқару циклімен эталондық модельдің аперидоттық сенімді тұрақтылығымен құрастырылады.*

***Түйін сөздер:** гиперболалық омбилика, детерминделген хаостық үдерістер, градиент-жылдамдық әдісі, робуасты тұрақтылық, адаптивті жүйе, Морсе леммасы, Ляпунов функциясы.*

---

**M. A. BEYSENBI, A. A. MAIMURYNOVA**

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Department of System Analysis  
and Management, Nur-Sultan, Kazakhstan*

**SOLUTION OF THE PROBLEM OF SYNTHESIS OF THE MAIN CONTOUR  
OF THE ADAPTIVE CONTROL SYSTEM FOR UNSTABLE AND DETERMINISTIC  
CHAOTIC PROCESSES WITH M-INPUTS AND N-OUTPUTS  
IN THE «HYPERBOLIC UMBILIC» CATASTROPHE CLASS**

*An urgent problem in the conditions of uncertainty of the parameters of the control object and external influences, for the control of unstable and deterministic chaotic processes, is the use of adaptation methods. In this case, the reference model with the desired dynamics and the main control loop of the adaptive system are constructed in the catastrophe class "hyperbolic umbilic", and the aperiodic robust stability of the reference model with the desired dynamics and the main control loop of the self-organizing adaptive system with an increased potential for robust stability is studied by the gradient-velocity method of the vector function Lyapunov.*

**Key words:** *hyperbolic umbilic, deterministic chaotic processes, velocity-gradient method, robust stability, adaptive system, Morse lemma, Lyapunov function.*

**Н. Г. ДЖУМАМУХАМБЕТОВ<sup>1\*</sup>, В. А. ЯШКОВ<sup>2</sup>, Д. У. КУЛЬЖАНОВ<sup>2</sup>,  
Н. М. САРСЕНОВ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>НАО Казахский агротехнический университет им. С. Сейфуллина,  
г. Нур-Султан, Казахстан

<sup>2</sup>НАО Атырауский Университет нефти и газа им. С. Утебаева,  
г. Атырау, Казахстан

## **ЖИВУЧЕСТЬ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧ В УСЛОВИЯХ РЕЗКОКОНТИНЕНТАЛЬНОГО КЛИМАТА АТЫРАУСКОГО РЕГИОНА РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

*В работе приведены определения живучести, классификация каскадных аварий, имеющих место при ошибочных действиях персонала и низкой надежности автоматических устройств, показатели живучести: вероятность появления каскадных аварий, средняя длительность и средняя глубина провалов напряжения. Приведена функция надежности персонала, качество управления которого является одним из факторов, определяющих живучесть систем электропередач.*

**Ключевые слова:** каскадные аварии, живучесть, отказ, автоматическое включение резерва, оперативно-диспетчерское управление, короткие замыкания, электроэнергетическая система, вероятность появления каскадных аварий.

**Введение.** Живучесть является единичным свойством комплексного свойства надежности электроэнергетических систем, Методы исследования, показатели и критерии живучести в настоящее время недостаточно разработаны. Существует ряд определений понятия "живучесть". В [1] под живучестью понимают способность системы противостоять возмущениям, не контролируемым системной автоматикой. В [2] живучесть связывают с системными авариями, сопровождающимися каскадным развитием возмущения. В [3] живучесть оценивается цепочечными авариями системного характера. В [4] дано развернутое определение живучести как свойства системы противостоять крупным возмущениям, не допуская их каскадного развития с массовым отключением потребителей. В [1] утверждается, что живучесть можно характеризовать как способность системы противостоять возмущениям. В настоящее время также расходятся мнения исследователей относительно существования закономерностей, которые обуславливают живучесть. Так, в [5] причиной нарушения живучести признается воздействие на систему внешних по отношению к ней факторов, которые носят преднамеренный характер. Указывается, что вероятностные методы в этих условиях неприменимы и не имеют смысла. В [6] приводятся соображения о вероятностном характере возмущения при каскадных авариях.

Все концепции живучести, развиваемые в работах В.А. Веникова, Ю.Н. Руденко, В.Г. Китушина, Ю.А. Фокина и ряда других исследователей, базируются на признании факта наличия первоначального отказа и массового отключения потребителей в результате снижения уровня живучести. Расхождения вызваны различными оценками

---

\* E-mail корреспондирующего автора: [nasikhan\\_d@mail.ru](mailto:nasikhan_d@mail.ru)

первоначального отказа и его природы: крупное возмущение или среднее, детерминированное или вероятностного характера, а также разным подходом к оценке причин, вызывающих столь значительное нарушение работы системы. В [7] первоначальный отказ – это феномен, для описания которого не хватает вероятностно-временных характеристик надежности. В этом плане можно отметить ураганы, смерчи и другие природные явления, проявляющиеся на большой территории и с катастрофическими последствиями. В работах ВГПИ и НИИ "Энергосеть проект" первоначальный отказ – это множество внешних воздействий, одновременно обрушивающихся на систему. Следует отметить, что большинство исследователей придерживаются мнения, что первоначальный – это крупное возмущение, но его последствия определяются не столько его величиной, сколько возможностью развития аварии.

Видимо, все три перечисленных типа первоначальных отказов могут быть предметом исследования. Но это указывает лишь на невозможность разработки универсальной теории живучести базе единого математического аппарата.

**Методы и материалы.** Современные промышленные комплексы с непрерывными технологическими процессами чувствительны к кратковременным нарушениям электропитания (НЭ). Эти нарушения могут быть обусловлены аварийными возмущениями (короткие замыкания, перегрузки и др.), создающими динамический режим, что вызывает необходимость установить границы динамической устойчивости узла схемы.

Наиболее сложными для изучения динамических режимов являются каскадные аварии (КА), которые обычно связывают с живучестью.

В электроэнергетике под живучестью объекта понимается: свойство объекта противостоять возмущениям, не допуская их каскадного развития с массовым нарушением питания потребителей.

Наиболее развернутое определение живучести дано в [8], где под живучестью системы как комплексным свойством надёжности понимается противостояние крупным возмущениям, не допуская их каскадного развития с массовым отключением потребителей или возможности нарушения связности систем промышленного электропитания (СПЭС), которую можно определить как ядро с совокупностью узлов нагрузки и линией связи.

Опыт эксплуатации СПЭС показывает, что узлы электрической нагрузки (сборные шины, места подключения к магистральным линиям, трехобмоточные трансформаторы) оказывает значительное влияние на надёжность функционирования СПЭС, т.к. могут вызвать отключение основных элементов СПЭС – воздушных линий (ВЛ) и к значительному ущербу.

Под живучестью узла нагрузки понимается способность потребителей и их автоматических средств защиты противодействовать возмущениям, которые могут привести к аварийному его отключению.

Кафедрой электропитания промышленных предприятий Московского энергетического института (МЭИ) разработано быстродействующие автоматические включения резерва (БАВР), основанного на современной микропроцессорной элементной базе, и позволяющие с появлением быстродействующих вакуумных и элегазовых выключателей, обеспечить непрерывное электропитание путем переключения на резервный источник питания за время не более 65 мс.



Все концепции живучести, развиваемые в работах, базируются на признании факта наличия первоначального отказа и массового отключения потребителей в результате снижения уровня живучести. Расхождения вызваны различными оценками первоначального отказа и его природы: крупное возмущение или среднее, детерминированное или вероятностного характера, а также разным подходом к оценке причин, вызывающих столь значительное нарушение работы системы.

Следует отметить, что большинство исследователей в области живучести придерживаются мнения о том, что первоначальный отказ — это крупное возмущение, но его последствия определяются не столько его величиной, сколько возможностью развития аварии.

Последствия каскада аварий (КА) определяют их классификацию по характерным событиям, масштабу и причинами (табл. 1).

Таблица 1 – Классификация каскадных аварий

Виды	Причины	Последствия
1. Системные	1. Нарушения в работе УРЗиА	Нарушение баланса мощностей в СЭС
	2. Ошибочные действия эксплуатационного персонала	
	3. Стихийные явления	
2. Локальные	1. Наложение отказов ряда элементов схемы	Нарушения в отдельных районах ЭЭС и СПЭС
	2. Наложение отказов элементов схемы на нарушение режима работы её оборудования, которые устраняются УРЗА	

Как следует отличать от аварии, связанной с потерей устойчивости? Каскадный процесс может не закончиться потерей устойчивости по напряжению. В зависимости от неоднородности сети, процесс может остановиться после отключения нескольких элементов сети в допустимой области режимов, но может и закончиться потерей устойчивости.

Степень расстройств функционирования технологических процессов и установок при нарушении электроснабжения (НЭ) называют глубокой. Глубина цепочной аварии зависит от места появления и числа отключившихся защитного коммутационного аппарата (ЗКА), через которые протекал сквозной аварийный ток и привел в действие релейную защиту (РЗ). Ее можно характеризовать числом ложно отключившихся неповрежденных потребителей (секций мин) либо их убытками, которые связаны с недоотпуском электроэнергии, простым и расстройством технологических циклов.

Показателем живучести может служить частота появления системных цепочных аварий (ЦА) с различной глубиной НЭ. Частота их возникновения при КЗ в защищаемом элементе сети и отказов в срабатывании ряда ЗКА, через которые протекал сквозной аварийный ток, определяется по формуле:

$$F = \frac{1}{2^m} \sum_{j=1}^n \lambda_j \prod_{i=1}^m T_i^2 \omega_i \quad (1)$$

$\lambda_j$  – где параметр потока независимых КЗ в элементе сети;  $\omega_i$  – параметр потока отказов в срабатывании  $i$ -го ЗКА;  $T_i$  – интервал времени между диагностикой системы отключения  $i$ -го ЗКА, вместе с его РЗ или системой АВР;  $m$  – число ЗКА, через которые протекал сквозной аварийный ток или число секционных коммутационных аппаратов с АВР, отказавших во включении;  $n$  – число единиц электрооборудование, получавших электроэнергию от данного узла нагрузки.

Формула (1) справедлива при выполнении двух условий:

1. Интервалы времени между появлениями короткого замыкания (КЗ) в элементе сети и интервалы времени между отказами в срабатывании ЗКА не противоречат экспоненциальным функциям распределения вероятностей с параметрами соответственно  $\lambda_j$  и  $\omega_i$ ;

$$2. T_i \omega_i < 0,1$$

Формула (1) имеет следующие допущения

– устройства управления релейной защитой (УРЗ) могут выходить из строя только тогда, когда они находятся в режиме ожидания;

– к моменту реагирования на повреждения в сети РЗ является работоспособной.

Отказы в схемах РЗ и приводе выключателя выявляются и устраняются в результате абсолютно надежной диагностики, под отказом в срабатывании ЗКА понимается такой, который приводит к отказу в отключении поврежденного элемента сети при КЗ в зоне действия его РЗ.

В случае, если сроки диагностики систем отключения ЗКА будут одинаковы (т.е.  $T_i = T, i = 1, \dots, m$ ), формула (2) будет иметь вид

$$F = \frac{1}{2^m} \sum_{j=1}^n \lambda_j T^{2m} \prod_{i=1}^m \omega_i^2 \quad (2)$$

Вероятность появления КА (или потеря живучести узла нагрузки) в течении времени  $t$  можно определить по выражению

$$Q(t) = 1 - e^{-Ht}, \quad (3)$$

Если  $Ht < 0,1$ , то  $Q(t) \approx Ht$ .

Кроме вероятности появления КА, набор показателей живучести узла схемы должен включать среднюю длительность ( $c$ ) и среднюю глубину провалов напряжения.

Важным фактором обеспечения живучести системы является оперативно-диспетчерское управление (ОДУ), а основными причинами построения системы ОДУ является разграничение функции и ответственности оперативно-диспетчерского персонала (ОДП) всех ступеней управления по ведению нормальных режимов, ликвидации НЭ и строжайшая дисциплина вероятность появления отказов по вине ОДП в интервале времени определится как

$$P \cdot (E_2/E_1) = \lambda(t) \Delta t, \quad (4)$$

где  $E_2$  – событие, состоящее в появлении ошибки ОДП в интервале времени  $[t_1, t + \Delta t]$ ;  $E_1$  – событие, состоящее в безошибочной работе ОДП в течение времени  $t$ ;  $\lambda(t)$  – частота появления ошибок по вине ОДП в момент (аналогично параметру потока отказов в классической теории надежности).

Функция надежности (ФН) ОДП подчиняется экспоненциальному закону и имеет вид:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \omega(t) dt} \tag{5}$$

По аналогии с классической теорией надёжность ОДП определяется как вероятность успешного выполнения им возложенных функции на заданном этапе функционирования системы в течение заданного интервала времени при определенных требованиях к продолжительности выполнения работы. Тогда ошибкой (отказом) ОДП можно считать как невыполнение поставленной задачи, которое привело к повреждению оборудования, аппаратуры, имущества или нарушению технологии запланированных операций.

Ошибки по вине ОДП могут возникнуть в следующих случаях:

- ОДП стремится к достижению ошибочной цели;
- поставленная цель не может быть достигнута из-за неправильных действия ОДП;

– ОДП не принимает никаких действий, когда его участие необходимо.

Уровни распределения ошибок ОДП приведены на рис 1.

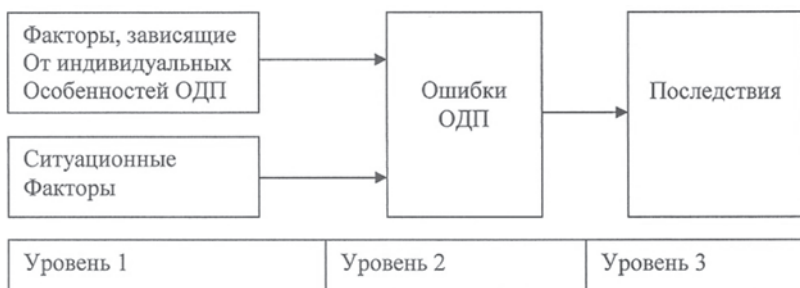


Рисунок 1 – Уровни ошибок ОДП

Виды отказов ОДП и их причины и пути снижения отказов приведены в табл. 2

Таблица 2 – Виды отказов ОДП, причины отказов и пути снижения отказов

Виды отказов	Причины отказов	Пути снижения отказов
1. Закономерные	Низкий уровень знаний ОДП инструкции, директивных указаний.	Лекции и экзамены по ПТБ, ТБ и производственным инструкциям
2. Случайные	Низкий уровень внимания, четкости и дисциплины в работе	Инструктажи, собеседования, противоаварийные тренировки
3. Независимые	1. Недостаточный уровень оснащения рабочего места (доступность к аппаратам управления, освещения и др.)	Повышение уровня оснащения
	2. Недостаточное стимулирование ОДП	Ввод или пересмотр систем стимулирования, позволяющих достигнуть оптимального качества работы

**Результаты и их обсуждение.** Большое разнообразие каскадных отказов потребовало осуществить их классификацию. К настоящему времени выполнен и опубликован ряд работ, посвященных этому вопросу. В [9,10,11] приведены обобщенные данные о нарушениях нормального режима с их подразделением на простые и сложные случаи единичных отказов, а также каскадные нарушения. Авторы отмечают, что каскадные нарушения составляют 8% общего количества нарушений нормального режима. В [6, 12,13,14] осуществлена классификация системных каскадных аварии по характерным событиям. События подразделены на две группы. К первой группе отнесены события, связанные с изменением состояния и структуры системы в результате отказов в работе основного оборудования системы. Ко второй группе отнесены события, являвшиеся причинами изменения состояния электроэнергетических систем.

По охвату территории и масштабу каскадные аварии подразделены на системные и локальные. К системным авариям отнесены аварии, приводящие к нарушению баланса мощности в энергосистеме. В результате системных каскадных аварий дефицитная энергосистема отделяется от питающей, ее электрические станции работают на выделенную нагрузку. К локальным каскадным авариям отнесены аварии, затрагивающие только отдельные районы энергосистемы,

Системные каскадные аварии по причинам, которые их вызывают, были подразделены на три группы. К первой отнесены каскадные аварии, связанные с несогласованной работой автоматики автоматического повторного включения, автоматической частотной разгрузки, делительной частотной защиты, ложным срабатыванием устройств релейной защиты, неверным выбором выдержки автоматического включения. Ко второй группе отнесены аварии, вызываемые неправильными действиями эксплуатационного персонала. К третьей группе отнесены каскадные аварии, вызываемые стихийными явлениями, например, смерчем. Подобная классификация указывает на основную причину аварии и возможный способ ее устранения.

Локальные каскадные аварии по причинам, которые их вызывали, были подразделены на две группы. К первой отнесены схемные каскадные аварии – аварии, вызываемые наложением отказов ряда элементов схемы. Ко второй группе отнесены аварии, представляющие собой наложение отказа элемента схемы сети на нарушение режима работы ее оборудования, которое устраняется устройствами релейной защиты и автоматики.

**Заключение.** Анализ по каскадным авариям позволил установить известную повторяемость не причин, а путей развития аварий, что дало основание для формирования показателей живучести. Общим для нарушения живучести и безотказности является первоначальный отказ – единичная авария. Показатели живучести единичных каскадных аварий могут нормироваться в пределах ЕЭС, что позволит оценивать уровень живучести в каждой конкретной энергосистеме. Методы исследования живучести электроэнергетической системы (ЭЭС) должны быть тесно увязаны с определением показателей живучести. Если под живучестью понимать как противостояние крупным возмущениям, не допуская их каскадного развития с массовым отключением потребителей, то качество оперативно диспетчерского управления СПЭС, способствующее снижению или ограничению этому развитию, можно отнести к одному из основных факторов, определяющему живучесть СПЭС.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Киргушин В.Г., Кобец Б.Б. К вопросу о формализации понятия живучести электроэнергетических систем//Сб. статей. Методические вопросы исследования больших систем энергетики Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1980 Вып. 20. С. 15-23
- 2 Воропай Н.И. О живучести ЭЭС // Надежность ЭЭС. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 2000
- 3 Воропай Н.И. и др. Модели и методы исследования режимной надежности ЭЭС // Надежность систем энергетики. Новосибирск: Наука, 2014
- 4 Алгоритмы живучести и самовосстановления интеллектуальной ЭЭС. Воропай Н.И. и др. ИСЭМ СО АН, 2015
- 5 Ушаков И.А. О живучести территориально распределенных систем // Сб. статей. Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики Иркутск: СЭИ СО АН СССР. 1980. Вып. 20. С.10-14.
- 6 Гук Ю.Б., Карпов В.В. Факторный ретроспективный анализ живучести // Сб. статей. Методические вопросы исследования больших систем энергетики. Иркутск: СЭИ СО АН СССР. 1980. Вып. 20. С.15-23.
- 7 Веников В.А., Фокин Ю.А., Пономаренко И.С., Харченко А.М. Исследование надежности систем электроснабжения // Электричество. 1988. № 3. С.1 –7.
- 8 Воропай Н.И., Микитов В.И., Руденко Ю.Н. Сравнительное исследование живучести условных вариантов развития электроэнергетических систем // Сб. статей. Методические вопросы исследования надежности систем энергетики. Иркутск: СЭИ СО АН СССР. 1980. Вып. 20.
- 9 Китушин В.Г., Кобец Б.Б., К вопросу о формализации понятия живучести электроэнергетических систем//Сб. статей. Методические вопросы исследования больших систем энергетики Иркутск: СЭИ СО АН СССР. 1980. Вып. 20. С.15-23.
- 10 Ершов М.С., Егоров А.В., Трифионов А.А. Устойчивость промышленных электротехнических систем. – М.: ООО «Издательский дом Недра», 2010. – 319 с.: ил.
- 11 Негвицкий М. и др. Интеллектуальная система для предотвращения крупных аварий в ЭЭС // Электричество, 2014
- 12 В.И. Свешников, Ф.А. Кушнарев. Надежность электроэнергетических систем при аварийном понижении частоты и напряжения. - М.: Энергоатомиздат, 1996. –160 с. ил.
- 13 Джумахамбетов Н.Г., Яшков В.А., Ершов М.С. Качество промышленного электроснабжения. -Германия, монография, изд-во «LAP», 2015. – 151с.
- 14 Яшков В.А., Сабирова Г.М., Гильманов Д.Н. Обеспечение живучести систем промышленного электроснабжения качеством оперативно-диспетчерского управления // Национальный конгресс по энергетике. Том IV 2014.

## REFERENCES

- 1 Kirtushin V.G., Kobets B.B. On the issue of formalization of the concept of survivability of electric power systems//Collection of articles. Methodological issues of the study of large energy systems Irkutsk: SEI SB of the USSR Academy of Sciences, 1980 Issue 20. pp. 15-23
- 2 Voropai N.I. About the survivability of the EES // Reliability of the EES. Reference book. Moscow: Energoatomizdat, 2000
- 3 Voropai N.I. et al. Models and methods of investigation of the regime reliability of the EES // Reliability of energy systems. Novosibirsk: Nauka, 2014
- 4 Algorithms of survivability and self-healing of intellectual EPS. Voropai N.I. et al. ISEM SO AN, 2015



5 Ushakov I.A. On the survivability of geographically distributed systems // Collection of articles. Methodological issues of reliability research of large power systems Irkutsk: SEI SB of the USSR Academy of Sciences. 1980. Issue 20. pp.10-14.

6 Guk Yu.B., Karpov V.V. Factor retrospective analysis of survivability // Collection of articles. Methodological issues of the study of large energy systems. Irkutsk: SEI SB of the USSR Academy of Sciences. 1980. Issue 20. pp.15-23.

7 Venikov V.A., Fokin Yu.A., Ponomarenko I.S., Kharchenko A.M. Study of reliability of power supply systems // Electricity. 1988. No. 3. pp. 1-7.

8 Voropai N.I., Mikitov V.I., Rudenko Yu.N. Comparative study of survivability of conditional variants of development of electric power systems // Collection of articles. Methodological issues of energy systems reliability research. Irkutsk: SEI SB of the USSR Academy of Sciences. 1980. Issue 20.

9 Kitushin V.G., Kobets B.B., On the question of formalization of the concept of survivability of electric power systems//Collection of articles. Methodological issues of the study of large energy systems Irkutsk: SEI SB of the USSR Academy of Sciences. 1980. Issue 20. C.15-23.

10 Ershov M.S., Egorov A.V., Trifonov A.A. Stability of industrial electrotechnical systems. - M.: Publishing House Nedra LLC, 2010. - 319 p.: ill.

11 Negvitsky M. et al. Intelligent system for preventing major accidents in the power plant // Electricity, 2014

12 V.I. Sveshnikov, F.A. Kushnarev. Reliability of electric power systems in case of emergency lowering of frequency and voltage. - M.: Energoatomizdat, 1996. -160 p. il.

13 Dzhumamukhambetov N.G., Yashkov V.A., Ershov M.S. Quality of industrial power supply. -Germany, monograph, publishing house "LAP", 2015. - 151c.

14 Yashkov V.A., Sabirova G.M., Gilmanov D.N. Ensuring the survivability of industrial power supply systems by the quality of operational dispatch management // National Congress on Energy. Volume IV 2014.

***Н. Г. ЖҰМАМҰХАМБЕТОВ<sup>1</sup>, В. А. ЯШКОВ<sup>2</sup>, Д. Ұ. ҚҰЛЖАНОВ<sup>2</sup>,  
Н. М. СӘРСЕНОВ<sup>2</sup>***

*<sup>1</sup>ҰАО С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті,  
Нұр-Сұлтан, Қазақстан*

*<sup>2</sup>ҰАО С.Утебаев атындағы Атырау мұнай және газ университеті,  
Атырау, Қазақстан*

*Қазақстан Республикасы Атырау өңірінің күрт континентальды климаты жағдайында электр беру жүйелерінің өміршеңдігі*

*Жұмыста өміршеңдік анықтамалары, персоналдың қате әрекеті және автоматты құрылғылардың сенімділігі төмен болған кезде орын алған каскадты авариялардың жіктелуі, өміршеңдік көрсеткіштері: каскадты авариялардың пайда болу ықтималдығы, кернеудің орташа ұзақтығы және орташа тереңдігі келтірілген. Басқару сапасы электр беру жүйелерінің өміршеңдігін анықтайтын факторлардың бірі болып табылатын қызметкерлердің сенімділік функциясы келтірілген.*

***Түйін сөздер:** каскадты авариялар, өміршеңдік, істен шығу, резервті автоматты қосу, жедел-диспетчерлік басқару, қысқа тұйықталулар, электр энергетикалық жүйе, каскадты авариялардың пайда болу ықтималдығы*

**N. G. DZHUMAMUKHAMBETOV<sup>1</sup>, V. A. YASHKOV<sup>2</sup>,  
D. U. KULZHANOV<sup>2</sup>, N. M. SARSYENOV<sup>2</sup>**

*<sup>1</sup>NAO S.Seifullin Kazakh Agrotechnical University, Nur-Sultan, Kazakhstan*

*<sup>2</sup>NAO Atyrau Utebayev University of Oil and Gas, Atyrau, Kazakhstan*

**SURVIVABILITY OF POWER TRANSMISSION SYSTEMS IN THE  
CONDITIONS OF THE SHARPLY CONTINENTAL CLIMATE  
OF THE ATYRAU REGION OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**

*The paper provides definitions of survivability, classification of cascade accidents that occur with erroneous actions of personnel and low reliability of automatic devices, survivability indicators: the probability of occurrence of cascade accidents, the average duration and average depth of voltage failures. The reliability function of personnel whose management quality is one of the factors determining the survivability of power transmission systems is given.*

**Key words:** *cascade accidents, survivability, failure, automatic activation of the reserve, operational dispatch control, short circuits, electric power system, probability of occurrence of cascade accidents.*

**Д. Б. ЖАКЕБАЕВ<sup>1,2</sup>, А. С. ЖУМАЛИ<sup>1,2\*</sup>**

<sup>1</sup>Национальная инженерная академия Республики Казахстан, Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
Алматы, Казахстан

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ЧЕТЫРЕХКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ МЕТОДАМИ ФАЗОВОГО ПОЛЯ И LB

*Рассмотрено математическое и компьютерное моделирование процесса разделения четырехкомпонентной смеси жидкостей методами решеточных уравнений Больцмана (LB) и фазового поля. Исследуемый процесс рассматривается на ограниченной области, имеющей форму прямоугольника. Построенная математическая модель основана на уравнении Навье-Стокса для несжимаемой жидкости и уравнении Кана-Хилларда. Численная модель построена на основе метода LB с использованием схемы D2Q9. Численные эксперименты проводились для двух сценариев: (1) – исследование модели без учета силы тяжести для определения закономерности влияния поверхностного натяжения и (2) – исследование модели под действием силы тяжести. Численные результаты определяют адекватность построенной модели для четырехкомпонентной жидкости.*

**Ключевые слова:** *четырекомпонентная жидкость, разделение смесей, уравнение Кана-Хилларда, свободная энергия, метод решеточных уравнений Больцмана.*

**Введение.** Исследование динамики многокомпонентных жидкостей представляет значительный научный и технологический интерес. Многокомпонентные жидкости встречаются во многих природных и промышленных процессах, таких как производство нефти и газа, химическая переработка сырья, течения жидких смесей в котлах и конденсаторах и т.д.

Для исследования течений многокомпонентных жидкостей используются различные модели [1-4]. В зависимости от толщины переходного слоя между фазами можно выделить два основных подхода: модели резкого интерфейса (переходный слой между фазами имеет нулевую толщину) и модели диффузного интерфейса (переходный слой между фазами имеет конечную толщину). В нашей статье мы используем второй подход. Ван-дер-Ваальс был первым, кто рассмотрел переходный слой между фазами как слой конечной толщины [5]. В настоящее время для описания моделей диффузного интерфейса широко используется подход Кана-Хилларда [6].

Данная работа является продолжением работы, написанной нами статьи [7], в которой описывается процесс разделения трехкомпонентной смеси жидкостей. В настоящей работе представлена математическая модель течения четырехкомпонентной несжимаемой жидкости с использованием метода фазового поля, основанного на решении полного уравнения Навье-Стокса и конвективного уравнения Кана-Хилларда. Численная модель основана на схеме D2Q9 метода LB со свободной энергией. Точность и эффективность существующего метода проверены на основе решения ряда задач. Полученные результаты определяют корректность построенной модели для четырехкомпонентной жидкости.

---

\* E-mail корреспондирующего автора: [ainura.z89@gmail.com](mailto:ainura.z89@gmail.com)

**Постановка задачи.** Исследуемый процесс рассматривается в ограниченной области, имеющей форму прямоугольника размерами  $[0, L] \times [0, L]$  (рисунок 1). В этой области находятся четыре компонента жидкости с плотностями  $\rho_1, \rho_2, \rho_3,$  и  $\rho_4$ , соотношение которых:  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \rho_4$ . Жидкость с плотностью  $\rho_4$  обозначена синим цветом,  $\rho_3$  – зеленым,  $\rho_2$  – желтым, а более плотная жидкость с плотностью  $\rho_1$  – красным.

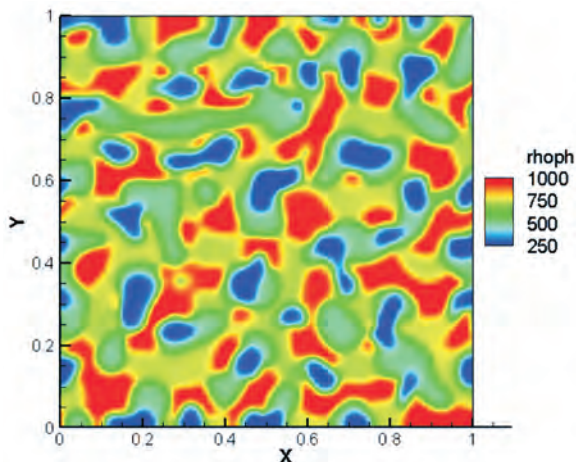


Рисунок 1 – Расчетная область.

Математическая модель процесса включает уравнение неразрывности, уравнение движения смеси и конвективное уравнение Кана-Хилларда:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u} \vec{u}) &= -\nabla p + \nabla[\eta(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T)] + \vec{F}_s + \vec{F}_b, \\ \frac{\partial(c_i)}{\partial t} + \nabla(c_i \vec{u}) &= \nabla(M_i \nabla \mu_i), i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\vec{u}$  – компоненты скорости,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $\eta$  – динамическая вязкость,  $c_i$  – фазовое поле для компонентов жидкости:  $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$ ,  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения,  $M_i$  – коэффициент подвижности,  $\mu_i$  – химический потенциал,  $\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_b = \sum_{i=1}^4 \mu_i \nabla c_i + \rho \vec{g}$  – сумма сил поверхностного натяжения и тяжести.

Для системы многокомпонентной среды функционал свободной энергии Ландау можно определить исходя из концентраций жидкостей следующим образом [8]:

$$F(c, \nabla c) = \int \left[ F_0(c) - \sum_{i,j=1}^4 \frac{3D}{8} \sigma_{ij} \nabla c_i c_j \right] d\Omega$$

где  $F_0(c) = \sum_{i,j=1}^4 \frac{3}{D} \sigma_{ij} [g(c_i) - g(c_j) - g(c_i + c_j)]$  – объемная свободная энергия,  $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$  – фазовая переменная компонентов жидкости,  $g(c) = c^2(1-c)^2$ ,  $\sigma_{ij}$  –

поверхностное натяжение между жидкостями,  $\sigma_{ij} = 0, i, j = \overline{1,4}$ , а  $D$  – толщина переходного слоя между жидкостями.

Изменение функции свободной энергии  $F$  в зависимости от концентраций жидкостей дает химический потенциал  $\mu_i$  для компонента  $i$ :

$$\mu_1 = \frac{12}{D} [\lambda_1 c_1 (1 - c_1) (1 - 2c_1) - 2\lambda_T c_1 c_2 (1 - c_1 - c_2) - 2\lambda_T c_1 c_3 (1 - c_1 - c_3) - 2\lambda_T c_1 c_4 (1 - c_1 - c_4)] - \frac{3}{4} D \lambda_1 \Delta c_1,$$

$$\mu_2 = \frac{12}{D} [\lambda_2 c_2 (1 - c_2) (1 - 2c_2) - 2\lambda_T c_1 c_2 (1 - c_1 - c_2) - 2\lambda_T c_2 c_3 (1 - c_2 - c_3) - 2\lambda_T c_2 c_4 (1 - c_2 - c_4)] - \frac{3}{4} D \lambda_2 \Delta c_2,$$

$$\mu_3 = \frac{12}{D} [\lambda_3 c_3 (1 - c_3) (1 - 2c_3) - 2\lambda_T c_1 c_3 (1 - c_1 - c_3) - 2\lambda_T c_2 c_3 (1 - c_2 - c_3) - 2\lambda_T c_3 c_4 (1 - c_3 - c_4)] - \frac{3}{4} D \lambda_3 \Delta c_3,$$

$$\mu_4 = \frac{12}{D} [\lambda_4 c_4 (1 - c_4) (1 - 2c_4) - 2\lambda_T c_1 c_4 (1 - c_1 - c_4) - 2\lambda_T c_2 c_4 (1 - c_2 - c_4) - 2\lambda_T c_3 c_4 (1 - c_3 - c_4)] - \frac{3}{4} D \lambda_4 \Delta c_4.$$

Вышеполученное  $\mu_i$  подставим в уравнение (1), в результате чего система будет полной. Система уравнений (1) имеет следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} u &= v = 0, \\ c_1(\bar{x}, 0) &= \bar{c}_1 + \alpha \times rand(\bar{x}) \\ c_2(\bar{x}, 0) &= \bar{c}_2 + \alpha \times rand(\bar{x}) \\ c_3(\bar{x}, 0) &= \bar{c}_3 + \alpha \times rand(\bar{x}) \\ c_4(\bar{x}, 0) &= 1 - c_1(\bar{x}, 0) - c_2(\bar{x}, 0) - c_3(\bar{x}, 0) \end{aligned}$$

Граничные условия:

На нижней стенке при  $y = 0$ :

$$u = v = 0, \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{\partial c_2}{\partial y} = \frac{\partial c_3}{\partial y} = \frac{\partial c_4}{\partial y} = 0.$$

На боковых стенках при  $x = 0, L$ :

для  $u, v, c_1, c_2, c_3, c_4$  – периодические граничные условия.

На верхней стенке при  $y = L$ :



$$u = v = 0, \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{\partial c_2}{\partial y} = \frac{\partial c_3}{\partial y} = \frac{\partial c_4}{\partial y} = 0.$$

**Численный метод.** Численное решение данной модели строится на D2Q9 модели решеточного метода Больцмана. Решеточное уравнение Больцмана в аппроксимации Батнагара-Гросса-Крука (BGK) записывается следующим образом:

$$f_i(\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\vec{x}, t) = \Delta t \left[ -\frac{f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)}{\tau_f} + F_i \right]$$

$$g_i^m(\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i^m(\vec{x}, t) = \frac{\Delta t}{\tau_m} [g_i^m(\vec{x}, t) - g_i^{m,eq}(\vec{x}, t)]$$

где  $m = 1, 2, 3, 4$  – компоненты жидкости,  $f_i, g_i^m$  – функции распределения скорости и фазового поля,  $e_i$  – дискретная решеточная скорость,  $\tau_f = \frac{1}{2} + c_1 \left( \tau_1 - \frac{1}{2} \right) + c_2 \left( \tau_2 - \frac{1}{2} \right) + (1 - c_1 - c_2) \left( \tau_3 - \frac{1}{2} \right)$ ,  $\tau_m = 0, 8$  – времени релаксации,  $F_i$  – компонент внешней силы,  $\Delta t$  – решеточный шаг по времени,  $f_i^{eq}, g_i^{m,eq}$  – равновесная функция распределения скорости и фазового поля.

Равновесные функции определяются следующим образом [9]:

$$f_i^{eq} = \begin{cases} \rho - \sum_{i \neq 0} f_i^{eq}, t = 0 \\ \omega_i \rho \left( 1 + \sum_{m=1}^3 \frac{c_m \mu_m}{\rho c_s^2} + \frac{e_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} + \frac{u_\alpha u_\beta (e_{i\alpha} e_{i\beta} - c_s^2 \sigma_{\alpha\beta})}{c_s^2} \right), i \neq 0 \end{cases}$$

$$g_i^{m,eq} = \begin{cases} c_m - \sum_{i \neq 0} g_i^{m,eq}, t = 0 \\ \omega_i \left( \frac{\Gamma_m \mu_m}{c_s^2} + \frac{c_m e_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} + \frac{c_m u_\alpha u_\beta (e_{i\alpha} e_{i\beta} - c_s^2 \sigma_{\alpha\beta})}{2c_s^2} \right), i \neq 0 \end{cases}$$

где  $c_s = c / \sqrt{3}$  – решеточная скорость звука,  $c = \Delta x / \Delta t$ ,  $\Delta x$  и  $\Delta t$  – решеточные шаги по пространству и времени, равны единице.

Для модели D2Q9 дискретные скорости вычисляются следующим образом:

$$e_{ix} = (0, 1, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 1)c$$

$$e_{iy} = (0, 0, 1, 1, 1, 0, -1, -1, -1)c$$

Значения весовых параметров по всем направлениям определяются как:

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{4}{9}, i = 0, \\ \frac{1}{9}, i = 1-4, \\ \frac{1}{36}, i = 5-8 \end{cases}$$

В данной работе для аппроксимации внешней силы  $\vec{F} = F_s + \vec{F}_b = \sum_{i=1}^3 \mu_i \nabla c_i + \rho \vec{g}$  в LBM используется схема, предложенная Гуо и др. [10]:

$$F_i = \omega_i \left( 1 - \frac{\Delta t}{2\tau_f} \right) \left[ \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{u}}{c_s^2} + \frac{\vec{e}_i (\vec{e}_i \cdot \vec{u})}{c_s^4} \right] \cdot \vec{F}$$

Уравнения для функций распределения делятся на два шага как столкновение и распространение:

$$f_i^* (\vec{x}, t) = f_i (\vec{x}, t) + \Delta t \left( -\frac{f_i (\vec{x}, t) - f_i^{eq} (\vec{x}, t)}{\tau_f} - F_i \right)$$

$$g_i^{m,*} (\vec{x}, t) = g_i^m (\vec{x}, t) + \Delta t \left( -\frac{g_i^m (\vec{x}, t) - g_i^{m,eq} (\vec{x}, t)}{\tau_c} \right)$$

$$f_i (\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^* (\vec{x}, t)$$

$$g_i^m (\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = g_i^{m,*} (\vec{x}, t)$$

После второго шага необходимо обновить макропараметры (плотность, скорость и фазовое поле) по формулам:

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i, \rho \vec{u} = \sum_{i=0}^8 f_i \vec{e}_i + \frac{\Delta t}{2} \vec{F}, c_m = \sum_{i=0}^8 g_i^m$$

Производные макроскопических переменных вычисляются с использованием следующих изотропных разностей второго порядка [8]:

$$\nabla^2 c_m (\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^8 \frac{2\omega_i [c_m (\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t) - c_m (\vec{x}, t)]}{c_s^2 \Delta t^2}.$$

Для поля скоростей в качестве граничного условия прилипания в неподвижных стенках ( $\vec{x}_w$ ) используется схема обратного отскока (bounce back scheme) [11]:

$$f_i (\vec{x}_w, t + \Delta t) = f_{-i} (\vec{x}_w, t + \Delta t), \vec{e}_i \cdot \vec{n} > 0,$$

где фаза постоянна, а граничные условия для функций распределения концентрации выбраны следующим образом:

$$g_i^m(\bar{x}_w, t + \Delta t) = g_{-i}^m(\bar{x}_w, t + \Delta t) + 2\omega_i c_w, \quad \bar{e}_i \cdot \bar{n} > 0,$$

где  $c_w$  – пристеночная фаза.

Условие Неймана для фазы на всех остальных стенках:

$$g_i^m(\bar{x}_w, t + \Delta t) = g_{-i}^m(\bar{x}_w, t + \Delta t), \quad \bar{e}_i \cdot \bar{n} > 0,$$

**Результаты моделирования.** Рассматривается динамика четырехкомпонентной смеси в прямоугольной расчетной области, имеющей размеры:  $N_x \times N_y$ ,  $N_x = 80$ ,  $N_y = 80$ . Физический размер длины равен  $L = 0,01$  м. Шаг по пространству и по времени определяются как  $\Delta x = \frac{L}{N_x} = 0,000125$ ,  $\Delta t = 0,000117188$ .

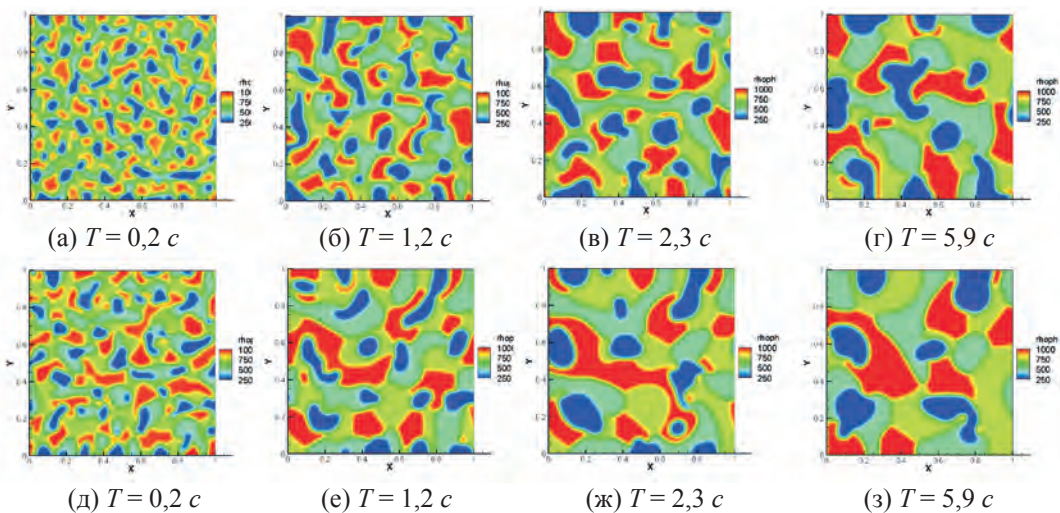
Физические величины: плотность –  $\rho_1 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 750$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_3 = 500$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_4 = 250$  кг/м<sup>3</sup> и вязкость –  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0,01$  Па · с, ускорение свободного падения –  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup> Безразмерные величины: число Рейнольдса –  $Re = 234,787$ , число капиллярности –  $Ca = 0,00010435$  и число Атвуда  $A = 0,142857$ .

Компьютерное моделирование методом решеточных уравнений Больцмана проводится в решеточных единицах, т.е. физические параметры модели заменяются их решеточными аналогами с использованием коэффициентов преобразования  $Cu = 1,06667$ ,  $Cg = 9102,22$ . Параметры LBM: плотность –  $\rho_1 = 1,33$ ,  $\rho_2 = 1$ ,  $\rho_3 = 0,67$ ,  $\rho_4 = 0,33$ , времена релаксации –  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0,8$ , поверхностное натяжение –  $\sigma_{ij} = \{0,02, 0,04\}$ ,  $i, j = \overline{1,4}$ ,  $i \neq j$ , толщина поверхности –  $D = 2$ , ускорение свободного падения –  $g = 0,00107666$  и  $U_{ibm} = 0,293484$ .

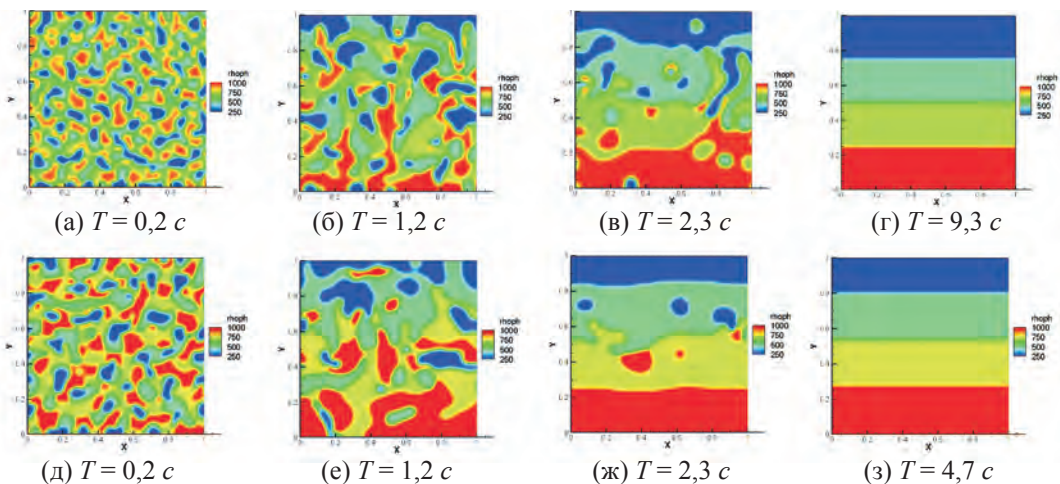
Результаты моделирования (контуры плотностей компонентов смеси) показывают разделение смеси несмешивающихся жидкостей в зависимости от времени (рис. 2, 3). Средние значения концентраций компонентов приняты равными  $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4) = (0,25, 0,25, 0,25, 0,25)$ . В первом сценарии (рис. 2), не учитывающем ускорение свободного падения, наблюдается спиновальное разделение смеси во времени, возникающее в результате влияния поверхностного натяжения между компонентами смеси.

Во втором сценарии (рис. 3), учитывающем ускорение свободного падения, на ранней стадии ( $T < 1$  с) менее плотная жидкость  $\rho_4 = 250$  кг/м<sup>3</sup> начинает подниматься вверх, а более плотная  $\rho_1 = 1000$  кг/м<sup>3</sup> начинает свое движение вниз. В итоге формируются стабильные четыре слоя компонентов жидкости: более плотная жидкость внизу и менее плотная жидкость сверху.

По полученным результатам можно сделать вывод, что чем выше значение поверхностного натяжения, тем быстрее происходит процесс разделения компонентов, что определяет адекватность построенной модели четырехкомпонентной жидкости.



**Рисунок 2** – Процесс разделения компонентов смеси в зависимости от времени при: (а)-(г) –  $\sigma = 0,02$ , (д)-(з) –  $\sigma = 0,04$ .



**Рисунок 3** – Влияние силы тяжести на процесс разделения компонентов смеси в зависимости от времени при: (а)-(г) –  $\sigma = 0,02$ , (д)-(з) –  $\sigma = 0,04$ .

**Заключение.** В статье предложена математическая и численная модель для исследования процесса разделения четырехкомпонентной жидкости. Для реализации этой модели разработан двумерный численный алгоритм на основе схемы D2Q9 метода решеточных уравнений Больцмана в ограниченной полости в форме прямоугольника. Численное моделирование проводилось с учетом и без учета силы тяжести. Результаты численного моделирования показали, что в зависимости от поверхностного натяжения спинодальное разделение компонентов происходит по-разному, т.е. чем больше значение поверхностного натяжения, тем выше скорость притяжения частиц компонентов одинаковой плотности. Под действием силы тяжести с течением

времени жидкости начинают выстраиваться по порядку, от более плотных до менее плотных, снизу вверх соответственно. Стабильность процесса наступает, когда более плотная компонента полностью опускается вниз. При большем значении поверхностного натяжения с учетом силы тяжести время для устойчивого состояния системы получается вдвое меньше. Результаты работы доказывают применимость использованных в статье методов.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант №AP08053154).

### ЛИТЕРАТУРА

1 Shan X., Chen H. Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components. *Phys. Rev. E* 47 (1993): 1815-1839.

2 He X., Chen S., Zhang R. A Lattice Boltzmann scheme for incompressible multiphase flow and its application in simulation of Rayleigh-Taylor instability. *J. Comput. Phys.* 152 (1999): 642-663.

3 Rothman D.H., Keller J.M. Immiscible cellular-automaton fluids. *J. Stat. Phys.* 52 (1988): 1119-1127.

4 Kim J. Phase fluid models for multi-component fluid flows. *Commun. Comput. Phys.* 12, No 3 (2012): 613-661.

5 Waals J. van der. The thermodynamic theory of capillarity under the hypothesis of a continuous variation of density. *Journal of Statistical Physics* 20 (1979): 200-244.

6 Cahn J. W., Hilliard J. E. Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy. *J. Chem. Phys.* 28 (1958): 258-267.

7 Zhakebayev D.B., Zhumali A.S. Simulation of Ternary Fluid Mixtures Separation by Phase-Field Free Energy LBM. *International Journal of Mathematics and Physics* 13, No 1 (2022): 48-54. DOI: <https://doi.org/10.26577/ijmph.2022.v13.i1.05>

8 Zheng L., Zheng S., and Zhai Q. Multiphase flows of Nimmiscible incompressible fluids: Conservative Allen-Cahn equation and lattice Boltzmann equation method” *Physical review E* 101 (2020).

9 Kruger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O. and Silva G., Viggien E.M. *The Lattice Boltzmann-Method.*: Springer International Publishing 258, 2017.

10 Guo Z., Zheng C., Shi B. Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method. *Phys. Rev. E.* 65 (2002): 1-6.

11 Wang P., Zhang Y., Guo Z. Numerical study of three-dimensional natural convection in a cubicalcavity at high Rayleigh numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 113 (2017): 217-228.

**Д. Б. ЖӘКЕБАЕВ<sup>1,2</sup>, А. С. ЖҰМӘЛІ<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>Қазақстан Республикасының Ұлттық инженерлік академиясы, Алматы, Қазақстан

<sup>2</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан  
e-mail: Ainura.z89@gmail.com



## ФАЗАЛЫҚ ӨРІС ЖӘНЕ LB ӘДІСТЕРІМЕН ТӨРТ КОМПОНЕНТТІ ҚОСПАНЫҢ БӨЛІНУІН ПІШІНДЕУ

Бұл мақалада төрт компонентті сұйықтық қоспасының бөліну үрдісін Больцманның торлы теңдеулері (LB) әдісі мен фазалық өріс әдісі арқылы математикалық және компьютерлік пішіндеу қарастырылған. Зерттеліп отырған үрдіс тіктөртбұрыш пішінді шектелген облыста жүзеге асырылған. Құрылған математикалық модель сығылмайтын сұйыққа арналған Навье-Стокс теңдеулеріне және Кан-Хиллард теңдеулеріне негізделген. Сандық әдіс LB әдісінің D2Q9 схемасын қолданумен тұрғызылған. Сандық эксперименттер екі сценарий үшін жүргізілді: (1) – беттік керілу әсерінің жүйелілігін анықтау үшін модельді ауырлық күшін ескермей зерттеу және (2) – модельді ауырлық күшін ескере отырып зерттеу. Сандық нәтижелер төрт компонентті сұйықтық үшін құрылған модельдің адекваттығын көрсетеді.

**Түйін сөздер:** төрт компонентті сұйықтық, қоспаның бөлінуі, Кан-Хиллард теңдеулері, еркін энергия, Больцманның торлы теңдеулері әдісі.

**D. B. ZHAKEBAYEV<sup>1,2</sup>, A. S. ZHUMALI<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan

<sup>2</sup> Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

e-mail: Ainura.z89@gmail.com

## SIMULATION OF FOUR-COMPONENT MIXTURES SEPARATION BY PHASE FIELD AND LB METHODS

This article reviews the mathematical and computer modeling of the process of four-component fluid mixture separation by Lattice Boltzmann equations (LB) method and phase field method. The process under study is considered in a limited area having the shape of a rectangle. The mathematical model constructed to describe this process is based on the Navier-Stokes equation for an incompressible fluid and the Cahn-Hilliard equation. The numerical model is built on the basis of D2Q9 scheme of LB method. Numerical experiments were performed for two scenarios: (1) – investigate the model without body force, in order to determine the patterns of the surface tension effect and (2) - investigate the model with body force. The results obtained determine the adequacy of the constructed model for the four-component fluid.

**Key words:** four-component fluid, mixtures separation, Cahn-Hilliard equation, free energy, lattice Boltzmann equations method.

**K. ZH. NAZAROVA, K. I. USMANOV\*, K. M. SHADIBEKOV**

*Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University*

*e-mail: gjnazarova@mail.ru, y\_kairat@mail.ru*

## A CRITERION FOR UNIQUE SOLVABILITY OF A MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SYSTEMS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INVOLUTION

*On the interval  $[0, T]$ , a multipoint boundary value problem is considered for the systems of integro-differential equations with an involution transformation, when the kernel of the integral term is degenerate. Using the involution property, the problem is reduced to a multipoint boundary value problem for the systems of integro-differential equations with a degenerate kernel. It is shown that by introducing new parameters, changing variables and using the degeneracy of the kernel, the unique solvability of the original problem can be reduced to the invertibility of the resulting matrix.*

**Key words:** *boundary value problem, system of integro-differential equations, involution, involutive transformations, parameterization method.*

**Introduction.** It is known that many processes with aftereffect are described by integro-differential equations, for example, mechanics of a deformable solid, the theory of behavior of polymer materials, etc. The problem of solvability of integro-differential equations is considered in the works of many authors [1-4].

Although numerous works have been devoted to the study of the solvability of boundary value problems for integro-differential equations, many questions of the qualitative theory still remain unsolved. On the basis of research in this field in 1989, Professor D. Dzhumabaev founded and proposed a method of parametrization [5], which was later applied to the study of boundary value problems for systems of integro-differential equations [6]. Various boundary value problems were considered using the parametrization method in [7-11].

In this paper we consider the boundary value problem on the interval .

$$\frac{dx(t)}{dt} + A \frac{dx(\alpha(t))}{dt} = \sum_{k=1}^N \int_0^T \phi_k(t) \psi_k(s) x(s) ds + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^m B_i x(\theta_i) = d, \quad d \in R^n, \quad (2)$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \theta_m = T,$$

where matrices  $\phi_k(t)$ ,  $\psi_k(s)$  and  $n$  - dimensional vector function  $f(t)$  are continuous on  $[0, T]$ . Here  $\alpha(t)$  is the homeomorphism  $\alpha: [0, T] \rightarrow [0, T]$  changing orientation such that  $\alpha^2(t) = \alpha(\alpha(t)) = t$ . Such homeomorphism is called an involution transformation. On the interval  $[0, T]$ , as such a transformation, we can consider the homeomorphism  $\alpha(t) = T - t$ .

---

\* E-mail корреспондирующего автора: y\_kairat@mail.ru

The problem of solvability of various differential equations with involution is discussed in the monograph of D. Przeworska-Rolewicz [12] and by J. Wiener [13]. W.B. Fite [14] described the properties of solutions to the equation with reflection  $\alpha(t) = A - t$ . Further, the properties of this homeomorphism were studied in the works of G.S. Litvinchuk [15], N.K. Karapetyants and S.G. Samko [16]. In [17, 18], spectral problems for differential equations and operators of the first and second orders with involution were studied. A series of works of Alberto Cabada and F. Tojo is devoted to the development of the theory of Green's function of one-dimensional differential equations with involution [19, 20].

Let us consider the values of equation (1) in the point  $t = \alpha(t)$ .

$$\frac{dx(\alpha(t))}{dt} + A \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=1}^N \int_0^T \phi_k(\alpha(t)) \psi_k(s) x(s) ds + f(\alpha(t)), t \in [0, T],$$

From the system

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} + A \frac{dx(\alpha(t))}{dt} = \sum_{k=1}^N \int_0^T \phi_k(t) \psi_k(s) x(s) ds + f(t), \\ \frac{dx(\alpha(t))}{dt} + A \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=1}^N \int_0^T \phi_k(\alpha(t)) \psi_k(s) x(s) ds + f(\alpha(t)), \end{cases}$$

Multiplying the second equation by the matrix  $-A$  on the left side, and adding the equations, we get

$$[I - A^2] \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=1}^N \int_0^T [\phi_k(t) - A \cdot \phi_k(\alpha(t))] \psi_k(s) x(s) ds + [f(t) - Af(\alpha(t))].$$

Suppose that the matrix  $[I - A^2]$  is not degenerate, then the boundary value problem (1), (2) can be written as:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=1}^N \int_0^T \tilde{\phi}_k(t) \psi_k(s) x(s) ds + \tilde{f}(t), \quad t \in [0, T], \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^m B_i x(\theta_i) = d, \quad d \in R^n, \tag{4}$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \theta_m = T,$$

where  $\tilde{\phi}_k(t) = [I - A^2]^{-1} \cdot [\phi_k(t) - A \cdot \phi_k(\alpha(t))]$ ,  $\tilde{f}(t) = [I - A^2]^{-1} \cdot [f(t) - Af(\alpha(t))]$ .

**Research methodology and results.** Let us take a natural number  $l \in \mathbb{N}$  and make a partition

with respect to it:  $[0, T) = \bigcup_{r=1}^{m(l+1)} [t_{r-1}, t_r)$ , where  $t_{i(l+1)+j} = t_{i(l+1)} + \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{l}$ ,  $i = \overline{0, m-1}$ ,  $j = \overline{1, l+1}$ .

Suppose that  $x(t)$  is a solution of equation (1) and  $x_r(t)$  is its narrowing in the  $r$ -th interval  $[t_{r-1}, t_r)$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$ , i.e.  $x_r(t) = x(t)$ ,  $t \in [t_{r-1}, t_r)$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$ . Then the system of functions  $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m(l+1)}(t))$  belongs to the space  $C([0, T], \Delta_{m(l+1)}, R^{nm(l+1)})$ , and its elements  $x_r(t)$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$  are continuous in  $[t_{r-1}, t_r)$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$  and have finite left-hand limits  $\lim_{t \rightarrow t_s-0} x_r(t)$  при  $r = \overline{1, m(l+1)}$ , with the norm

$$\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1, m(l+1)}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|x_r(t)\|$$

Then problem (3), (4) is reduced to the equivalent problem:

$$\frac{dx_r}{dt} = \sum_{j=1}^{m(l+1)} \sum_{k=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{\phi}_k(t) \psi_k(s) x_j(s) ds + \tilde{f}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, m(l+1)} \quad (5)$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} B_i x_{i(l+1)+1}(t_{i(l+1)}) + \lim_{t \rightarrow T-0} x_{m(l+1)}(t) = d \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \quad s = \overline{1, \dots, m(l+1) - 1}, \quad (7)$$

where (7) is the condition of continuity of the solution in the internal points of the partition of the interval  $[0, T)$ .

Let us introduce the notations  $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$ ,  $\lambda_{m(l+1)+1} = \lim_{t \rightarrow T-0} x_{m(l+1)}(t)$  and in each interval  $t \in [t_{r-1}, t_r)$  make a substitution  $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$ . Then the boundary value problem (5) - (7) will be written as:

$$\frac{du_r}{dt} = \sum_{j=1}^{m(l+1)} \sum_{k=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{\phi}_k(t) \psi_k(s) (u_j(s) + \lambda_j) ds + \tilde{f}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, m(l+1)} \quad (8)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, m(l+1)} \quad (9)$$

$$\sum_{i=0}^m B_i \lambda_{i(l+1)+1} = d \quad (10)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow t_s-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, m(l+1)}. \quad (11)$$

where (11) are the conditions for continuity of the solution in the internal points of the partition  $\Delta_N$ .

The solution to problem (8) - (11) is the system of pairs  $(\lambda, u[t])$  with elements

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in R^{nm(l+1)+1}, \quad u[t] = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{m(l+1)}(t)) \in C([0, T], \Delta_{m(l+1)}, R^{nm(l+1)})$$

where functions  $u_r(t)$  are continuously differentiable in  $[t_{r-1}, t_r)$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$  and for

$\lambda_r = \lambda_r^*$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$  satisfy the system of integro-differential equations (8) and conditions (9), (10).

If the system of functions  $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m(l+1)}(t))$  is a solution to problem (5) - (7), then the pair  $(\lambda, u[t])$ , where  $\lambda = (x_1(t_0), x_2(t_2), \dots, x_{m(l+1)}(t_{m(l+1)-1}), \lim_{t \rightarrow T-0} x_{m(l+1)}(t))$ ,  $u[t] = (x_1(t) - x_1(t_0), x_2(t) - x_2(t_1), \dots, x_{m(l+1)}(t) - x_{m(l+1)}(t_{m(l+1)-1}))$  will be a solution to problem (8) - (10). And vice versa, if the pair  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$  is a solution to problem (8) - (10), then the system of functions  $\tilde{x}[t]$  defined by the equalities  $\tilde{x}_r(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t)$ ,  $[t_{r-1}, t_r]$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$ ,  $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_{m(l+1)+1}$  is a solution to the original boundary value problem (5) - (7).

Introduction of additional parameters makes it possible to obtain the initial data (9). Now, for fixed values of parameters  $\lambda \in R^{n(m(l+1)+1)}$ , the system of functions  $u[t]$  can be determined from the special Cauchy problem for the systems of integro-differential equations (8) and (9)

$$u_r(t) = \int_{t_r}^t \sum_{j=1}^{m(l+1)} \sum_{k=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{\phi}_k(\tau) \psi_k(s) [u_j(s) + \lambda_j] ds d\tau + \int_{t_r}^t \tilde{f}(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, m(l+1)}. \quad (12)$$

Let us introduce the notation:

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{m(l+1)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) u_j(s) ds \quad (13)$$

and rewrite the system of integral equations (12) as:

$$u_r(t) = \int_{t_r}^t \sum_{k=1}^N \tilde{\phi}_k(\tau) \mu_k d\tau + \int_{t_r}^t \sum_{j=1}^{m(l+1)} \sum_{k=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{\phi}_k(\tau) \psi_k(s) \lambda_j ds d\tau + \int_{t_r}^t \tilde{f}(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, m(l+1)} \quad (14)$$

Multiplying both parts of (14) by  $\psi_i(t)$ , integrating over the interval  $[t_{r-1}, t_r]$  and summing over  $r$ , we obtain a system of linear equations with respect to  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) \in R^{nN}$

$$\sum_{r=1}^{m(l+1)} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_i(\tau) u_r(\tau) d\tau = \sum_{r=1}^{m(l+1)} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_i(\tau) \int_{t_r}^{\tau} \sum_{k=1}^N \tilde{\phi}_k(\tau_1) d\tau_1 d\tau \mu_k + \sum_{r=1}^{m(l+1)} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_i(\tau) \int_{t_r}^{\tau} \sum_{k=1}^N \tilde{\phi}_k(\tau_1) d\tau_1 d\tau \sum_{j=1}^{m(l+1)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) \lambda_j ds + \sum_{r=1}^{m(l+1)} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_i(\tau) \int_{t_r}^{\tau} \tilde{f}(\tau_1) d\tau_1 d\tau$$



or

$$\mu_i = \sum_{k=1}^N G_{i,k}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) \mu_k + \sum_{r=1}^{m(l+1)} V_{i,r}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) \lambda_r + g_i(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}), \quad i = \overline{1, N}, \quad (15)$$

where

$$G_{i,k}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) = \sum_{r=1}^{m(l+1)} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_i(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} \tilde{\phi}_k(\tau_1) d\tau_1 d\tau, \quad k = \overline{1, N}$$

$$V_{i,r}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) = \sum_{j=1}^{m(l+1)} \sum_{k=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_i(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} \tilde{\phi}_k(\tau_1) d\tau_1 d\tau \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(s) ds, \quad r = \overline{1, m(l+1)}$$

$$g_i(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) = \sum_{r=1}^{m(l+1)} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_i(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} \tilde{f}(\tau_1) d\tau_1 d\tau.$$

Using matrices  $G_{i,k}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1})$ ,  $V_{i,r}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1})$  we can combine matrices  $G(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) = (G_{i,k}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}))$ ,  $V(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) = (V_{i,r}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}))$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$  of dimensions  $nN \times nN$ ,  $nN \times nm(l+1)$  respectively, and write system (15) as

$$[I - G(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1})] \mu = \sum_{r=1}^{m(l+1)} V(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) \lambda + g(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1})$$

where  $I$  – is a unit matrix of  $nN$  dimension,

$$g(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) = (g_1(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}), g_2(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}), \dots, g_N(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1})) \in R^{nN}.$$

**Definition 1.** Partitioning  $\Delta_{m(l+1)}$  is called regular if the matrix  $I - G(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1})$  is reversible.

Let  $\sigma(N, [0, T])$  denote a set of regular partitions  $\Delta_{m(l+1)}$  from  $[0, T]$  for equation (5).

**Definition 2.** The special Cauchy problem (8), (9) for a Fredholm integro-differential equation is called uniquely solvable if for any  $\lambda \in R^{n(m(l+1)+1)}$ ,  $\tilde{f}(t) \in C([0, T], \Delta_{m(l+1)}, R^n)$  it has a unique solution.

The special Cauchy problem (8), (9) is equivalent to the system of integral equations (12). Due to the degeneracy of the kernel, this system is equivalent to the system of algebraic equations (15) with respect to  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) \in R^{nN}$ . Therefore, the special Cauchy problem is uniquely solvable if and only if the partition  $\Delta_{m(l+1)}$  generating this problem is regular. Since the special Cauchy problem is uniquely solvable for sufficiently large  $l \in N$ , the set  $\sigma(N, [0, T])$  is not empty.

Let us take  $\Delta_{m(l+1)} \in \sigma(N, [0, T])$  and represent  $[I - G(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1})]^{-1}$  as  $[I - G(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1})]^{-1} = M_{k,i}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1})$ ,  $k, i = \overline{1, N}$ , where  $M_{k,i}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1})$  are square matrices of dimension  $nN$ . Then, according to (15), the elements of the vector  $\mu \in R^{nN}$  can be determined by the equalities

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{m(l+1)} \sum_{p=1}^N M_{i,p}(\Delta_{m(l+1)}, t_r) V_{i,j}(\Delta_{m(l+1)}, t_r) \lambda_j + \sum_{p=1}^N M_{i,p}(\Delta_{m(l+1)}, t_r) \cdot g_p(\Delta_{m(l+1)}, t_r), \quad i = \overline{1, N} \quad (16)$$

Substituting the right-hand side of (16) into equality (13), we obtain functions  $u_r(t)$  in terms of  $\lambda_j$ ,  $j = \overline{1, m(l+1)}$ .

$$u_r(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}, t) = \sum_{j=1}^{m(l+1)} \sum_{p=1}^N \int_{t_r}^t \tilde{\varphi}_k(\tau) d\tau \left[ \sum_{p=1}^N M_{k,p}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) \cdot V_{p,j}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) ds \right] \lambda_j + \sum_{k=1}^N \int_{t_r}^t \tilde{\varphi}_k(\tau) d\tau \sum_{p=1}^N M_{k,p}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) \cdot g_p(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) + \int_{t_r}^t \tilde{f}(\tau) d\tau, \quad (17)$$

$$t, t_r = [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, m(l+1)}$$

Let us introduce the notations:

$$D_{r,j}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}, t) = \sum_{k=1}^N \int_{t_{r-1}}^t \tilde{\varphi}_k(\tau) d\tau \left[ \sum_{p=1}^N M_{k,p}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) V_{p,j}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) ds \right], \quad r, j = \overline{1, m(l+1)} \quad (18)$$

$$F_r(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}, t) = \sum_{k=1}^N \int_{t_{r-1}}^t \tilde{\varphi}_k(\tau) \sum_{p=1}^N M_{k,p}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) \cdot g_p(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}) + \int_{t_r}^t \tilde{f}(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Then formula (2.17) will be written as

$$u_r(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}, t) = \sum_{j=1}^{m(l+1)} D_{rj}(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}, t) \lambda_j + F_r(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}, t), \quad r = \overline{1, m(l+1)}. \quad (20)$$

Having determined the limiting values  $\lim_{t \rightarrow t_r, -0} u_r(t)$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$ , we substitute them into the boundary continuity condition (11). Then we obtain the following system of linear algebraic equations in parameters  $\lambda_r$ ,  $r = \overline{1, m(l+1) + 1}$ :

$$\sum_{i=0}^m B_i \lambda_{i(l+1)+1} = d \quad (21)$$

$$\lambda_s + \sum_{j=1}^{m(l+1)} D_{sj} (\Delta_{m(l+1)}, t_{s-1}, t_s) \lambda_j - \lambda_{s+1} = -F_s (\Delta_{m(l+1)}, t_{s-1}, t_s), \quad s = \overline{1, m(l+1)}. \quad (22)$$

If we denote the matrix corresponding to the left-hand side of the system of equations (22), (23) as  $Q_*(\Delta_{m(l+1)})$ , then the system can be written in matrix form:

$$Q_*(\Delta_{m(l+1)}) \cdot \lambda = -F_*(\Delta_{m(l+1)}, t_{r-1}), \quad \lambda \in R^{n(m(l+1)+1)} \quad (23)$$

where  $F_*(\Delta_{m(l+1)}) = (-d, F_1(\Delta_{m(l+1)}, t_1), \dots, F_{m(l+1)}(\Delta_{m(l+1)}, T))$ .

**Definition 3.** Problem (3), (4) is called uniquely solvable if for any pair  $(f(t), d)$  it has a unique solution  $x(t)$ .

From the above, it follows:

**Theorem 1.** Let the matrix  $[I - A^2]$  be not degenerate, then the boundary value problem (1), (2) is uniquely solvable if and only if the matrix  $Q_*(\Delta_{m(l+1)})$  is invertible for any  $\Delta_{m(l+1)} \in \sigma(N, [0, T])$ .

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09259137)

### REFERENCES

- 1 Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. Cambridge: Cambridge University Press; 2004.
- 2 Maleknejad K, Attary M. An efficient numerical approximation for the linear Fredholm integro-differential equations based on Cattani's method. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. -2011. -Vol.16:2672-2679.
- 3 Molabahrami A. Direct computation method for solving a general nonlinear Fredholm integro-differential equation under the mixed conditions: degenerate and non-degenerate Kernels/ J Comput Appl Math. -2015.- Vol.282:34-43.
- 4 Turmetov B.Kh., Usmanov K.I., Nazarova K.Zh., On the operator method for solving linear integro-differential equations with fractional conformable derivatives // Fractal and Fractional, -2021. No. 5(3), p.109;
- 5 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation// Computational Mathematics and Mathematical Physics. -1989. -Vol.29, No. 1.- P.34-46.
- 6 Dzhumabaev D.S. A method for solving a linear boundary value problem for an integro-differential equation // Jrn. Comp. Mat. and Mat. Phys.,- 2010. -V. 50, No. 7. P. 1209-1221.
- 7 D. S. Dzhumabaev, "On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 294:2 (2016), 342-357.
- 8 Dulat Dzhumabaev, "Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations", Mathematical Methods in Applied Sciences, 41:4 (2018), 1439-1462

9 Nazarova K.Zh., Usmanov K.I. Unique solvability of the boundary value problem for integro-differential equations with involution // AIP Conference Proceedings. 2365, 070012 (2021);

10 K. Nazarova, K. Usmanov., On a boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution // International Journal of Applied Mathematics -2021. –Vol.34. -P.225-235.

11 Orumbayeva N.T. Algorithms for finding a solution to the initial boundary value problems for differential equations in partial derivatives / N.T. Orumbayeva // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics. -2016. - No. 2 (82). --P. 107–112.

12 Przeworska-Rolewicz D. Equations with Transformed Argument, An Algebraic Approach. Amsterdam, Warszawa, 1973.

13 Wiener J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations. World Sci., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993.

14 Fite W.B. Properties of the solution of certain functional differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. - 1921. - No. 3. - P. 311–319.

15 Litvinchuk G.S. Boundary value problems and singular integral equations with a shift. - Publishing house "Nauka", Main edition of physical and mathematical literature, 1977.

16 Karapetyants N.K., Samko S.G. Equations with involution operators and their applications // Rostov-n / D. Publishing house of RSU -1988. 188 p.

17 Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Properties in  $L_p$  of root functions for a nonlocal problem with involution// Turk J Math. – 2019. - V.43. –P.393 - 401.

18 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution// Differential Equation. -2012. -Vol.48, No.8. -P. 1112 - 1118.

19 Cabada A, Tojo FAF. On linear differential equations and systems with reflection// Applied Mathematics and Computation. - 2017. -Vol.305, -P. 84-102.

20 Tojo FAF. Computation of Green's functions through algebraic decomposition of operators// Boundary Value Problem. - 2016. –Vol. 2016, No. 167. - P. 1-15.

**К. Ж. НАЗАРОВА, К. Ш. УСМАНОВ, К. М. ШАДЫБЕКОВ**

*Қ.А.Яссауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті  
e-mail: gjnazarova@mail.ru, y\_kairat@mail.ru*

## **ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕЛЕР ЖҮЙЕЛЕРІ ҮШІН КӨП НҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ БІРМӘНДІ ШЕШІМДІЛІГІНІҢ КРИТЕРИЯСЫ**

*[0, T] кесіндісінде интегралдық мүшенің ерекше болған жағдайда инволютивтік түрлендіруі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін көп нүктелі шеттік есеп қарастырылады. Инволюция қасиетін пайдалана отырып, бастапқы есеп ерекше ядролы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін көп нүктелі шеттік есептерге келтіріледі. Параметрлерді енгізу және айнымалыларды алмастыру, сонымен қатар ядроның ерекшелігін пайдалану арқылы бастапқы есептің бірмәнді шешімділігі бастапқы берілмдер мәндерінен тәуелді матрицаның кері матрицасының бар болуына келтіріледі.*

***Түйін сөздер:** шеттік есеп, интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі, инволюция, инволютивтік түрлендірулер, параметрлеу әдісі.*

**К. Ж. НАЗАРОВА, К. Ш. УСМАНОВ, К. М. ШАДИБЕКОВ**

*Международный Казахско-Турецкий университет им. А.Яссави*

*E-mail: gjnazarova@mail.ru, y\_kairat@mail.ru*

**КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ  
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ**

*На отрезке  $[0, T]$  рассматривается многоточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений с инволютивным преобразованием, когда ядро интегрального члена является вырожденным. Используя свойство инволюции, задача сводится к многоточечной краевой задаче для систем интегро-дифференциальных уравнений с вырожденным ядром. Вводя параметры и выполняя замену переменных, а также используя вырожденность ядра, однозначная разрешимость исходной задачи сводится к обратимости матрицы, зависящего от исходных данных.*

**Ключевые слова.** *краевая задача, система интегро-дифференциальных уравнений, инволюция, инволютивные преобразования, метод параметризации.*

**Н. РАДЖАБОВ, Ж. Н. ТАСМАМБЕТОВ, Ж. К. УБАЕВА\***

*Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова*

*Актобе, Казахстан*

*E-mail: Zhanar\_ubaeva@mail.ru*

## ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ТИПА КЛАУЗЕНА

*Исследуются особенности построения решений вблизи особенности регулярной однородной системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Доказан ряд свойств произведения функций Клаузена, построенных вблизи этих особенностей. Исследованы особенности построения общего решения системы Клаузена. На решение таких систем в последнее время начали уделять особое внимание в связи с исследованиями многомерных вырождающихся дифференциальных уравнений.*

**Ключевые слова:** уравнения Клаузена, система типа Клаузена, особые точки, особенности, система.

**Постановка задачи.** Исследуются особенности построения решений вблизи особенности  $(0,0)$  регулярной однородной системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка вида

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1} (r_{j,k} - \alpha_{j,k} \cdot x^h) \cdot x^j \cdot y^k \cdot p_{j,k} &= 0, \\ \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1} (t_{j,k} - \beta_{j,k} \cdot y^h) \cdot x^j \cdot y^k \cdot p_{j,k} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $p_{0,0}(x, y) = Z(x, y)$  ( $j=0, k=0$ ) общая неизвестная для двух уравнений системы (1); через  $p_{j,k}$  обозначены различные порядки частных производных неизвестной функции  $Z(x, y)$ . Порядок зависит от значения  $\omega$ . Если  $\omega = 1$ , то получим системы второго порядка

$$\begin{aligned} x^2 (r_{2,0} - \alpha_{2,0} \cdot x^h) \cdot p_{2,0} + xy (r_{1,1} - \alpha_{1,1} \cdot x^h) \cdot p_{1,1} + x (r_{1,0} - \alpha_{1,0} \cdot x^h) \cdot p_{1,0} + y (r_{0,1} - \alpha_{0,1} \cdot x^h) \cdot p_{0,1} + \\ + (r_{0,0} - \alpha_{0,0} \cdot x^h) \cdot p_{0,0} = 0, \\ y^2 (t_{0,2} - \beta_{0,2} \cdot y^h) \cdot p_{0,2} + xy (t_{1,1} - \beta_{1,1} \cdot y^h) \cdot p_{1,1} + x (t_{1,0} - \beta_{1,0} \cdot y^h) \cdot p_{1,0} + y (t_{0,1} - \beta_{0,1} \cdot y^h) \cdot p_{0,1} + \\ + (t_{0,0} - \beta_{0,0} \cdot y^h) \cdot p_{0,0} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $p_{0,0}(x, y) = Z(x, y)$  общая неизвестная,  $r_{j,k}, \alpha_{j,k}, t_{j,k}, \beta_{j,k}$  ( $j, k = 0, 2$ ) неизвестные постоянные; коэффициенты системы (1) – многочлены двух переменных.

Случай  $h=1$  наиболее исследован. Я. Горн доказал, что все 34 известные гипергеометрические функции, в частности четыре гипергеометрические функции двух

\* E-mail корреспондирующего автора: Zhanar\_ubaeva@mail.ru



переменных. П. Аппеля  $F_1 - F_4$ , являются решениями частных случаев таких систем. При  $h = 2$  получим системы, решениями которых являются ортогональные многочлены двух переменных. Таким образом, решениями введенные нами системы вида (2) являются более сорока специальные функции двух переменных. Установление этой связи важно при приближенном вычислении значений гипергеометрических функции двух переменных. Определенная работа в этом направлении начала проводиться в работах американского учёного О.И. Маричева.

Когда  $\omega = 2$ , получим системы третьего порядка. Наиболее интересными из них являются системы типа Клаузена. Исследования таких систем не получили достаточного развития.

Функция Клаузена

$${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; x) = F\left(\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2 \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, n) \cdot (\alpha_2, n) \cdot (\alpha_3, n)}{(\beta_1, n) \cdot (\beta_2, n) \cdot (1, n)} \cdot x^n, \quad (3)$$

где использованы обозначения Похгаммера  $(\alpha, 0) = 1$ ,  $(\alpha, n) = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)$ ,  $n > 0$ ,  $(1, n) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$  с пятью параметром  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и  $\beta_l$  ( $l = 1, 2$ ) является первым примером (1828 г.) обобщенной гипергеометрической функции [1].

Справедливо утверждение.

**Теорема 1.** Функция Клаузена (3) является частным решением дифференциально-го уравнения гипергеометрического типа третьего порядка

$$\begin{aligned} x^2(1-x) \frac{d^3 y}{dx^3} + [1 + \beta_1 + \beta_2 - (3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x] x \frac{d^2 y}{dx^2} + \\ + [\beta_1 \cdot \beta_2 - (1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3)x] \frac{dy}{dx} - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot y = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

а общее решение представляется в виде суммы

$$\begin{aligned} y(x) = \sum_{i=0}^3 C_i y_i(x) = C_1 \cdot F\left(\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2 \end{matrix} \middle| x\right) + C_2 \cdot x^{1-\beta_1} \cdot F\left(\begin{matrix} \alpha_1 + 1 - \beta_1, & \alpha_2 + 1 - \beta_1, & \alpha_3 + 1 - \beta_1 \\ 2 - \beta_1, & \beta_2 + 1 - \beta_1 \end{matrix} \middle| x\right) + \\ + C_3 \cdot x^{1-\beta_2} \cdot F\left(\begin{matrix} \alpha_1 + 1 - \beta_2, & \alpha_2 + 1 - \beta_2, & \alpha_3 + 1 - \beta_2 \\ \beta_1 + 1 - \beta_2, & 2 - \beta_2 \end{matrix} \middle| x\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Приведем определение обобщенной гипергеометрической функции.

**Определение 1.** Обобщенной гипергеометрической функцией называется функция вида

$${}_p F_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, n) \dots (\alpha_p, n)}{(\beta_1, n) \dots (\beta_q, n) \cdot (1, n)} \cdot x^n \quad (6)$$

при этом предполагается, что ни одно из  $\beta$  не является целым отрицательным числом. Ряд (6) сводится к многочлену, если хотя бы одно из  $\alpha$  является отрицательным числом.

Определены и изучены также обобщенные гипергеометрические функции многих переменных.

**Определение 2.** Обобщенные гипергеометрические функции двух переменных определяются двойными рядами

$$F(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n, \tag{7}$$

коэффициенты которых удовлетворяют следующим соотношениям

$$\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = \frac{P(m,n)}{R(m,n)}, \frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{Q(m,n)}{S(m,n)}, \tag{8}$$

$$\frac{P(m,n+1) \cdot Q(m,n)}{R(m,n+1) \cdot S(m,n)} = \frac{P(m,n) \cdot Q(m+1,n)}{R(m,n) \cdot S(m+1,n)} \tag{9}$$

где  $P, Q, R$  и  $S$  многочлены от  $m$  и  $n$ . Они (8) подчинены трём условиям. Из них условие совместности (9) обеспечивает однозначное определение коэффициентов  $a_{m,n}$  ряда (7).

*Простая система типа Клаузена с решениями в виде произведения функций Клаузена*

В данной работе изучены два вида системы типа Клаузена.

**Теорема 2.** Система типа Клаузена

$$\begin{aligned} &x^2(1-x)p_{30} + [1 + \beta_1 + \beta_2 - (3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x]p_{20} + \\ &+ [\beta_1\beta_2 - (1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x]p_{10} - \alpha_1\alpha_2\alpha_3p_{00} = 0, \tag{10} \\ &y^2(1-y)p_{03} + [1 + \beta'_1 + \beta'_2 - (3 + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)y]yp_{02} + \\ &+ [\beta'_1\beta'_2 - (1 + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_1\alpha'_2 + \alpha'_1\alpha'_3 + \alpha'_2\alpha'_3)y]p_{01} - \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3p_{00} = 0 \end{aligned}$$

имеет девять линейно-независимых частных решений в виде произведения различных функций Клаузена, одна из которых является функция типа Клаузена

$$\begin{aligned} Z_1(x, y) = {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, x) {}_3F_2(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \beta'_1, \beta'_2, y) = \cdot F \left( \begin{matrix} \alpha_1, \alpha'_1 & \alpha_2, \alpha'_2 & \alpha_3, \alpha'_3 \\ \beta_1, \beta'_1 & \beta_2, \beta'_2 & \end{matrix} \middle| x, y \right) = \\ \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m (\alpha'_1)_n (\alpha_2)_m (\alpha'_2)_n (\alpha_3)_m (\alpha'_3)_n}{(\beta_1)_m (\beta'_1)_n (\beta_2)_m (\beta'_2)_n} \cdot \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^n}{n!}. \tag{11} \end{aligned}$$

Система (10) состоит из двух совместных обыкновенных дифференциальных уравнений. Их объединяет общая неизвестная  $p_{0,0}(x, y) = Z(x, y)$ . Каждое уравнение имеет общее решение вида (5). Комбинируя построенные частные решения, получим ещё восемь линейно-независимых частных решений:

$$Z_2(x, y) = F\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \left| x \right.\right) \cdot y^{1-\beta_1'} \cdot F\left(\alpha_1' + 1 - \beta_1', \alpha_2' + 1 - \beta_1', \alpha_3' + 1 - \beta_1', \left| y \right.\right), \quad (12)$$

$$Z_3(x, y) = F\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \left| x \right.\right) \cdot y^{1-\beta_2'} \cdot F\left(\alpha_1' + 1 - \beta_2', \alpha_2' + 1 - \beta_2', \alpha_3' + 1 - \beta_2', \left| y \right.\right), \quad (13)$$

$$Z_4(x, y) = x^{1-\beta_1} \cdot F\left(\alpha_1 + 1 - \beta_1, \alpha_2 + 1 - \beta_1, \alpha_3 + 1 - \beta_1, \left| x \right.\right) \cdot F\left(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \left| y \right.\right), \quad (14)$$

$$Z_5(x, y) = x^{1-\beta_1} \cdot F\left(\alpha_1 + 1 - \beta_1, \alpha_2 + 1 - \beta_1, \alpha_3 + 1 - \beta_1, \left| x \right.\right) \cdot y^{1-\beta_1'} \cdot F\left(\alpha_1' + 1 - \beta_1', \alpha_2' + 1 - \beta_1', \alpha_3' + 1 - \beta_1', \left| y \right.\right), \quad (15)$$

$$Z_6(x, y) = x^{1-\beta_1} \cdot F\left(\alpha_1 + 1 - \beta_1, \alpha_2 + 1 - \beta_1, \alpha_3 + 1 - \beta_1, \left| x \right.\right) \cdot y^{1-\beta_2'} \cdot F\left(\alpha_1' + 1 - \beta_2', \alpha_2' + 1 - \beta_2', \alpha_3' + 1 - \beta_2', \left| y \right.\right), \quad (16)$$

$$Z_7(x, y) = x^{1-\beta_2} \cdot F\left(\alpha_1 + 1 - \beta_2, \alpha_2 + 1 - \beta_2, \alpha_3 + 1 - \beta_2, \left| x \right.\right) \cdot F\left(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \left| y \right.\right), \quad (17)$$

$$Z_8(x, y) = x^{1-\beta_2} \cdot F\left(\alpha_1 + 1 - \beta_2, \alpha_2 + 1 - \beta_2, \alpha_3 + 1 - \beta_2, \left| x \right.\right) \cdot y^{1-\beta_1'} \cdot F\left(\alpha_1' + 1 - \beta_1', \alpha_2' + 1 - \beta_1', \alpha_3' + 1 - \beta_1', \left| y \right.\right), \quad (18)$$

$$Z_9(x, y) = x^{1-\beta_2} \cdot F\left(\alpha_1 + 1 - \beta_2, \alpha_2 + 1 - \beta_2, \alpha_3 + 1 - \beta_2, \left| x \right.\right) \cdot y^{1-\beta_2'} \cdot F\left(\alpha_1' + 1 - \beta_2', \alpha_2' + 1 - \beta_2', \alpha_3' + 1 - \beta_2', \left| y \right.\right). \quad (19)$$

Аналогичные результаты получены в работе [2], где рассматриваются произведения функции Бесселя первого рода

$$J_{k,s}(x, y) = J_k(x) \cdot J_s(y\rho(x)); \rho(x) > 0, x > 0,$$

и исследованы их различные свойства.

Такие же исследования требуется проводить с построенными решениями вида (11)–(19).

**Теорема 3.** Общее решение системы типа Клаузена (10) представляется в виде суммы

$$Z(x, y) = \sum_{i=1}^9 C_i \cdot Z_i(x, y), \tag{20}$$

где  $C_i (i = \overline{1,9})$  – произвольные постоянные. Это доказывается методом Фробениуса–Латышевой [3].

**Теорема 4.** Обобщенная гипергеометрическая функция Клаузена (3) имеет производную  $m$ -го порядка

$$\frac{d^m F}{dx^m} = \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_1 + m - 1) \cdot \alpha_2(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_2 + m - 1) \cdot \alpha_3 \dots (\alpha_3 + m - 1)}{\beta_1 \cdot (\beta_1 + 1) \dots (\beta_1 + m - 1) \cdot \beta_2 \cdot (\beta_2 + 1) \dots (\beta_2 + m - 1)} \cdot F \left( \begin{matrix} \alpha_1 + m, & \alpha_2 + m, & \alpha_3 + m \\ \beta_1 + m, & \beta_2 + m, & \end{matrix} \middle| x \right). \tag{21}$$

Отсюда при различных значениях  $m$  можно получить производные 1-го, 2-го и т. других порядков.

Так, из (21) при  $m = 1$  получим производную первого порядка

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3}{\beta_1 \cdot \beta_2} \cdot F \left( \begin{matrix} \alpha_1 + 1, & \alpha_2 + 1, & \alpha_3 + 1 \\ \beta_1 + 1, & \beta_2 + 1, & \end{matrix} \middle| x \right). \tag{22}$$

Таким образом, можно найти производные второго и третьего решения

$$y_2(x) = x^{1-\beta_1} \cdot F \left( \begin{matrix} \alpha_1 + 1 - \beta_1, & \alpha_2 + 1 - \beta_1, & \alpha_3 + 1 - \beta_1 \\ 2 - \beta_1, & \beta_2 + 1 - \beta_1, & \end{matrix} \middle| x \right) \tag{23}$$

и

$$y_3(x) = x^{1-\beta_2} \cdot F \left( \begin{matrix} \alpha_1 + 1 - \beta_2, & \alpha_2 + 1 - \beta_2, & \alpha_3 + 1 - \beta_2 \\ \beta_1 + 1 - \beta_2, & 2 - \beta_2, & \end{matrix} \middle| x \right). \tag{24}$$

При этом сначала лучше найти производные от функций, потом от произведения двух функций:

$$\frac{d}{dx} F \left( \begin{matrix} \alpha_1 + 1 - \beta_1, & \alpha_2 + 1 - \beta_1, & \alpha_3 + 1 - \beta_1 \\ 2 - \beta_1, & \beta_2 + 1 - \beta_1, & \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{(\alpha_1 + 1 - \beta_1) \cdot (\alpha_2 + 1 - \beta_1) \cdot (\alpha_3 + 1 - \beta_1)}{(2 - \beta_1) \cdot (\beta_2 + 1 - \beta_1)} \cdot F \left( \begin{matrix} \alpha_1 + 2 - \beta_1, & \alpha_2 + 2 - \beta_1, & \alpha_3 + 2 - \beta_1 \\ 3 - \beta_1, & \beta_2 + 2 - \beta_1, & \end{matrix} \middle| x \right), \tag{25}$$

$$\frac{d}{dx} F \left( \begin{matrix} \alpha_1 + 1 - \beta_2, & \alpha_2 + 1 - \beta_2, & \alpha_3 + 1 - \beta_2, \\ \beta_1 + 1 - \beta_2, & 2 - \beta_2, & \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{(\alpha_1 + 1 - \beta_2) \cdot (\alpha_2 + 1 - \beta_2) \cdot (\alpha_3 + 1 - \beta_2)}{(\beta_1 + 1 - \beta_2) \cdot (2 - \beta_2)} \cdot F \left( \begin{matrix} \alpha_1 + 2 - \beta_2, & \alpha_2 + 2 - \beta_2, & \alpha_3 + 2 - \beta_2, \\ \beta_1 + 2 - \beta_2, & 3 - \beta_2, & \end{matrix} \middle| x \right). \quad (26)$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ x^{1-\beta_1} \cdot F \left( \begin{matrix} \alpha_1 + 1 - \beta_1, & \alpha_2 + 1 - \beta_1, & \alpha_3 + 1 - \beta_1, \\ 2 - \beta_1, & \beta_2 + 1 - \beta_1, & \end{matrix} \middle| x \right) \right],$$

$$\frac{dy_3(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ x^{1-\beta_2} \cdot F \left( \begin{matrix} \alpha_1 + 1 - \beta_2, & \alpha_2 + 1 - \beta_2, & \alpha_3 + 1 - \beta_2, \\ \beta_1 + 1 - \beta_2, & 2 - \beta_2, & \end{matrix} \middle| x \right) \right].$$

*Свойство.* Следуя [1], если в (11) вводить обозначения  $(\alpha_1, m)(\alpha'_1, n), (\alpha_2, m)(\alpha'_2, n), (\alpha'_3, m)(\alpha'_3, n), (\beta_1, m)(\beta'_1, n), (\beta_2, m)(\beta'_2, n)$  через  $(\alpha_1, m+n), (\alpha_2, m+n), (\alpha_3, m+n), (\beta_1, m+n), (\beta_2, m+n)$ , то получим представление  $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; x+y)$ .

Это свойство приводит нас к теореме сложения двух функций Клаузена.

**Теорема 5.** Произведения обобщенных гипергеометрических функций Клаузена двух переменных (22)-(26) имеет:

- производные первого порядка по независимой переменной  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, \\ \beta_1, & \beta_2, \end{matrix} \middle| x \right) \cdot {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3, \\ \beta'_1, & \beta'_2, \end{matrix} \middle| y \right) \right] =$$

$$= \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3}{\beta_1 \cdot \beta_2} \cdot {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \alpha_1 + 1, & \alpha_2 + 1, & \alpha_3 + 1, \\ \beta_1 + 1, & \beta_2 + 1, \end{matrix} \middle| x \right) \cdot {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3, \\ \beta'_1, & \beta'_2, \end{matrix} \middle| y \right). \quad (27)$$

Далее можно определить производные двух функций относительно независимой переменной  $y$  как (27), тогда:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, \\ \beta_1, & \beta_2, \end{matrix} \middle| x \right) \cdot {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3, \\ \beta'_1, & \beta'_2, \end{matrix} \middle| y \right) \right] =$$

$$= \frac{\alpha'_1 \cdot \alpha'_2 \cdot \alpha'_3}{\beta'_1 \cdot \beta'_2} \cdot {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, \\ \beta_1, & \beta_2, \end{matrix} \middle| x \right) \cdot {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \alpha'_1 + 1, & \alpha'_2 + 1, & \alpha'_3 + 1, \\ \beta'_1 + 1, & \beta'_2 + 1, \end{matrix} \middle| y \right).$$

Показатели рядов (11)–(19) определяются из системы, определяющих уравнения относительно особенности  $(0,0)$ :

$$\left. \begin{aligned} f_{0,0}^{(1)}(\rho, \sigma) &= \rho \cdot (\rho - 1 + \beta_1) \cdot (\rho - 1 + \beta_2) = 0, \\ f_{0,0}^{(2)}(\rho, \sigma) &= \sigma \cdot (\sigma - 1 + \beta'_1) \cdot (\sigma - 1 + \beta'_2) = 0, \end{aligned} \right\}$$

в виде пар:  $(\rho_1, \sigma_1) = (0, 0), (\rho_1 = 0, \sigma_2 = 1 - \beta_1), (\rho_1 = 0, \sigma_2 = 1 - \beta_2), (\rho_2 = 1 - \beta_1, \sigma_1 = 0)$   
 $(\rho_2 = 1 - \beta_1, \sigma_2 = 1 - \beta'_1), (\rho_2 = 1 - \beta_1, \sigma_3 = 1 - \beta'_2), (\rho_3 = 1 - \beta_2, \sigma_1 = 0), (\rho_3 = 1 - \beta_2, \sigma_2 = 1 - \beta'_1),$   
 $(\rho_3 = 1 - \beta_2, \sigma_3 = 1 - \beta'_2).$

Эти пары определили показатели рядов (11)–(19).

Переходим к изучению второй основной теоремы.

**Теорема 6.** Система гипергеометрического типа Клаузена

$$\begin{aligned} &x^2(1-x)p_{30} + xyp_{21} + [\gamma + \delta + 1 - (3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)x]xp_{20} + \delta yp_{11} + \\ &+ [\gamma\delta - (1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3)x]p_{10} - \beta_1\beta_2\beta_3p_{00} = 0, \\ &y^2(1-y)p_{03} + xyp_{12} + [\gamma + \delta' + 1 - (3 + \beta'_1 + \beta'_2 + \beta'_3)y]yp_{02} + \delta' xp_{11} + \\ &+ [\gamma\delta' - (1 + \beta'_1 + \beta'_2 + \beta'_3 + \beta'_1\beta'_2 + \beta'_1\beta'_3 + \beta'_2\beta'_3)y]p_{01} - \beta'_1\beta'_2\beta'_3p_{00} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

вблизи регулярной особенности  $(0, 0)$  имеет девять линейно-независимых частных решений вида

$$Z(x, y) = x^p \cdot y^q \cdot \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n, \quad (29)$$

где  $r, s$  и  $A_{m,n}$  ( $m, n$  – неизвестные постоянные), при выполнении условий совместности

$$\frac{P(m, n + 1) \cdot Q(m, n)}{R(m, n + 1) \cdot S(m, n)} = \frac{P(m, n) \cdot Q(m + 1, n)}{R(m, n) \cdot S(m + 1, n)} \quad (30)$$

для коэффициентов  $A_{m,n}$  ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ) ряда (5) и условий интегрируемости [4]:

$$\Delta_1 = 1 - a_{12}b_{21} = 1 \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \Delta_1^2 - (a_{21} + a_{12}b_{12})(b_{12} + b_{21}a_{21}) = 1^2 - \left[ \frac{y}{x(1-x)} \cdot \frac{x}{y(1-y)} \right] = 1 - \frac{1}{(1-x)(1-y)} \neq 0. \quad (31)$$

При этом одним из частных решений (29) является обобщенный гипергеометрический ряд двух переменных

$$F_1 = F_1 \left( \begin{matrix} \beta_1, \beta'_1, & \beta_2, \beta'_2, & \beta_3, \beta'_3, \\ \gamma, & \delta, \delta', & \end{matrix} \middle| x, y \right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\beta_1)_m (\beta'_1)_n \cdot (\beta_2)_m (\beta'_2)_n \cdot (\beta_3)_m (\beta'_3)_n}{(\gamma)_{m+n} \cdot (\delta)_m \cdot (\delta')_n} \cdot \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^n}{n!}. \quad (32)$$

Между свойствами двух систем типа Клаузена проведен сравнительный анализ и выделены их основные свойства.

Следует отметить, что девять линейно-независимых частных решений система Клаузена имеет только тогда, когда выполняются условия совместности (30) и ин-



тегрируемости (31). В связи с трудностями построения различных решений обычно ограничиваются построением решений в виде функций Клаузена (32). Остановимся на отдельных свойствах функции Клаузена.

*Свойство дифференцируемости*

**Теорема 7.** Обобщенная гипергеометрическая функция Клаузена двух переменных (32) имеет:

- производные первого порядка по независимым переменным  $x$  и  $y$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3}{\gamma \cdot \delta} \cdot F \left( \begin{matrix} \beta_1 + 1, \beta_2 + 1, \beta_3 + 1; \\ \delta + 1, \delta', \gamma + 1; \end{matrix} \beta_1', \beta_2', \beta_3' \middle| x, y \right), \quad (33)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\beta_1' \cdot \beta_2' \cdot \beta_3'}{\gamma \cdot \delta'} \cdot F \left( \begin{matrix} \beta_1, \beta_2, \beta_3; \\ \delta, \delta' + 1, \gamma + 1; \end{matrix} \beta_1' + 1, \beta_2' + 1, \beta_3' + 1 \middle| x, y \right), \quad (34)$$

- производные высших порядков

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \cdot \beta_1' \cdot \beta_2' \cdot \beta_3'}{\gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot \delta \cdot \delta'} \cdot F \left( \begin{matrix} \beta_1 + 1, \beta_2 + 1, \beta_3 + 1; \\ \delta + 1, \delta' + 1, \gamma + 2; \end{matrix} \beta_1' + 1, \beta_2' + 1, \beta_3' + 1 \middle| x, y \right), \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\beta_1(\beta_1 + 1) \cdot \beta_2(\beta_2 + 1) \cdot \beta_3(\beta_3 + 1)}{\gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot \delta \cdot (\delta + 1)} \cdot F \left( \begin{matrix} \beta_1 + 2, \beta_2 + 2, \beta_3 + 2; \\ \delta + 2, \delta', \gamma + 2; \end{matrix} \beta_1', \beta_2', \beta_3' \middle| x, y \right), \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\beta_1'(\beta_1' + 1) \cdot \beta_2'(\beta_2' + 1) \cdot \beta_3'(\beta_3' + 1)}{\gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot \delta' \cdot (\delta' + 1)} \cdot F \left( \begin{matrix} \beta_1, \beta_2, \beta_3; \\ \delta, \delta' + 2, \gamma + 2; \end{matrix} \beta_1' + 2, \beta_2' + 2, \beta_3' + 2 \middle| x, y \right) \quad (37)$$

$$\frac{\partial^m F}{\partial x^m} = \frac{\beta_1(\beta_1 + 1) \dots (\beta_1 + m - 1) \cdot \beta_2(\beta_2 + 1) \dots (\beta_2 + m - 1) \cdot \beta_3(\beta_3 + 1) \dots (\beta_3 + m - 1)}{\gamma \cdot (\gamma + 1) \dots (\gamma + m - 1) \cdot \delta \cdot (\delta + 1) \dots (\delta + m - 1)} \cdot F \left( \begin{matrix} \beta_1 + m, \beta_2 + m, \beta_3 + m; \\ \delta + m, \delta', \gamma + m; \end{matrix} \beta_1', \beta_2', \beta_3' \middle| x, y \right), \quad (38)$$

$$\frac{\partial^n F}{\partial y^n} = \frac{\beta_1'(\beta_1' + 1) \dots (\beta_1' + n - 1) \cdot \beta_2'(\beta_2' + 1) \dots (\beta_2' + n - 1) \cdot \beta_3'(\beta_3' + 1) \dots (\beta_3' + n - 1)}{\gamma \cdot (\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1) \cdot \delta' \cdot (\delta' + 1) \dots (\delta' + n - 1)} \cdot F \left( \begin{matrix} \beta_1, \beta_2, \beta_3; \\ \delta, \delta' + n, \gamma + n; \end{matrix} \beta_1' + n, \beta_2' + n, \beta_3' + n \middle| x, y \right), \quad (39)$$

$$\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\beta_1(\beta_1 + 1) \dots (\beta_1 + m - 1) \cdot \dots \cdot \beta_3'(\beta_3' + 1) \dots (\beta_3' + n - 1)}{\gamma \cdot (\gamma + 1) \dots (\gamma + m + n - 1) \cdot \delta \cdot (\delta + 1) \dots (\delta + m - 1) \cdot \delta' \cdot (\delta' + 1) \dots (\delta' + n - 1)} \cdot F \left( \begin{matrix} \beta_1 + m, \beta_2 + m, \beta_3 + m; \\ \delta + m, \delta' + n, \gamma + m + n; \end{matrix} \beta_1' + n, \beta_2' + n, \beta_3' + n \middle| x, y \right). \quad (40)$$

Все формулы (33) – (39) можно выводить из общей формулы (40).

*Вывод частных случаев функций Клаузена:*

- если один из параметров  $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 = 0$ , то получится ряд относительно переменной  $y$ .

- если один из параметров  $\beta'_1 \cdot \beta'_2 \cdot \beta'_3 = 0$ , то получим ряд относительно переменной  $x$ .

- $F\left(\begin{matrix} \beta_1, \beta_2, \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \delta, & \delta', & \gamma; & \end{matrix} \middle| x\right); F\left(\begin{matrix} ;;; & \beta'_1, & \beta'_2, & \beta'_3 \\ \delta, & \delta', & \gamma; & \end{matrix} \middle| y\right)$  – ряд одной переменной относительно .

носительно .

- $F\left(\begin{matrix} \beta_1, \beta_2, \beta_3 & \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 \\ \delta, & \delta', & \gamma; & \end{matrix} \middle| 0, y\right), F\left(\begin{matrix} \beta_1, \beta_2, \beta_3 & \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 \\ \delta, & \delta', & \gamma; & \end{matrix} \middle| x, 0\right)$  – ряды относи-

тельно  $x$  и  $y$ .

- если некоторые из параметров  $\beta_j$  и  $\beta'_j$  принимают отрицательные значения, то функции Клаузена превращаются в многочлены. Так, при 1).  $\beta_1 = -1, \beta'_1 = -1$ ; или 2).  $\beta_2 = -1, \beta'_2 = -1$ ; или 3).  $\beta_3 = -1, \beta'_3 = -1$  ряд Клаузена превращается в многочлен двух переменных вида

$$F\left(\begin{matrix} -1, \beta_2, \beta_3 & -1, & \beta'_2, & \beta'_3 \\ \delta, & \delta', & \gamma; & \end{matrix} \middle| x, y\right) = 1 - \frac{\beta_2 \beta_3}{\gamma \delta} \cdot x \mp \frac{\beta_2 \beta'_3}{\gamma \delta'} \cdot y + \frac{\beta_2 \beta_3 \beta'_2 \beta'_3}{\gamma(\gamma+1)\delta \delta'} \cdot xy,$$

а также возможны и другие комбинации параметров.

- Обе системы (10) и (28) имеют регулярные особенности  $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,\infty), (\infty,0), (1,\infty), (\infty,1)$  и  $(\infty,\infty)$ , поэтому система не имеет нормальные и нормально-регулярные решения, поскольку в этом случае многочлен  $Q(x, y) \equiv 0$ , и существуют решения только в виде обобщенных степенных рядов двух переменных.

Однако решения систем (10) и (28) отличаются, хотя есть сходство в решениях систем, определяющих уравнения относительно особенности  $(0,0)$ :

$$(\rho_1 = 0, \sigma_1 = 0), (\rho_1 = 0, \sigma_2 = 1 - \delta'_1), (\rho_1 = 0, \sigma_3 = 1 - \delta'_2),$$

$$(\rho_2 = 1 - \delta_1, \sigma_1 = 0), (\rho_2 = 1 - \delta_1, \sigma_2 = 1 - \delta'_1),$$

$$(\rho_2 = 1 - \delta_1, \sigma_3 = 1 - \delta'_2), (\rho_3 = 1 - \delta_2, \sigma_1 = 0), (\rho_3 = 1 - \delta_2, \sigma_2 = 1 - \delta'_1),$$

$$(\rho_3 = 1 - \delta_2, \sigma_3 = 1 - \delta'_2).$$

- Появляются сложности при определении всей фундаментальной системы решений системы Клаузена (28), связанные со сложностью формы задания коэффициентов.

- Общее решение системы (28) также представляется в виде (20).

• Для системы (10) не требуется выполнения условия интегрируемости (31). Она всегда также совместная.

• С помощью предельного перехода из уравнения Клаузена (4) можно получить вырожденное обобщенное уравнение Клаузена, а также вырожденную обобщенную систему Клаузена.

В работе показано применение этой системы к решению построения решения уравнения [5]

$$x^n \cdot y^m \cdot u_t = t^k \cdot y^m \cdot U_{xxx} + t^k \cdot x^m \cdot U_{yyy}, m, n, k = const > 0 .$$

Полученная после деления переменных система

$$\begin{aligned} x^2 \cdot W_{xxx} + (C_2 + C_1 + 1)xW_{xx} + (C_1 \cdot C_2 - x)W_x - y \cdot W_y - aW &= 0, \\ y^2 \cdot W_{yyy} + (d_2 + d_1 + 1)yW_{yy} + (d_1 \cdot d_2 - y)W_y - x \cdot W_x - aW &= 0 \end{aligned}$$

также имеет девять линейно-независимых частных решений [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Slater L.J., Lit D., Ph. D. Generalized Hypergeometric functions//Cambridge At the university Press. 1966. 292 p.

2 Rabia Aktas, Abdullah Altin, Bayram Zekim. On a two – variable analogue of the Bessel functions // Journal of Inequalities and Special functions. ISSN: 2217-4303, URL: [http://WWW. IIRIAS. Com](http://WWW.IIIRIAS.COM), 2012. – V.3(4), p. 13-23.

3 Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Актөбе: ИП Жандилдаева, 2015. 464 с.

4 Appell P, Kampe de Feriet J. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques. Paris: Polynomes d Hermite, Gauthier-Villars,1926.

5 Hasanov Anvar, Junesang Choi. Note on Euler-Bernoulli Equation. Sohag J. Math. 2020. –V.7, No.2– p.33-36.

#### **Н. РАДЖАБОВ, Ж. Н. ТАСМАМБЕТОВ, Ж. К. УБАЕВА**

*Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қаласы*

#### **КЛАУЗЕН ТИПТІ ЖҮЙЕЛЕРДІ ШЕШУ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ**

Мақалада үшінші ретті екі дербес дифференциалдық теңдеулерден тұратын біртекті жүйенің ерекше нүкте маңайындағы шешімдерін құру ерекшеліктері зерттелді. Осы ерекше нүкте маңайындағы Клаузен функциясы туындысының бірқатар қасиеттері дәлелденді. Клаузен жүйесінің жалпы шешімін құрастыру ерекшеліктері қарастырылды. Соңғы уақытта көпөлішемді туындалған дифференциалдық теңдеулерді зерттеуге байланысты мұндай жүйелерді шешуге ерекше назар аударыла бастады.

**Түйін сөздер:** Клаузен теңдеуі, Клаузен типті жүйе, ерекше нүкте, ерекшеліктер, жүйе.

---

**N. RAJABOV, ZH. N. TASMAMBETOV, ZH. K. UBAYEVA**

*Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan*

## **FEATURES OF CONSTRUCTING A SOLUTION CLAUSEN-TYPE SYSTEMS**

*We study the features of constructing solutions near a singularity of a regular homogeneous system consisting of two partial differential equations of the third order. A number of properties of the product of Clausen functions constructed near these singularities are proved. The features of the construction of the general solution of the Clausen system are investigated. Recently, special attention has begun to be removed on the solution of such systems, in connection with the research of multidimensional degenerate differential equations.*

**Key words:** *Clausen equations; Clausen-type system, special points, features, system.*

**Б. РЫСБАЙҰЛЫ, С. Д. АЛПАР\***

*Международный университет информационных технологий,  
г. Алматы, Казахстан*

*e-mail: b.rysbaiuly@mail.ru, rapla.natlus@gmail.com*

## **НЕЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК**

*В данной работе раскрыт метод определения нелинейных теплопроводных характеристик грунта. Были созданы двухслойные комплексы контейнеров, боковые грани которых теплоизолированы, поэтому используется уравнение теплопроводности 1D. Датчик температуры помещается на стыке двух сред, и в каждой области решается смешанная краевая задача. Для того чтобы обеспечить задачу с обратным коэффициентом исходными данными, используются два датчика температуры: один датчик был размещен на открытой границе контейнера и регистрировал температуру почвы на этой границе, а второй датчик был размещен на небольшом расстоянии от границы, который регистрировал температуру воздуха. Измерения проводились в интервале времени  $(0, 4t_{max})$ . Сначала начально-краевая задача теплопроводности с нелинейными коэффициентами исследуется методом конечных разностей. Построены два типа разностных схем: линеаризованные и нелинейные. Линеаризованная разностная схема реализуется численно скалярным методом Томаса, а нелинейная разностная задача решается методом Ньютона. В качестве начального приближения метода Ньютона было взято решение линеаризованной разностной задачи. Чтобы найти теплофизические параметры, соответствующий функционал минимизируется с использованием метода градиентного спуска. Кроме того, все теплофизические характеристики (8 коэффициентов) были найдены для двухслойного контейнера с песком и черноземом.*

**Ключевые слова:** теплопроводность, нелинейность, разностная задача, сходимост, обратная задача, дифференцирование по параметру.

**Введение.** Определение параметров систем тепловой защиты и получение решения задачи теплового проектирования напрямую связаны с расчетом тепловых полей в грунте. В свою очередь, это требует знания теплофизических характеристик почвы [1]. Оптимизация и анализ тепловых и влажностных характеристик строительных компонентов является важным инженерным инструментом [2]. В настоящее время теоретические модели для определения теплофизических характеристик неоднородных композитных сред не обладают достаточной точностью. Следовательно, основным источником информации о теплофизических свойствах является проведение физического эксперимента [4]. Для теоретической основы метода нахождения теплофизических характеристик среды используется закон сохранения энергии, следствием которого является нелинейное дифференциальное уравнение теплопроводности [1,5,6,7]. Установлено, что характер влияния температуры на теплофизические параметры почвы является нелинейным [8,9,10]. В связи с этим возникает острая необходимость решения обратной задачи нелинейного уравнения теплопроводности.

---

\* E-mail корреспондирующего автора: rapla.natlus@gmail.com

Целью исследования является проведение теплофизического эксперимента и разработка методического обеспечения определения теплофизических коэффициентов на основе решения нелинейной обратной задачи теплопроводности [5,11,12,13].

Физико-математическая модель и экспериментальные значения температуры на доступной границе грунта позволяют находить теплофизические характеристики в обратных коэффициентных задачах теплопередачи [14]. В данном исследовании на основе нелинейного уравнения теплопроводности и экспериментальных данных предложен метод решения обратной нелинейной коэффициентной задачи, в основе которого лежит минимизация квадратичного функционала расхождения между численными и экспериментальными значениями температуры. Функционал минимизируется методом градиентного спуска, а для определения коэффициента демпфирования используется метод самого крутого спуска.

### Математическая модель.

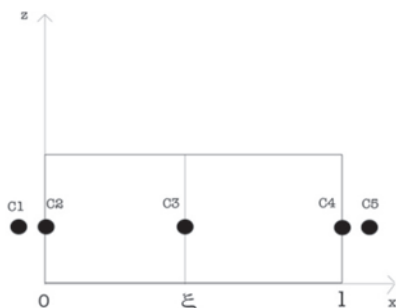


Рисунок 1 – Двухслойный контейнер.

Постановка задачи. На рис. 1 показан двухслойный контейнер, боковые поверхности которого теплоизолированы, а торцевые поверхности находятся в контакте с окружающей средой (воздухом). Принимая во внимание эти ограничения, вместо трехмерного уравнения теплопроводности можно рассмотреть одномерное нестационарное уравнение.

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in (0, \xi) \times (\xi, l), \quad t \in (0, 4t_{\max}) \quad (1)$$

где  $u(x, t)$  – распределение температуры внутри контейнера,  $x$  – координата комплекса по оси  $Ox$ ,  $t$  – текущее время. В начальный момент наблюдения температура обоих слоев тела равна:  $t = 0$ ,  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $x \in (0, l)$ . Температура окружающей среды на левой границе области при  $x = 0$  обозначается через  $u_{ins}(t)$ , а на правой границе при  $x = l$  обозначается через  $u_{out}(t)$ .

Граничные условия, определяющие особенности процесса на поверхности стенки, задаются следующим образом: левая и правая границы области  $\Omega = (0, \xi) \times (\xi, l)$  находятся в контакте с газовой средой (воздухом), следовательно, на этих границах ею целесообразно сформулировать граничное условие Робина – зависимость между тепловым потоком, обусловленным теплопроводностью от твердой стенки, и



тепловым потоком от газовой среды. Таким образом, граничные условия на левой и правой границах записываются следующим образом:

$$x = 0 : k_1(u) \frac{\partial u}{\partial x} = h_{ins}(u)(u - u_{ins}(t)), \quad (2)$$

$$x = l : k_2(u) \frac{\partial u}{\partial x} = -h_{out}(u)(u - u_{out}(t)), \quad (3)$$

где  $u_{ins}(t)$ ,  $u_{out}(t)$  – температура окружающей среды;  $h_{ins}(u)$ ,  $h_{out}(u)$  – коэффициенты теплоотдачи;  $k_1(u)$ ,  $k_2(u)$  – коэффициенты теплопроводности «1» и «2» среды.

Обычно на контактной поверхности слоев  $x = \xi$  задается граничное условие, определяющее равенство температур и тепловых потоков на стыке материалов:

$$\begin{aligned} u_1(\xi, t) &= u_2(\xi, t), \\ k_1(u) \frac{\partial u_1}{\partial x}(\xi, t) &= k_2(u) \frac{\partial u_2}{\partial x}(\xi, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  – температуры контактирующих слоев материала. При решении задач с контактными условиями вида (4) скорость сходимости однородной разностной схемы становится очень низкой. Поэтому, чтобы избежать этой проблемы, а также для решения обратной задачи, в точке  $x = \xi$  мы разместили отдельный датчик, который измеряет изменение температуры почвы в точке соприкосновения двух сред. За счет этого исходная задача разбивается на две задачи, т.е. с использованием измеренных данных в каждом контейнере решается своя обратная задача нелинейной теплопроводности. В следующем алгоритме есть описание обратной задачи только для левого контейнера, показанного на рисунке 1.

В дополнение к  $u_{ins}(t)$ ,  $u_{out}(t)$  измеряются начальные значения температуры

$$T_{ins}(t), T_{\xi}(t), T_{out}(t), \quad t \in (0, 4t_{max}), \quad (5)$$

где  $T_{ins}$ ,  $T_{\xi}$ ,  $T_{out}$  – измеренная температура материалов в точках  $x = 0$ ,  $x = \xi$  и  $x = l$ . Для удобства введем обозначение  $h_{ins}(u) = h_1(u)$ .

Задача. Используя измеренные значения  $u_{ins}(t)$ ,  $T_{ins}(t)$ ,  $T_{\xi}(t)$ ,  $t \in (0, 4t_{max})$ , необходимо разработать метод для нахождения параметров среды  $\rho_1(u)$ ,  $c_1(u)$ ,  $k_1(u)$ ,  $h_1(u)$ .

На основе (1) – (5) обратная задача определяется следующим образом:

В области  $Q_1 = (0, \xi) \times (0, 4t_{max})$ , исследуется следующая система

$$c_1(u)\rho_1(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (6)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (7)$$

$$k_1(u) \frac{\partial u}{\partial x} = h_1(u)(u - u_{ins}(t)), \quad x = 0, \quad (8)$$

$$u(\xi, t) = T_{\xi}(t), \quad (9)$$

где  $c(u) = c_0 + c_1u$ ,  $\rho(u) = \rho_0 + \rho_1u$ ,

$$k(u) = k_0 + k_1u + k_2u^2 + k_3u^3, \quad h(u) = h_0 + h_1u + h_2u^3,$$

измеренные значения на левой границе области:

$$T_{ins}(t), \quad t \in [0, 4t_{max}]. \tag{10}$$

**Разработка итерационных методов.** Итерационный метод определения коэффициента теплопроводности  $k_1(u)$ . В области сетки мы изучаем итерационный метод разностной схемы для нахождения коэффициента теплопроводности. В области сетки изучается разностная схема  $L_{11}$ .

Схема  $L_{11}$ :

$$\rho_1(u_i^{j+1}) \cdot c_1(u_i^{j+1}) \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \left( k_1 \left( u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} \right) \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{\Delta x} - k_1 \left( u_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} \right) \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, I-1; \quad j = 1, 1, \dots, m-1;$$

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, I; \tag{11}$$

$$u_I^{j+1} = T_\xi(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, m-1;$$

$$k(u_{1/2}^{j+1}) \frac{u_1^{j+1} - u_0^{j+1}}{\Delta x} = h_1(u_0^{j+1})(u_0^{j+1} - u_{ins}^{j+1});$$

где

$$u_{i+1/2} = \frac{u_{i+1}^{j+1} + u_i^{j+1}}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, I-1.$$

Затем, применяя метод Ньютона для системы (11) и приводя к трехдиагональной системе, для решения задачи используется скалярный метод Томаса.

Итерационные методы для требуемых величин.

В области  $(0, \xi) \times (0, t_{max})$  решена дискретная задача (11). Предполагается, что коэффициент  $k_1(u)$  представлен в виде

$$k_1(u) = k_{10} + k_{11}u + k_{12}u^2 + k_{13}u^3$$

Предполагая, что решение задачи непрерывно зависит от  $k_1(u)$  и имеет производную по  $k_1(u)$ , мы дифференцируем систему по параметру

$$k_{1s}(u), s = 0, 1, 2, 3$$

Введем следующее обозначение

$$\frac{\partial u_i^{j+1}}{\partial k_{1s}} = y_i^{j+1}(s), \quad i = 0, 1, \dots, I; \quad j = 0, 1, \dots, m-1; \quad s = 0, 1, 2, 3$$

затем

$$\frac{\partial \rho_1(u_i^{j+1})}{\partial k_{1s}} = \rho_1'(u_i^{j+1}) y_i^{j+1}(s), \quad s = 0, 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial c_1(u_i^{j+1})}{\partial k_{1s}} = c_1'(u_i^{j+1}) y_i^{j+1}(s), \quad s = 0, 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial k_1(u_i^{j+1})}{\partial k_{1s}} = (u_i^{j+1})^s + k_1'(u_i^{j+1}) y_i^{j+1}(s), \quad s = 0, 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial h_1(u_0^{j+1})}{\partial k_{1s}} = h_1'(u_0^{j+1}) y_0^{j+1}(s), \quad s = 0, 1, 2, 3$$

После дифференцирования системы (11) относительно  $k_{1s}$ ,  $s = 0, 1, 2, 3$  в зависимости от  $s$  возникают различные проблемы. Эти задачи могут быть записаны в унифицированной форме следующим образом:

$$[c_1'(u_i^{j+1}) \rho_1(u_i^{j+1}) + \rho_1'(u_i^{j+1}) c_1(u_i^{j+1})] y_i^{j+1}(s) u_{i,\bar{x}}^{j+1} + c_1(u_i^{j+1}) \rho_1(u_i^{j+1}) y_{i,\bar{x}}^{j+1}(s) =$$

$$= \left[ k_1 \left( u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} \right) y_{i,\bar{x}}^{j+1}(s) \right]_{\bar{x}} + \left[ \left( \left( u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} \right)^s + k_1' \left( u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} \right) \frac{u_{i+1}^{j+1}(s) + y_i^{j+1}(s)}{2} \right) u_{i,\bar{x}}^{j+1} \right]_{\bar{x}}$$

$$i = 1, 2, \dots, I - 1; \quad j = 0, 1, \dots, m - 1;$$

$$y_i^0 = 0, 1 = 0, 1, \dots, I; \quad y_I^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m - 1;$$

$$k_1 \left( u_{\frac{1}{2}}^{j+1} \right) y_{1,x}^{j+1}(s) + \left( \left( u_{\frac{1}{2}}^{j+1} \right)^s + k_1' \left( u_{\frac{1}{2}}^{j+1} \right) \frac{y_1^{j+1}(s) + y_0^{j+1}(s)}{2} \right) u_{1,\bar{x}}^{j+1}$$

$$= h_1'(u_0^{j+1}) (u_0^{j+1} - u_{ins}^{j+1}) + h_1(u_0^{j+1}) y_0^{j+1}(s), \quad j = 0, 1, \dots, m - 1$$

В задаче 2 параметр  $s$  принимает значения 0, 1, 2, 3.

Значения коэффициентов  $k_{1s}$ ,  $s = 0, 1, 2, 3$  коэффициента теплопроводности грунта  $k_1(u)$  будут найдены из условия минимума функционала

$$J(k_1(u)) = \sum_{j=0}^{m-1} (u_0^{j+1}(k_1) - T_0^{j+1})^2 \Delta t$$

Прямое дифференцирование последнего равенства относительно  $k_{1s}$ ,  $s = 0, 1, 2, 3$  дает нам градиент построенного функционала, записанный в виде

$$\nabla J(k_{1s}) = 2 \sum_{j=0}^{m-1} (u_0^{j+1}(k_1) - T_0^{j+1}) y_0^{j+1}(s) \Delta t, \quad s = 0, 1, 2, 3 \tag{12}$$

Это значит

$$J(k_1(u)) = \sum_{s=0}^3 J(k_{1s})$$

Зная явное выражение для градиента функционала, параметры функций  $k_1(u)$  определяются следующим образом

$$k_{1s}(n+1) = k_{1s}(n) + \mu_1(s) \nabla J(k_{1s}(n)), s = 0, 1, 2, 3$$

Аналогично найдены формулы для остальных теплофизических коэффициентов.

Комментарий. Везде предполагается, что параметры  $\rho_1(u)$ ,  $c_1(u)$ ,  $k_1(u)$  и  $h_1(u)$  зависят от  $u$  в виде полинома. Однако рассмотренный метод применим в другой форме зависимости от  $u$ .

**Эксперимент.** Экспериментальная работа была проведена в Международном университете информационных технологий (ИТУ) в рамках исследовательского проекта. В ходе эксперимента были получены данные по одномерному теплообмену для различных почв и грунтов. Лаборатория находится в Алматы, Казахстан. Стенки контейнеров состоят из 2 см теплоизоляционного материала, а торцевые стороны соприкасаются с окружающей средой (воздухом). В каждом отсеке контейнера длиной 15 см находятся различные почвенные материалы. Один торец нагревается лампами. На вторую внешнюю сторону влияет климат окружающей среды.

3 датчика (C2, C3, C4) равномерно распределены внутри материала, как показано на рисунке 1. Они измеряют температуру с погрешностью 0,3 градуса Цельсия в соответствии с техническим паспортом датчика. В дополнение к этим датчикам, рядом с торцами расположены еще 2 датчика (C1, C5) для измерения температуры окружающей среды. Ошибки в данных датчиков такие же, как и для предыдущих датчиков. Измерения данных о температуре производятся с интервалом в 10 минут.

Для расчетов рассматривался двухкамерный контейнер с двумя материалами: песком и черноземом. Данные измерялись в течение трех месяцев, и физическая длина всего контейнера определялась с интервалами  $x \in (0, l)$ , где  $l = 30$  см. Граница двух сред находится на расстоянии  $x = 15$  см аналогично датчику измерения температуры. Измерения в точках  $x = 0$  и  $x = 30$  см, определите температуру на конечных границах.

**Результаты.** Измеренные данные о температуре (рис. 2) были использованы для решения численной задачи по нахождению всех теплофизических коэффициентов (теплопроводность, удельная теплоемкость, удельная плотность и коэффициент теплопередачи). Благодаря методу наискорейшего спуска, функционалы достигают своего минимума за 6 и 7 итераций. Минимизация функционала продолжалась до тех пор, пока относительная погрешность между нелинейным решением и экспериментальными данными не достигла  $\sim 4,3\%$  для чернозема и  $\sim 3,12\%$  для песка. Графики (рис. 3 и рис. 4) показывают, что с повышением температуры значения теплофизических параметров увеличиваются. В этом случае можно оценить поведение коэффициентов теплопроводности и теплоемкости. Графики показывают высокую зависимость от температуры, что, в свою очередь, подтверждается теоретической базой.

На рис. 5 и рис. 6 показаны значения теплофизических коэффициентов вдоль контейнера. На графиках четко видны скачки-разрывы значений теплофизических коэффициентов на границе контакта двух сред, за исключением коэффициента объемной теплоемкости. Следовательно, объемная теплоемкость показывает непрерывный характер значений.

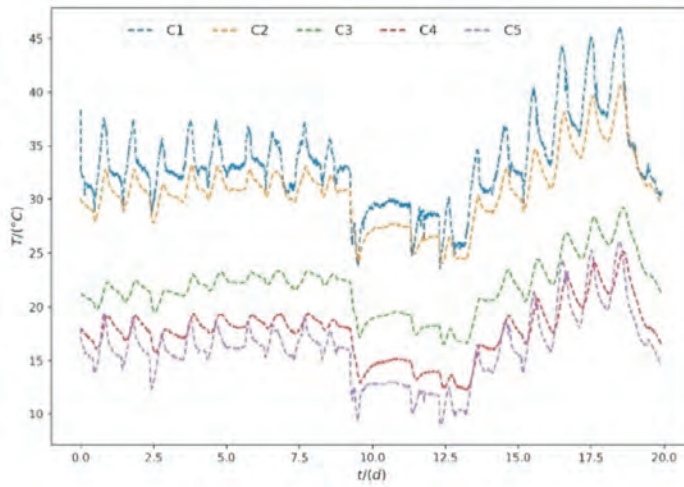


Рисунок 2 – Экспериментальные данные.

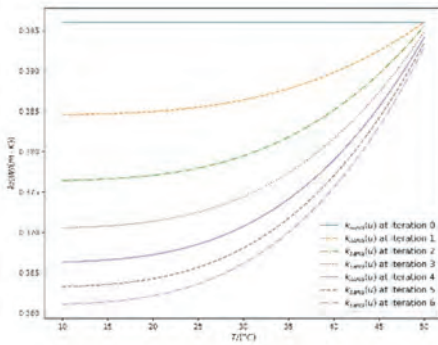


Рисунок 3 – График функции коэффициента теплопроводности песка в зависимости от температуры на каждой итерации.

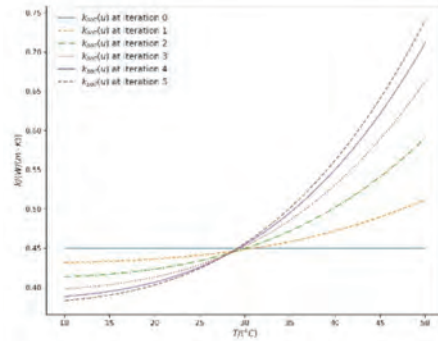


Рисунок 4 – График зависимости коэффициента теплопроводности чернозема от температуры на каждой итерации.

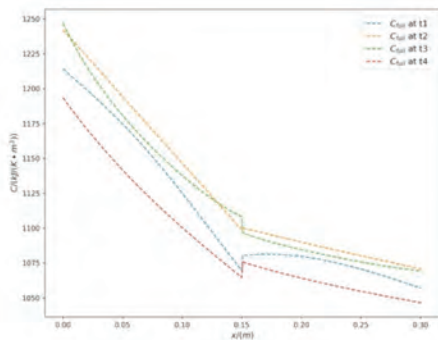


Рисунок 5 – График объемной теплоемкости двухслойного контейнера.

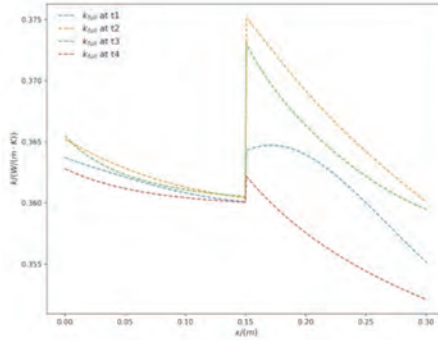


Рисунок 6 – График коэффициента теплопроводности вдоль двухслойного контейнера.

**Заключение.** В контексте прогнозирования и нахождения всех теплофизических коэффициентов (теплопроводности, теплоемкости, плотности и теплопередачи) предлагается эффективный численный метод, в отличие от ранее предложенных методов в литературе. Такой подход позволяет одновременно находить все теплофизические коэффициенты в двух средах с контактной границей. Отмечается, что предлагаемое решение нелинейного уравнения теплопроводности имеет коэффициент теплопроводности в виде кубической функции, а коэффициенты теплоемкости, плотности и теплопередачи – в виде линейных функций.

В заключение следует отметить, что исследования в области коэффициентных обратных задач для нелинейных уравнений следует продвигать с помощью подробных экспериментальных измерений, включая, например, влажность, замерзание, пористость и т.д.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант No AP08855955).

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Luikov A. V 1964. Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies
- 2 Desta T. Z, Langmans J and Roels S 2011 Experimental data set for validation of heat, air and moisture transport models of building envelopes. Building and Environment
- 3 Thi-ThaoNgo, Jin-HuangHuang and Chi-ChangWang 2016 Inverse simulation and experimental verification of temperature-dependent thermophysical properties. International Communications in Heat and Mass Transfer
- 4 Tien-Mo Shih, Chao-Ho Sung and Bao Yang 2008. A Numerical Method for Solving Nonlinear Heat Transfer Equations. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology
- 5 Travis J, Moore M, Jones R 2015 Solving nonlinear heat transfer problems using variation of parameters, International Journal of Thermal Sciences
- 6 Battaglia J-L, Maachou A, Malti R and Melchior P 2013 Nonlinear heat diffusion simulation using Volterra series expansion, International Journal of Thermal Sciences
- 7 Nguyen Huy Tuana and Pham Hoang Quanc 2011 Some extended results on a nonlinear ill-posed heat equation and remarks on a general case of nonlinear terms Nonlinear Analysis: Real World Applications
- 8 Huntul M and Lesnic D 2020 Determination of the time-dependent convection coefficient in two-dimensional free boundary problems, Engineering Computations
- 9 Jumabekova A, Berger J, Dutykh D and Le Meur H 2019 An efficient numerical model for liquid water uptake in porous material and its parameter estimation, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications
- 10 Berger J, Dutykh D, Mendes N, Rysbaiuly B 2019 A new model for simulating heat, air and moisture transport in porous building materials, International Journal of Heat and Mass Transfer.
- 11 Hasanov A 2020, Simultaneously identifying the thermal conductivity and radiative coefficient in heat equation from Dirichlet and Neumann boundary measured outputs, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems
- 12 Lesnic D, Sabah Hussein M, Kamynin V.B and Kostin A 2020 Direct and inverse source problems for degenerate parabolic equations, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems
- 13 Kabanikhin S.I and Shishlenin M. A 2019 Theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problems, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems.



14 Jumabekova A, Berger J, Fouquier A, Dulikravich G.S 2020 Searching an optimal experiment observation sequence to estimate the thermal properties of a multilayer wall under real climate conditions International Journal of Heat and Mass Transfer

**Б. РЫСБАЙҰЛЫ, С. Д. АЛПАР**

*Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті,  
Алматы қаласы  
e-mail b.rysbaiuly@mail.ru, rapla.natlus@gmail.com*

**ТЕРМОФИЗИКАЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРДЫ ТАБУҒА  
СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС КЕРІ МӘСЕЛЕ**

Бұл жұмыста топырақтың сызықты емес жылу өткізгіштік сипаттамаларын анықтау әдісі әзірленген. Екі қабатты контейнерлік кешендер құрылды, олардың бүйір беттері жылу оқишауланған, сондықтан 1D жылу өткізгіштік теңдеуі қолданылады. Температура сенсоры екі ортаның түйіскен жеріне орналастырылады және әр аймақта аралас шекаралық есеп шешіледі. Кері коэффициент есебін бастапқы деректермен қамтамасыз ету үшін екі температура датчигі пайдаланылады: бір датчик контейнердің ашық шекарасына қойылды және осы шекарадағы топырақ температурасын тіркеді, ал екінші датчик шекарадан қысқа қашықтықта орналастырылды, ол ауа температурасын тіркеді. Өлшемдер уақыт интервалында  $(0, 4t_{max})$  жүргізілді. Біріншіден, сызықты емес коэффициенттері бар жылуөткізгіштіктің бастапқы-шекаралық есебі шекті айырмашылық әдісімен зерттеледі. Айырмашылық схемалардың екі түрі құрастырылады: сызықтық және сызықтық емес. Сызықтық айырым схемасы скалярлық Томас әдісімен сандық түрде жүзеге асырылады, ал сызықты емес айырмашылық мәселесі Ньютон әдісімен шешіледі. Ньютон әдісінің бастапқы жуықтауы ретінде сызықтық айырым есебінің шешімі қабылданды. Термофизикалық параметрлерді табу үшін градиенттік түсіру әдісі арқылы сәйкес функционалдық минимизацияланады. Сонымен қатар, құм және қара топырақ қосылған екі қабатты ыдыс үшін барлық термофизикалық сипаттамалар (8 коэффициент) табылды.

**Түйін сөздер:** жылуөткізгіштік, сызықтық емес, айырмашылық есебі, жинақтылық, кері есеп, параметрге қатысты дифференциалдау.

**B. RYSBAIULY, S. D. ALPAR**

*International Information Technology University  
Almaty, Kazakhstan  
e-mail b.rysbaiuly@mail.ru, rapla.natlus@gmail.com*

**NONLINEAR INVERSE PROBLEM OF FINDING  
THERMOPHYSICAL CHARACTERISTICS**

*In this paper, a method has been developed for determining the nonlinear heat-conducting characteristics of the soil. Two-layer container complexes were created, the side faces of which are thermally insulated, so the 1D thermal conductivity equation is used. The temperature sensor is placed at the junction of two media, and a mixed boundary value problem is solved in each region. In order to provide the*

*inverse coefficient problem with initial data, two temperature sensors are used: one sensor was placed at the open boundary of the container and recorded the soil temperature at this boundary, and the second sensor was placed a short distance from the boundary, which recorded the air temperature. The measurements were carried out in the time interval  $(0, 4t_{max})$ . First, the initial-boundary problem of heat conduction with nonlinear coefficients is studied by the finite difference method. Two types of difference schemes are constructed: linearized and nonlinear. The linearized difference scheme is implemented numerically by the scalar Thomas method, and the nonlinear difference problem is solved by the Newton method. The solution of a linearized difference problem was taken as the initial approximation of Newton's method. To find the thermophysical parameters, the corresponding functional is minimized using the gradient descent method. In addition, all thermophysical characteristics (8 coefficients) were found for a two-layer container with sand and chernozem.*

**Key words:** *thermal conductivity, nonlinearity, difference problem, convergence, inverse problem, differentiation with respect to a parameter.*

**N. M. TEMIRBEKOV<sup>1\*</sup>, S. I. KABANIKHIN<sup>2</sup>, L. N. TEMIRBEKOVA<sup>3</sup>,  
ZH. E. DEMEUBAYEVA<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>National engineering academy Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan,  
e-mail: temirbekov@rambler.ru

<sup>2</sup>Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, RF  
e-mail: ksi52@mail.ru

<sup>3</sup>Abay Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan  
e-mail: laura-nurlan@mail.ru

<sup>4</sup>D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan  
e-mail: demeubayevazhanar@gmail.com

## GELFAND-LEVITAN INTEGRAL EQUATION FOR SOLVING COEFFICIENT INVERSE PROBLEM

*In this paper, numerical methods for solving multidimensional equations of hyperbolic type by the Gelfand-Levitan method are proposed and implemented. The Gelfand-Levitan method is one of the most widely used in the theory of inverse problems and consists in reducing a nonlinear inverse problem to a one-parameter family of linear Fredholm integral equations of the first and second kind. In the class of generalized functions, the initial-boundary value problem for a multidimensional hyperbolic equation is reduced to the Goursat problem. Discretization and numerical implementation of the direct Goursat problem are obtained to obtain additional information for solving a multidimensional inverse problem of hyperbolic type. For the numerical solution, a sequence of Goursat problems is used for each given  $y$ . A comparative analysis of numerical experiments of the two-dimensional Gelfand-Levitan equation is performed. Numerical experiments are presented in the form of tables and figures for various continuous functions  $q(x, y)$ .*

**Key words:** inverse problem, direct problem, hyperbolic type, Gelfand-Levitan equation, Goursat problem, Numerical solution.

**Introduction.** The Gelfand-Levitan method is one of the most widely used in the theory of inverse problems and consists in reducing a nonlinear inverse problem to a one-parameter family of linear Fredholm integral equations of the first and second kind. Let us briefly describe the achievements of scientific research in this area.

In work, Gelfand I.M. and Levitan B.M. [1] proposed a method for reconstructing the Sturm-Liouville operator from a spectrum function and provided sufficient conditions for a given monotone function to be a spectral function of the operator. Krein M.G. [2] considered the physical formulation of the string tension problem and theorems on the solution of the inverse boundary value problem. Blagoveshchensky A.S. [3] provided the new evidence on the theory of inverse problems for the string equation. The advantage of the new proof is that it is simple and local (non-stationary).

A detailed review of numerical methods for solving equations of the Gelfand-Levitan type is given in the work of Pariyskiy B.S. [4].

---

\* E-mail корреспондирующего автора: temirbekov@rambler.ru

In the monograph of Kabanikhin S.I. [5] proposed a new algorithm for solving the Gelfand-Levitan equation, which involves the use of a sufficient condition for the solvability of the inverse problem.

In the monograph of Romanov and Kabanikhin S.I. [6,7] a dynamic version of the Gelfand-Levitan method is presented as applied to a one-dimensional inverse geoelectric problem for the quasi-stationary approximation of Maxwell's equations.

Multidimensional Gelfand-Levitan equations were obtained in the works of Belishchev, Kabanikhin S.I., Blagoveshchensky A.S. [8-10].

In the works of Bakanov G.B. [11-13] considered a discrete analog of the Gelfand-Levitan method for a two-dimensional inverse problem of hyperbolic type.

In [14], gradient and direct methods for solving the Gelfand-Levitan equations were numerically implemented.

One-dimensional and multidimensional methods for solving inverse problems for the wave equation by the Gelfand-Levitan method lead to the numerical solution of Fredholm integral equations of the first and second kind. In the work of Lavrentiev M.M. [16] considered integral equations of the first kind.

In recent years, there has been a growing interest in approximate methods for solving integral equations. There are several numerical methods for solving integral equations of the first kind. Most of the works are based on projection methods, such as the Galerkin–Petrov method, the Bubnov–Galerkin method, the method of moments, and the collocation method [17]. One of the most attractive developments in recent years has been the use of wavelets as basis functions in projection methods. The wavelet technique allows to create very efficient algorithms compared to known regularizing algorithms. Various wavelet bases are used in the papers [17-22].

**Statement and solution of the two-dimensional coefficient inverse problem.** We consider a sequence of direct problems [2]

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} + q(x, y)u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in R, \quad k \in Z, \tag{1}$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u_t^{(k)}|_{t=0} = h(y)\delta(x), \tag{3}$$

$$u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}, \tag{4}$$

We assume that the trace of the solution of the direct problem (1) - (4) exists and can be measured. In the inverse problem, it is required to restore a continuous function  $q(x, y)$  from additional information about the solution of the direct problem

$$u^{(k)}(0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, \quad k \in Z \tag{5}$$

where  $R$  is the set of real numbers,  $Z$  is the set of all integers,  $\delta$  is the Dirac delta function,  $k$  is some fixed integer,  $h(y) = e^{iky}$ . Here and everywhere below, we assume that all the considered functions are sufficiently smooth and  $2\pi$  – periodic in the variable  $y$ .

The necessary condition for the existence of a solution (1)-(5) is as follows:

$$f^{(k)}(y, 0) = 0 .$$

The generalized solution of the direct problem (1)-(4) is a piecewise continuous solution of the integral equation

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{h(y)}{2} \theta(t - |x|) - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, y, t)} q(\xi, y) u^{(k)}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau . \quad (6)$$

Here  $\theta(t)$  – the Heaviside theta function.

By analogy with the one-dimensional case, it follows from the integral equation (6) that

$$u(x, y, t) = 0, \quad t < |x|, \quad (x, t) \in R \times R_+ \quad (7)$$

For  $t > |x|$  we have the formula

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{h(y)}{2} - \frac{1}{2} \iint_{(x, y, t)} q(\xi, y) u^{(k)}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau, \quad (8)$$

here  $(x, y, t) = \{(\xi, y, \tau) : |\xi| \leq \tau \leq t - |x - \xi|\}$ .

From formula (8) it follows that

$$u^{(k)}(x, y, |x|) = \frac{h(y)}{2} . \quad (9)$$

Thus, to solve the direct problem in the class of generalized functions, we have the Goursat problem (1), (9) which determines the classical solution of problem (1) - (4) [2].

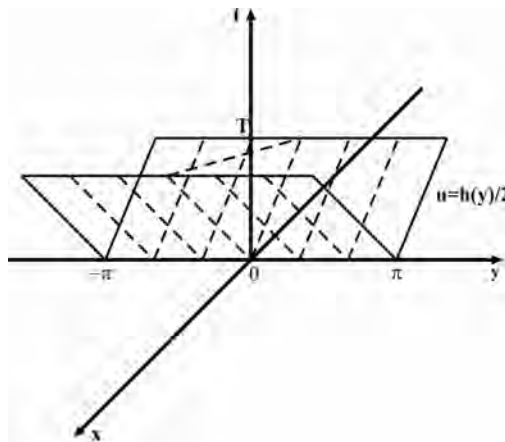


Figure 1 – Scheme for solving the direct problem (1), (9)

A sequence of auxiliary direct problems is introduced [2]:

$$\omega_u^{(m)} = \omega_{xx}^{(m)} + \omega_{yy}^{(m)} + q(x, y) \omega^{(m)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in R, \quad m \in Z. \quad (10)$$

$$\omega^{(m)}(0, y, t) = e^{imy} \delta(t), \quad \frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad (11)$$

$$\omega^{(m)}|_{y=\pi} = \omega^{(m)}|_{y=-\pi} \quad (12)$$

where

$$\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, x-0) = \frac{h(y)}{4} \int_0^x q(\xi, y) d\xi, \quad x > 0 \quad (13)$$

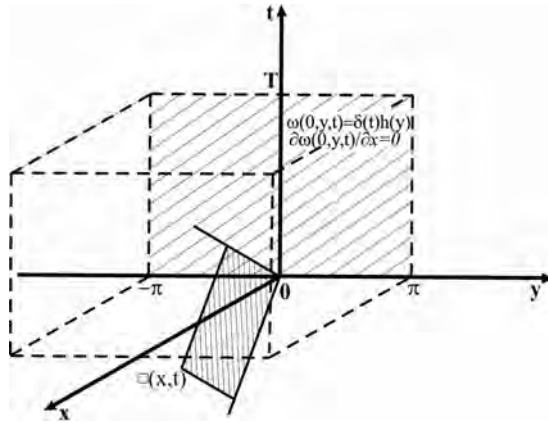


Figure 2 – Area for solving the inverse problem (1) - (5)

Functions  $u^{(k)}(x, y, t)$  and  $f^{(k)}(y, t)$  with respect to the variable  $t$ . For  $x > |t|$  we have

$$\frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t+x) + f^{(k)}(y, t-x)] + \int_{-x}^x \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s) ds = 0 \quad (14)$$

For each fixed  $x > 0$  relation (14) is an integral equation of the first kind with respect to the function  $\tilde{\omega}(x, y, t)$ ,  $t \in (-x, x)$ . Equation (14) is the Gelfand-Levitan equation.

**Discretization of the two-dimensional Gelfand-Levitan equation.** In the Gelfand-Levitan equations (14), we replace the integral by the sum and for  $t = t_j$ ,  $j = -N, -N+1, \dots, 0, \dots, N-1, N$  we obtain a system consisting of  $(2N+1)$  equations with  $M \times (2N+1)$  unknowns  $\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s_i)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ;  $i = -N, -N+1, \dots, N-1, N$ ;

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i=-N}^N f_m^{(k)}(t_j - s_i) \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s_i) \tau = -\frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t_j + x) + f^{(k)}(y, t_j - x)] \quad (15)$$

Equation (15) in matrix form can be written in the following form

$$\sum_{m=1}^M F_m \tilde{\omega}^{(m)} = \vec{f}^{(k)}, \quad (16)$$

where  $F_m = \{f_m^{(k)}(t_j - s_i)\}_{i=-N, N, j=-N, N}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  are square matrices of size  $2N+1$ .

Search vectors and right part



$$\tilde{\omega}^{(m)} = \{\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s_i)\}_{i=-N, N}, m = 1, 2, \dots, M. \tag{17}$$

$$\tilde{f}^{(k)} = \{-0.5(f^{(k)}(y, t_j + x) + f^{(k)}(y, t_j - x))\}_{j=-N, N}. \tag{18}$$

Further, we assume that  $m = 1$ , then formula (4) takes the form

$$\sum_{i=-N}^N f^{(k)}(t_j - s_i) \tilde{\omega}(x, y, s_i) \tau = -\frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t_j + x) + f^{(k)}(y, t_j - x)]. \tag{19}$$

Let us rewrite equation (19) in operator form

$$A^{(k)} \tilde{\omega} = f^{(k)}. \tag{20}$$

For the numerical solution of the Gelfand-Levitan equation (19), the simple iteration method (in the theory of ill-posed problems, the Landweber iteration method) is used in combination with M.M. Lavrentiev regularization. Equation (20) is replaced by the following correct equation

$$(\mu E + A^{(k)}) \tilde{\omega} = f_{\gamma}^{(k)} \tag{21}$$

where  $f_{\gamma}^{(k)} = f^{(k)} + \mu \tilde{\omega}_0$ ,  $E$  is an identity matrix,  $\mu$  is a positive parameter of M.M. Lavrentiev's regularization,  $\tilde{\omega}_0$  is a trial solution, i.e. some approximation to the desired solution.

Iterative process with regularization M.M. Lavrentiev will take the form

$$\frac{\tilde{\omega}_{n+1} - \tilde{\omega}_n}{\tau} + (\mu E + A^{(k)}) \tilde{\omega}_n = f_{\gamma}^{(k)}.$$

The iteration calculation algorithm is as follows [2]:

1. The initial approximation is set equal to the right side  $f_{\gamma}^{(k)}$ ;
2. The accuracy of the calculation  $\varepsilon$  is set, for the condition of the end of the iterative process  $|\tilde{\omega}_{n+1} - \tilde{\omega}_n| < \varepsilon$ ;
3. The calculation is carried out according to the following iterative process

$$\frac{\tilde{\omega}_{n+1} - \tilde{\omega}_n}{\tau} + (\mu E + A^{(k)}) \tilde{\omega}_n = f_{\gamma}^{(k)}.$$

The works of many authors [3-10] are devoted to the numerical method for solving coefficient inverse problems for hyperbolic equations.

Based on the Landweber iteration method for solving a two-dimensional coefficient inverse problem of source recovery  $q(x, y)$ , an efficient algorithm for numerical implementation was developed and a program code was written. During a series of numerical experiments, various functions  $q(x, y)$  were taken, which will be given below. The initial approximation was chosen to be equal to the right side of the system of linear equations. Numerical calculations have been made to find the desired function  $\tilde{\omega}(x, y, t)$ ,  $x \in (0, x_L)$ ,  $y \in (0, x_L)$  and to restore the coefficient  $q(x, y)$  from it.

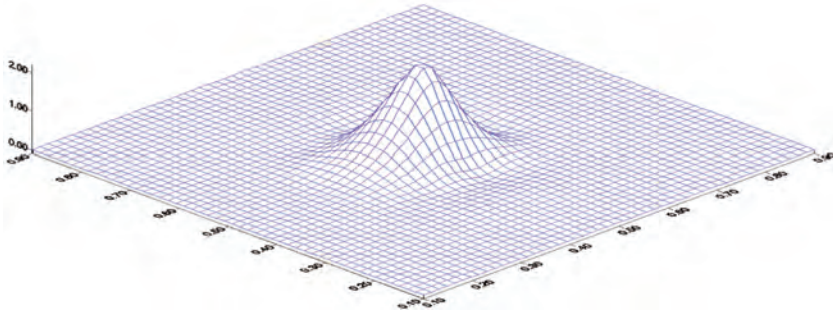
During a series of numerical experiments, various functions  $q(x, y)$  were taken.

Figures 3, 4 show the results of numerical calculations by the **Landweber iteration method** for  $e = 0,001$  of the function

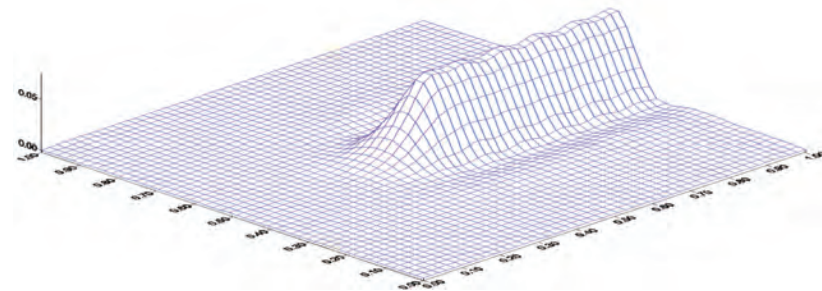
$$q(x, y) = \frac{e}{(x - 0.51)^2 + (y - 0.51)^2},$$

$$\tilde{\omega}(x, y, x - 0) = \frac{e}{4(y - 0.51)} \left( \operatorname{arctg} \frac{x - 0.51}{y - 0.51} - \operatorname{arctg} \frac{-0.51}{y - 0.51} \right)$$

which is found by formula (33). During the calculation in this example, the number of layers  $n$  was taken equal to 10, the regularization parameter  $\mu = 0,5$ ,  $x_L = 1$ ,  $\varepsilon = 0,000001$  and the following output data were obtained: error  $\|\tilde{\omega}_n - \tilde{\omega}_{np}\| = 0,00031857757$ , number of iterations 245, amount of computer time 6.78 sec.



**Figure 3** – Graph of the approximate solution of  $q(x, y)$  restored by the Landweber method, at  $n = 10$ ,  $e = 0,001$



**Figure 4** – Graph of the approximate solution of  $\tilde{\omega}(x, y, x - 0)$  restored by the Landweber iteration method, at  $n = 10$ ,  $e = 0,001$

The results of numerical calculations by the **method of conjugate gradients** for  $e = 0,001$  the functions  $q(x, y)$ ,  $\tilde{\omega}(x, y, x - 0)$ , which are given above. The number of layers  $n = 10$ , the regularization parameter  $\mu = 0,5$ ,  $x_L = 1$ ,  $\varepsilon = 0,000001$  and the following data were obtained: error  $\|\tilde{\omega}_n - \tilde{\omega}_{np}\| = 0,000004144269$ , the number of iterations 3, the amount of computer time 29.25 sec.

Numerical calculations are carried out using the **square root method** for  $e = 0,001$  the function  $q(x, y)$ .  $\tilde{\omega}(x, y, x - 0)$ , which are given above. The number of layers  $n = 10$ , the regularization parameter  $\mu = 0,5$ ,  $x_L = 1$ ,  $\varepsilon = 0,000001$  and the following data were obtained: error  $\|\tilde{\omega}_n - \tilde{\omega}_{np}\| = 0,000000014901161$ , the amount of computer time 4.05 sec.

**Table 1** – Comparative analysis of the numerical solution of the two-dimensional GLE equation by various methods with the number of grid nodes  $n = 10$ ,  $\mu = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,000001$  for the function  $q(x, y)$  where  $e = 0,001$

Methods	Number of iterations	Error rate $\ \tilde{\omega}_T - \tilde{\omega}_{np}\ $	Amount of computer time	Convergence
Landweber iteration method	245	0,00031857757	6,78 sec.	converges
Method of conjugate gradients	3	0,000004144269	29,25 sec.	converges
Quadratic root method	-	0,0000000149011	4,05 sec.	converges

The table shows that the results of the numerical solution of problem (17) - (21) by various numerical methods show high accuracy.

**Acknowledgement.** The work was supported by grant funding from the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (IRN AP08856012 “Development of a module of a geoinformation system based on the methods of intelligent detection of anomalies for in-depth exploration of deposits”, 2020-2022).

## REFERENCES

- 1 Gelfand I.M., Levitan B.M. On the determination of a differential equation from its spectral function // *Izv. Akad. Nauk, Ser. Mat.* - 1951. - T.15. - P. 309-360.
- 2 Krein M.G. On a method of effective solution of an inverse boundary problem // *Doklady Akademii Nauk SSSR.* - 1954. - T.94, № 6. - P. 767-770.
- 3 Blagoveschenskii A.S. The local method of solution of the non-stationary inverse problem for an inhomogeneous string // *Proc. Steklov Inst. Math.* -1971. -T. 115. - P. 28-38.
- 4 Pariiskii B. S. *Economical Methods for the Numerical Solutions of Convolution Equations and of Systems of Algebraic Equations with Töplitz Matrices.* – Moscow: Computing Center of the USSR Academy of Sciences, 1977.P-75.
- 5 Kabanikhin S. I. *Inverse and Ill-Posed Problems.* – Novosibirsk: Siberian scientific publishing house 2009. P - 457.
- 6 Romanov V. G., Kabanikhin S. I. *Inverse Problems of Geoelectrics,* Moscow: Nauka, 1991. P-302.
- 7 Romanov V. G. Stability in inverse problems for hyperbolic equations // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* -2010.- T.7.- P.4 -10.
- 8 Belishev M. I., Blagoveshchenskii A. S. Multidimensional analogs of equations of the Gelfand–Levitan–Krein type in the inverse problem for the wave equation. *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis.* –Novosibirsk: Nauka, 1992.- P.50-63.

9 Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. – Germany: De Gruyter, 2011. – 459 p.

10 Novikov N. S., Shishlenin M. A. Comparative analysis of two numerical methods of solving Gelfand–Levitan–Krein equation, Sib. Elektron. Mat. Izv. 8 (2011), P.379–C.393.

11 Kabanikhin S.I., Bakanov G.B. A discrete analog of the Gelfand-Levitan method in a two-dimensional inverse problem for a hyperbolic equation// Siberian Mathematical Journal. – 1999. – 40(2). – P. 262-280

12 Kabanikhin S.I., Bakanov G.B. Discrete analogy of Gel'fand-Levitan method// Doklady Akademii Nauka. – 1997. – 356(2). – P. 157-160

13 Bakanov G.B. On the stability estimation of differential-difference analogue of the integral geometry problem with a weight function // AIP Conference Proceeding. – 2016. – 1759. – 020067.

14 Temirbekova L.N., Dairbaeva G. Gradient and Direct Method of solving Gelfand-Levitan Integral // Applied and Computational mathematics. An international Journal.-2013. -Vol. 12, №2. - P. 234-246.

15 Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Methods for solving ill-posed problems. - M.:Nauka; Main edition of physical and mathematical literature, 1979. P.-284.

16 Lavrentiev M.M. On integral equations of the first kind // Doklady Akademii Nauka. -1959. - T. 127, №1. - P. 31-33.

17 Maleknejad K., Sohrabi S. Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using Legendre wavelets // Applied Mathematics and Computation 186 (2007) 836- 843. Doi:10.1016/j.amc/2006.08.023

18 Xufeng Shang, Danfu Han, Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using linear Legendre multi-wave-lets. Applied Mathematics and Computation. 191(2007). P.440-444. doi:10.1016/j.amc.2007.02.108

19 Tahami M., AskariHemmat A., Yousefi S.A. Numerical solution of two-dimensional first kind Fredholm integral equations by using linear Legendre wavelet // International Journal of wavelets, Multiresolution and Information Processing. Vol. 14, No.1(2016) 1650004 (20 pages).

20 Di Yuan, Xinming Zhang. An overview of numerical methods for the first kind Fredholm integral equation // SN Applied Sciences (2019) 1:1178/https://doi.org/10.1007/s42452-019-1228-3

21 Temirbekov N.M., Temirbekova L.N., Nurmangaliyeva M.B. Numerical solution of the first kind Fredholm integral equations by projection methods with wavelets as basis functions // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. - 2022. - Vol. 13, No. 1. - pp. 105-118. URL: <http://www.twmsj.az/Files/V.13%20N.1%202022/105-118.pdf>

22 Temirbekov N., Imangaliyev Y., Baigereyev D., Temirbekova L., Nurmangaliyeva M. Numerical simulation of inverse geochemistry problems by regularizing algorithms // Cogent Engineering. - 2022. - Vol. 9, No. 1. DOI: 10.1080/23311916.2021.2003522, URL: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/23311916.2021.2003522>

***Н. М. ТЕМИРБЕКОВ, С. И. КАБАНИХИН, Л. Н. ТЕМИРБЕКОВА,  
Ж. Е. ДЕМЕУБАЕВА***

*Қазақстан Республикасы Ұлттық инженерлік академиясы, Алматы, Қазақстан,  
e-mail: [temirbekov@rambler.ru](mailto:temirbekov@rambler.ru)*

*РФА СБ Есептік математика және математикалық геофизика институты, РФ  
e-mail: [ksi52@mail.ru](mailto:ksi52@mail.ru)*

*Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан*

*e-mail: laura-nurlan@mail.ru*

*Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен,  
Қазақстан*

*e-mail: demeubayevazhanar@gmail.com*

## **ГЕЛЬФАНД-ЛЕВИТАН ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІН ҚОЛДАНЫП КЕРІ КОЭФИЦИЕНТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУ**

*Бұл жұмыста Гельфанд-Левитан әдісімен гиперболалық типті көп өлшемді теңдеулерді шешудің сандық әдістері ұсынылған және жасалған. Гельфанд-Левитан әдісі кері есептер теориясында кеңінен қолданылатын әдіс болып табылады және сызықты емес кері есепті бірінші және екінші текті сызықтық Фредгольм интегралдық теңдеулерінің бір параметрлі тобына келтіруден тұрады. Жалпыланған функциялар класында көпөлшемді гиперболалық теңдеу үшін бастапқы-шектік есеп Гурса есебіне келтіріледі. Гиперболалық типті көп өлшемді кері есепті шешу үшін қосымша ақпарат алу үшін тура Гурса есебінің дискретизациясы және сандық шешімі алынған. Сандық шешім үшін әр берілген  $u$  Гурса есептерінің тізбегі пайдаланылады. Екі өлшемді Гельфанд-Левитан теңдеуінің сандық тәжірибелеріне салыстырмалы талдау жасалды. Сандық тәжірибелер әртүрлі үздіксіз  $q(x, y)$  функциялар үшін кестелер мен суреттер түрінде ұсынылған.*

***Түйін сөздер:** кері есеп, тура есеп, гиперболалық тип, Гельфанд-Левитан теңдеуі, Гурсат есебі, сандық шешім.*

***Н. М. ТЕМИРБЕКОВ, С. И. КАБАНИХИН, Л. Н. ТЕМИРБЕКОВА,  
Ж. Е. ДЕМЕУБАЕВА***

*Национальная инженерная академия Республики Казахстан, г. Алматы, Казахстан,  
e-mail: temirbekov@rambler.ru*

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, РФ  
e-mail: ksi52@mail.ru*

*Казахский национальный педагогический университет имени Абая,  
Алматы, Казахстан*

*e-mail: laura-nurlan@mail.ru*

*Восточно-Казахстанский технический университет имени Д.Серикбаева,  
Усть-Каменогорск, Казахстан*

*e-mail: demeubayevazhanar@gmail.com*

## **ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОЭФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ**

*В работе предложены и реализованы численные методы решения многомерных уравнений гиперболического типа методом Гельфанда-Левитана. Метод Гельфанда-Левитана является одним из наиболее широко используемых в теории обратных задач и заключается в сведении нелинейной обратной задачи к однопараметрическому семейству линейных интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода. В классе обобщенных функций начально-краевая задача для многомерного гиперболического уравнения сводится к задаче Гурса. Получены дискретизация и численная реализация прямой задачи Гурса для получения дополнительной информации для реше-*

---

ния многомерной обратной задачи гиперболического типа. Для численного решения используется последовательность задач Гурса для каждого заданного  $u$ . Проведен сравнительный анализ численных экспериментов двумерного уравнения Гельфанда-Левитана. Численные эксперименты представлены в виде таблиц и рисунков для различных непрерывных функций  $q(x, u)$ .

**Ключевые слова:** обратная задача, прямая задача, гиперболический тип, уравнение Гельфанда-Левитана, задача Гурса, численное решение.



**А. Н. ТЕМИРБЕКОВ<sup>1\*</sup>, С. Е. КАСЕНОВ<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби,

Алматы, Казахстан

e-mail: [almas\\_tem@mail.ru](mailto:almas_tem@mail.ru), [syrym.kasenov@mail.ru](mailto:syrym.kasenov@mail.ru)

## **ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА**

*В работе рассматривается уравнение эллиптического типа с сильно меняющимися коэффициентами. Данная задача изучается в рамках исследований, выполняемых по проекту, финансируемому МОН РК, грант AP09058430. Интерес к исследованию таких уравнений вызван тем, что уравнения данного вида получаются при использовании метода фиктивных областей. Уравнения данного типа возникают при решении многих прикладных задач, включая задачи гидродинамики, теории многофазной фильтрации и многих других. В данной работе предлагается специальный метод для численного решения эллиптического уравнения с сильно меняющимися коэффициентами. Доказана теорема для оценки скорости сходимости разработанного итерационного процесса. Разработан вычислительный алгоритм и проведены численные расчеты для иллюстрации эффективности предлагаемого метода.*

*Ключевые слова: метод фиктивных областей, эллиптическое уравнение, задача Дирихле, уравнение с быстроменяющимися коэффициентами, вычислительный алгоритм, итерационный процесс, граничные условия.*

**Введение.** Для численного решения уравнений эллиптического типа в областях сложной формы эффективно использовать метод фиктивных областей. В работе [1] предлагается экономичная (по числу действий) разностная схема второго порядка точности попеременно-треугольная схема для численного решения эллиптического уравнения. В работе [2] построен модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод с чебышевскими параметрами решения разностной задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка точности. В монографии В.И. Лебедева [3] рассмотрены применения метода композиции для нахождения решений задач на собственные значения, нестационарных задач, задачи Дирихле для бигармонического уравнения и сеточных задач. В работе [4] рассматривается стационарная разностная задача для уравнения Пуассона с кусочно-постоянными коэффициентами в подобластях. Уравнение Пуассона на границе раздела сред аппроксимируется специальным образом, т.е. коэффициенты разностного уравнения выбираются как частное в знаменателе, которого сумма коэффициентов в подобластях. Построен двухступенчатый итерационный процесс основанный на методе деления области.

Метод фиктивных областей применяется для решения многих задач вычислительной гидродинамики [5-16].

Для численного решения вспомогательной задачи МФО для уравнений Навье-Стокса используется метод расщепления по физическим процессам [17-18]. Второй этап алгоритма численной реализации данного метода приводит к решению эллипти-

---

\* E-mail корреспондирующего автора: [almas\\_tem@mail.ru](mailto:almas_tem@mail.ru)

ческого уравнения для нахождения давления с сильно меняющимися коэффициентами.

Данная работа является продолжением работы [19-20], в которых описывается данный метод, без вычислительных экспериментов. Интерес к исследованию таких уравнений вызван тем, что уравнения данного вида получаются при использовании метода фиктивных областей.

В настоящей работе предлагается специальный метод для численного решения эллиптического уравнения с сильно меняющимися коэффициентами. В основе предлагаемого метода заложена специальная замена переменных, которая приводит задачу с разрывными коэффициентами второго рода к задаче с разрывными коэффициентами первого рода. Построен итерационный процесс с двумя параметрами и учитывающий отношение коэффициентов уравнения в подобластях. Доказана теорема для оценки скорости сходимости разработанного итерационного процесса. Разработан вычислительный алгоритм и проведены численные расчеты для иллюстрации эффективности предлагаемого метода.

**Постановка задачи.** Пусть  $\Omega$ -ограниченная область из  $R^2$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ . Для определенности положим  $\Omega = Q_1 \cup Q_2$ ,  $Q_1 \cap Q_2 = \Gamma$ ,  $Q_2$ -строго внутренняя подобласть. В  $\Omega$  рассмотрим эллиптическое уравнение

$$-\operatorname{div}(k\nabla u) = f(\bar{x}), \bar{x} \in \Omega \tag{1}$$

с граничным условием

$$u(\bar{x}) = 0, \bar{x} \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где

$$k(\bar{x}) = \begin{cases} k_1 = \text{const}, \bar{x} \in Q_1, \\ k_2 = \text{const}, (\bar{x}), x \in Q_2 \end{cases}$$

Функция  $f(\bar{x})$  предполагается принадлежащей гильбертовому пространству вещественных функций  $L_2(\Omega)$  и в подобластях определяется следующим образом

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f^{(1)}(x), x \in Q_2, \\ 0, x \in Q_1 \end{cases}$$

Сделаем в (1) замену переменных  $u = 2v/k_1$ , несложные преобразования и получим

$$\Delta v + \operatorname{div}(\omega\nabla v) = -f(\bar{x}) \tag{3}$$

где  $\omega = \frac{2k(x)}{k_1} - 1$ . Обозначим  $\theta = \frac{2k_2}{k_1} - 1$ .

Введем обозначение  $\bar{p} = \left( \omega \frac{\partial v}{\partial x_1}, \omega \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)$  и уравнение (3) запишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta v + \nabla \bar{p} = -f(\bar{x}), \\ p_1 / \omega - \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \\ p_2 / \omega - \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

### 3. Вычислительный алгоритм

Для численного решения системы уравнений (4) с граничными условиями  $v|_{\partial\Omega} = 0$  рассмотрим итерационный метод

$$Bv_i^{n+1} + \Delta_h v^{n+1} + \nabla_h \bar{p}^{n+1} = -f(\bar{x}), \quad (5)$$

$$\beta(\bar{p}^{n+1} - \bar{p}^n) + \frac{\bar{p}^{n+1}}{\omega} - \nabla_h v^{n+1} = 0$$

где  $B$  оператор итерационного метода,  $\beta$  – итерационный параметр, индекс  $h$  означает разностный аналог дифференциального оператора.

Оператор  $B$  в итерационном методе (5) выберем следующим образом

$$B = (1 - \tau)\Delta_h - \tau \operatorname{div}_h(\rho \nabla_h), \quad (6)$$

где  $\rho = (\beta + 1/\omega)^{-1}$ .

Предположим, что  $v^0 \in \overset{0}{W}_2(\Omega)$  и  $p^0 = \nabla q$ , где  $q \in \overset{0}{W}_2$ . Это условие, в частности выполнено, если  $(v^0, p^0) = 0$ .

В дальнейшем будем считать, что  $B > 0$  на  $\overset{0}{W}_2$ . Для этого достаточно выполнение неравенства

$$1 - \tau - \frac{\tau}{\beta} > 0. \quad (7)$$

В этом случае  $B$  на  $\overset{0}{W}_2$  удовлетворяет операторному неравенству

$$-\chi_1 \Delta \leq B \leq -\chi_2 \Delta \quad (8)$$

постоянные  $\chi_1$  и  $\chi_2$  можно выбрать не зависящими от  $\theta \geq 1$ . Подставляя оператор  $B$  определенной в виде (6) в (5), получим

$$\Delta_h v^{n+1} = F(x), \quad (9)$$

$$\bar{p}^{n+1} = \beta \rho \bar{p}^n + \rho \nabla_h v^{n+1}, \quad (10)$$

где

$$F(\bar{x}) = (1 - \tau)\Delta_h v^n - \tau \operatorname{div}_h(\beta \rho \nabla_h v^n) - \tau \operatorname{div}_h(\beta \rho \bar{p}^n) \quad (11)$$

Приведем алгоритм численной реализации метода (9), (10). Один шаг итерационного метода (9), (10) состоит в нахождении значения  $v^{n+1}$  по известным  $v^n, \bar{p}^n$ . Для этого требуется решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона (9) в  $\Omega$ . После этого значение  $\bar{p}^{n+1}$  по известным  $\bar{p}^n$  и  $v^{n+1}$  пересчитывается по формуле (10).

**4. Исследование сходимости.** Докажем некоторые вспомогательные оценки, которые потребуются при исследовании итерационного метода. Пусть  $H(Q_2)$  – замыкание в  $W_2^1(Q_2)$  множество гладких функций, ортогональных единице на  $\Gamma$ , а  $H(Q_1)$  – замыкание в  $W_2^1(Q_1)$  множества гладких функции, обращающихся в нуль на  $\Gamma$ . Норму в  $H(Q_i)$  введем следующим образом

$$\|v\|_{H(Q_i)} = \|\nabla v\|_{Q_i} = \left( \int_{Q_i} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

Пусть  $\varphi$  определена на  $\Gamma$  и  $(\varphi, 1)_\Gamma = \int_\Gamma \varphi ds = 0$ .

Обозначим

$$\|\varphi\|_{-1/2Q_i} = \sup_{\eta \in H(Q_i)} (\varphi, \eta)_\Gamma / \|\nabla \eta\|_{Q_i} \quad (12)$$

**Лемма 1.** Пусть  $v_2 \in W_2^1(Q_2)$  – обобщенное решение задачи

$$\Delta v_2 = 0, \quad \bar{x} \in Q_2 \quad (13)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0$$

а  $v_1$  – обобщенное решение задачи

$$\Delta v_1 = 0, \quad \bar{x} \in Q_1 \quad (14)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0, \quad v_1 \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

тогда

$$\|\nabla v_2\|_{Q_2}^2 \leq C_3 \|\nabla v_1\|_{Q_1}^2 \quad (15)$$

где  $C_3$  не зависит от  $\varphi$

**Доказательство.** Введем норму

$$\|\varphi\|_{-1/2\Gamma} = \sup_{\psi \in W_2^{1/2}(\Gamma)} (\varphi, \psi)_\Gamma / \|\psi\|_{-1/2\Gamma} \quad (16)$$

Обобщенное решение задачи (13), это функция из  $H(Q_2)$  которая удовлетворяет соотношению

$$(\nabla v_2, \nabla \eta) = (\varphi, \eta)_\Gamma, \quad \forall \eta \in H(Q_2) \quad (17)$$

В силу теоремы вложения правая часть (17) представляет собой линейный ограниченный функционал на  $H(Q_i)$ . По теореме Рисса существует функция  $v_0 \in H(Q_2)$  такая, что

$$(\varphi, \eta)_\Gamma = (\nabla v_0, \nabla \eta)_{Q_2}$$

и

$$\|\nabla v_0\| = \sup_{\eta \in H(Q_2)} \frac{(\varphi, \eta)_\Gamma}{\|\nabla \eta\|_{Q_2}} \tag{18}$$

Тогда из (17) и (18) имеем

$$v_2 = v_0 \text{ и } \|\nabla v_2\|_{Q_2} = \|\varphi\|_{-1/2Q_2}.$$

Аналогичным образом доказываются, что

$$\|\nabla v_1\|_{Q_1} = \|\varphi\|_{-1/2Q_1}.$$

Нормы (12) при  $i = 1, 2$  эквивалентны между собой. Действительно, из теорем вложения имеем цепочку неравенств

$$\frac{|(\varphi, \psi)_\Gamma|}{\|\nabla \eta\|_{Q_i}} \leq \frac{\|\varphi\|_{-1/2\Gamma} \|\psi\|_{-1/2\Gamma}}{\|\nabla \eta\|_{Q_i}} \leq c \|\varphi\|_{-1/2, \Gamma}$$

С другой стороны, всякая функция  $\psi \in W_1^{1/2}(\Gamma)$  (в случае  $i = 2$  функция  $\psi$  удовлетворяет условию  $(\psi, 1)_\Gamma = 0$ ) может быть продолжена на  $Q_i$  таким образом, чтобы продолженная функция  $\tilde{\psi}$  принадлежала  $H(Q_i)$  и

$$\|\nabla \tilde{\psi}\|_{Q_i} \leq c \|\psi\|_{-1/2\Gamma}$$

Таким образом,

$$\frac{|(\varphi, \psi)_\Gamma|}{\|\psi\|_{-1/2\Gamma}} \leq c \frac{|(\varphi, \psi)_\Gamma|}{\|\nabla \tilde{\psi}\|_{Q_i}}$$

Отсюда следует, что нормы  $\|\varphi\|_{-1/2Q_i}$  эквивалентны между собой. В силу равенств  $\|\nabla v_i\|_{Q_i} = \|\varphi\|_{-1/2Q_i}$  получаем оценку (15).

Лемма доказана.

Оценим скорость сходимости метода (9), (10). Обозначим

$$\begin{aligned} \{y, r\} &= \{y^n, r^n\} = \{v - v^n, p - p^n\}, \\ \{\hat{y}, \hat{r}\} &= \{y^{n+1}, r^{n+1}\} \end{aligned}$$

Тогда уравнения (5) переписутся в виде

$$(By_i, v) + (\nabla_h \hat{y}, \nabla_h v) + (\nabla_h \hat{r}, v) = 0, \forall v \in W_2^{01}, \quad (19)$$

$$\beta \tau r_i + \hat{r}/\omega - \nabla_h \hat{y} = 0, \quad (20)$$

$$\{y^0, r^0\} \in W_2^{01} \times L_2, \text{ здесь } y_i = (\hat{y} - y)/\tau.$$

Назовем функцию  $\psi$  из  $L_2$  кусочно-градиентной, если она представима в виде

$$\psi = \nabla g_i \text{ в } Q_i; \text{ где } g_i \in W_2^1(Q_i) \quad (21)$$

$$g_i|_{\partial Q_i \cap \partial \Omega} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

и назовем функцию  $\psi$  градиентной, если она имеет вид

$$\psi = \nabla g \text{ в } \Omega \text{ где } g \in W_2^{01}(\Omega).$$

Так как  $p^0 = \nabla g, g \in W_2^{01}$  и  $\omega$  – кусочно постоянная, то  $r^0$  является кусочно-градиентной.

Умножим обе части уравнения (20) скалярно в  $L_2$  на  $2\tau \hat{r}$  и положим  $v = 2\tau \hat{y}$  в соотношении (19). Складывая полученные равенства имеем

$$\|\hat{y}\|_B^2 - \|y\|_B^2 + \tau^2 \|y_i\|_B^2 + 2\tau \|\nabla_h \hat{y}\|^2 + \beta \tau \|\hat{r}\|^2 - \beta \tau \|r\|^2 + \beta \tau^3 \|r_i\|^2 + \frac{2\tau}{\omega} \|\hat{r}\|^2 = 0. \quad (22)$$

Исследуем вид  $r^n$ . Так как

$$\hat{\tau} = \frac{\beta}{\beta + 1/\omega} r + \frac{1}{\beta + 1/\omega} \nabla \hat{y}$$

и  $r$  является кусочно-градиентной функцией, то и  $\hat{\tau}$  будет кусочно-градиентной. Таким образом, все  $r^n$  являются кусочно-градиентными.

Пусть  $G$  – пространство кусочно-градиентных,  $G_1$  – пространство градиентных функций. Очевидно, что  $G_1 \subseteq G$ . Покажем, что имеет место строгое вложение  $G_1 \subset G$  и найдем ортогональность в  $L_2$  дополнения  $G_1$  к  $G$ . Если  $\psi$  ортогонально в  $L_2$  ко всем элементам  $G_1$ , то для любого элемента  $\nabla q \in G_1$  имеем  $(\psi, \nabla q)_\Omega = 0$ .

Если функция  $\nabla g$  достаточно гладкая и имеет носитель в  $Q_1$  то

$$(\psi, \nabla g)_\Omega = (\psi, \nabla g)_{Q_1} = -(\text{div} \psi, g)_{Q_1} = -(\Delta g_i, g)_{Q_1} = 0$$

Так как  $g$  – произвольная, то последнее соотношение означает, что

$$\Delta g_i = 0 \text{ в } Q_1 \quad (23)$$

Ясно, что соотношение выполнено в каждой  $Q_i, i = 1, 2$ . Таким образом, элемент  $\psi \in G$ , ортогональный всем элементам  $G_1$ , представим в виде (21), где  $q_i$  – гармоническая в  $Q_i$  функция. Найдем условия, которым должна удовлетворять функция  $\psi$ , ортогональная  $G_1$  на  $\Gamma$ .



Пусть  $\nabla q \in G_1$ , тогда

$$\begin{aligned} 0 &= (\psi, \nabla q)_\Omega = (\nabla q_1, \nabla q)_{Q_1} + (\nabla q_2, \nabla q)_{Q_2} = \\ &= \int_\Gamma g \frac{\partial q_1}{\partial n_1} ds + \int_\Gamma g \frac{\partial q_2}{\partial n_2} ds = \int_\Gamma g \left( \frac{\partial q_1}{\partial n_1} - \frac{\partial q_2}{\partial n_1} \right) ds. \end{aligned}$$

(здесь  $n_i$  – векторы внешней нормали на  $\partial Q_i$ ); то есть значения нормальных составляющих  $\psi_1 = \nabla q_1$  и  $\psi_2 = \nabla q_2$  на  $\Gamma$  совпадают. Таким образом, нормальная составляющая вектор-функции  $\psi$  непрерывна (в интегральном смысле) при переходе через  $\Gamma$ . Отсюда следует, что ортогональное в  $L_2$  дополнение  $G_2$  пространства  $G_1$  к  $G$  состоит из всех вектор-функции вида (21), нормальная составляющая которых непрерывна при переходе через смежные границы, а образующие их функции  $g_i$  являются гармоническими в  $Q_i$ .

Продолжим исследование сходимости итерационного метода (9), (10). Как было установлено,  $\hat{r} \in G$ . Представим  $\hat{r}$  в виде  $\hat{r} = \hat{q} + \hat{h}$ , где  $\hat{q} \in G_1$ , а  $\hat{h} \in G_2$ . Соотношение (19) в этом случае примет вид

$$(By_t, v) + (\nabla \hat{y}, \nabla v) + (\hat{q}, \nabla v) + (\hat{h}, \nabla v) = 0, \tag{24}$$

для  $\forall v \in W_2^0$

Последнее скалярное произведение в (24) равно нулю, т.к.  $\nabla v \in G_1$ . Разделив обе части (24) на  $\|\nabla v\|$  и оценив член содержащий  $q$ , получим

$$\frac{|(\hat{q}, \nabla v)|}{\|\nabla v\|} \leq \frac{|(By_t, v)|}{\|\Delta v\|} + \frac{|(\nabla \hat{y}, \nabla v)|}{\|\nabla v\|} \leq \sqrt{\chi_2} \|y_t\|_B + \|\nabla_h \hat{y}\|$$

Так как правая часть этого неравенства не зависит от  $v \in W_2^0$ , а  $\hat{q} \in G_1$ , т.е. представима в виде  $\hat{q} = \nabla g$  ( $g \in W_2^0$ ), то беря по в левой части неравенства, получим оценку

$$\|\hat{q}\| \leq \sqrt{\chi_2} \|y_t\|_B + \|\nabla_h \hat{y}\|$$

где  $\|\nabla_h \hat{y}\| = \|\hat{y}\|_1$ .

Возведем обе части этого неравенства в квадрат и оценим правую часть

$$\|\hat{q}\|^2 \leq 2(\chi_2 \|y_t\|_B^2 + \|\nabla_h \hat{y}\|^2)$$

Умножим последнее неравенство на  $\beta \tau^2 \lambda$  ( $\lambda > 0$  - произвольное) и сложим с (22). В результате имеем

$$\begin{aligned} & \|\hat{y}\|_B^2 + \tau^2(1 - 2\beta\lambda\chi_2)\|y_i\|_B^2 + 2\tau(1 - \beta\tau\lambda)\|\nabla_h \hat{y}\|^2 + \\ & + \beta\tau^2\lambda\|\hat{q}\|^2 + 2\tau\left(\hat{r}, \frac{\hat{r}}{\omega}\right) + \beta\tau\|\hat{r}\|^2 \leq \|y\|_B^2 + \beta\tau\|r\|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Оценим скалярное произведение  $(\hat{r}, \hat{r}/\omega)$ . При любом  $\delta, 0 < \delta < 1$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\hat{r}}{\omega}, \hat{r}\right) \geq \left(\frac{\hat{q}}{\omega}, \hat{q}\right) + \left(\frac{\hat{h}}{\omega}, \hat{h}\right) - 2\left|\left(\frac{\hat{q}}{\omega}, \hat{h}\right)\right| \geq \\ & \geq (1 - \delta)\left(\frac{\hat{h}}{\omega}, \hat{h}\right) + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{\hat{q}}{\omega}, \hat{q}\right) \geq (1 - \delta)\left[\|\hat{h}\|_{Q_1}^2 + \frac{1}{\theta}\|\hat{h}\|_{Q_2}^2\right] + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\|\hat{q}\|^2 \end{aligned} \quad (26)$$

Так как  $\hat{h} \in G$ , то согласно лемме 1 имеет место оценка

$$\|\hat{h}\|_{Q_2} \leq c_3 \|\hat{h}\|_{Q_1}^2$$

Таким образом,

$$\|\hat{h}\|_{\Omega}^2 = \|\hat{h}\|_{Q_1}^2 + \|\hat{h}\|_{Q_2}^2 \leq (1 + c_3)\|\hat{h}\|_{Q_1}^2,$$

поэтому из (26) следует оценка

$$\left(\frac{\hat{r}}{\omega}, \hat{r}\right) \geq c_4(1 - \delta)\|\hat{h}\|^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\|\hat{q}\|^2, \quad c_4 = (1 + c_3)^{-1}$$

Используя последнее неравенство, приведем (25) к виду

$$\begin{aligned} & \|\hat{y}\|_B^2 + \tau^2(1 - 2\beta\lambda\chi_2)\|y_i\|_B^2 + 2\tau(1 - \beta\tau\lambda)\|\hat{y}\|_1^2 + \\ & + \beta\tau\|\hat{r}\|^2 + \beta\tau^2\lambda\|\hat{q}\|^2 + 2\tau(1 - \delta)c_4\|\hat{h}\|^2 + \\ & + 2\tau\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\|\hat{q}\|^2 \leq \|y\|_B^2 + \beta\tau\|r\|^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Зафиксируем  $\beta > 0$  и по нему выберем  $\tau > 0$  так, чтобы для всех  $\theta > 0$  выполнялось условие  $\beta > 0$ . Выберем  $\lambda$ , удовлетворяющее условиям

$$1 - 2\beta\lambda\chi_2 > 0, \quad 1 - \beta\tau\lambda > 0$$

и положим  $\delta = \frac{4}{4 + \beta\tau\lambda} < 1$ . Тогда  $\beta\tau^2\lambda + 2\tau(1 - 1/\delta) = \beta\tau^2\lambda - 2\tau\frac{\beta\tau\lambda}{4} = \frac{\beta\tau^2\lambda}{2}, 1 - \delta = \frac{\beta\tau\lambda}{4 + \beta\tau\lambda}$

Неравенство (27) при таком  $\delta$  имеет вид

$$\left(1 + \frac{A_5 \tau}{\chi_2}\right) \|\hat{y}\|_B^2 + \beta \tau (1 + c_6 \tau) \|\hat{r}\|^2 \leq \|y\|_B^2 + \beta \tau \|r\|^2 \quad (28)$$

где  $c_5 = \tau(1 - 2\beta\lambda\chi_2)$ ,  $c_6 = \min\left\{\frac{\lambda}{2}, \frac{2c_4\lambda}{4 + \beta\tau\lambda}\right\}$

Нетрудно видеть, что постоянные  $\beta, \tau, \chi_2, \lambda$  можно выбрать одними и теми для всех  $\theta, 1 \leq \theta \leq \infty$ . Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Для любого  $\beta > 0$  существует  $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\beta)$ , не зависящее от  $\omega \geq 1$ , такое что  $-\chi_1 \Delta \leq B \leq -\chi_2 \Delta$  при  $\tau \leq \bar{\tau}$  постоянные  $\chi_1, \chi_2$  не зависят от  $\omega$ . В этом случае итерационный процесс (9), (10) сходится со скоростью геометрической прогрессии и скорость сходимости не зависит от  $\omega$ .

**Замечание.** Нетрудно заметить, что теорема 1 имеет место и в том случае, когда  $Q_2 = \bigcup_1^N \Omega'_i$  или же  $Q_1 = \bigcup_1^N \Omega'_i$ . При этом подобласти  $\Omega'_i$  должны быть типологически отделимы с кусочно-гладкими границами. В первом случае, в подобластях  $\Omega'_i$  и  $\Omega'_j$ , совпадение параметра  $\omega$  не обязательно.

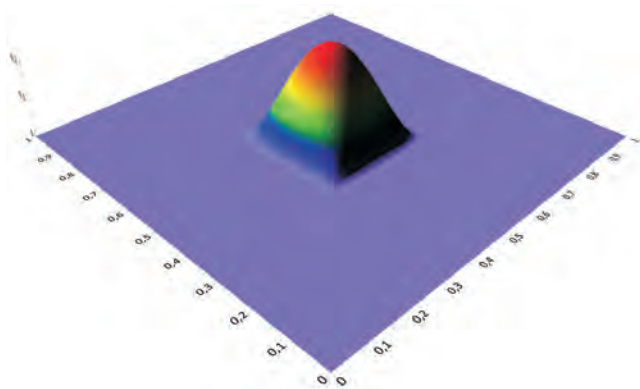
**5. Численные расчеты.** Вышеизложенным методом решена тестовая задача (1)-(2). Подобласть  $Q_2$  выбиралась в виде квадрата  $Q_2 = \{x_{1,k_1} \leq x_1 \leq x_{1,k_2}; x_{2,m_1} \leq x_2 \leq x_{2,m_2}\}$ , где  $x_{1,k_1} = 0,25, x_{1,k_2} = 0,75, x_{2,m_1} = 0,25, x_{2,m_2} = 0,75$ . Область  $\Omega$  покрывает подобласть  $Q_2 \Omega = \{0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1\}$ .

Подобласть  $Q_1$  определяется так  $Q_1 = \Omega \setminus Q_2$ . Правая часть задана в  $Q_2$  следующим образом

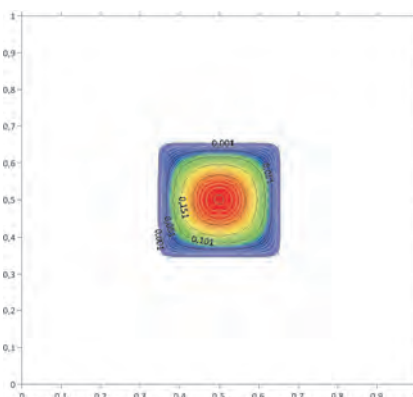
$$f(x_1, x_2) = 2(x_2^2 - (x_{2,m_1} + x_{2,m_2})x_2 + x_{2,m_1}x_{2,m_2}) + 2(x_1^2 - (x_{1,k_1} + x_{1,k_2})x_1 + x_{1,k_1}x_{1,k_2})$$

где  $x_{1,k_1} = 0,25, x_{1,k_2} = 0,75, x_{2,m_1} = 0,25, x_{2,m_2} = 0,75$ .

В подобласти  $Q_1$  функция  $f(x_1, x_2) = 0$ . Итерационный параметр  $\tau$  выбирался  $\tau = 10^{-3} \div 10^{-5}$ , параметр  $\beta$  определяется так, чтобы выполнялось условие (7). При этом необходимо следить за знаком параметра  $\omega$  в подобластях, т.к.  $-1 \leq \omega \leq 1$ .

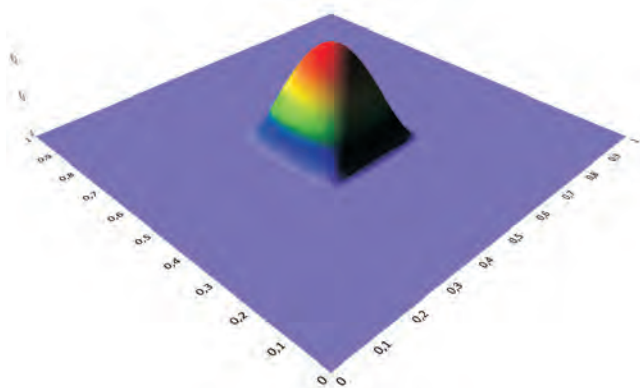


а) вид сбоку

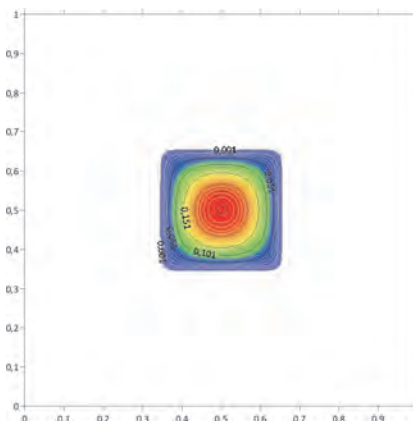


б) вид сверху

Рисунок 1 – График точного решения при узлах сетки 101x101.



а) вид сбоку



б) вид сверху

Рисунок 2 – График приближенного решения при узлах сетки 101x101.

Таблица 1 – Сравнительный анализ численного решения уравнения эллиптического типа с сильноменяющимися коэффициентами различными методами при количестве узлов сетки  $n = 100 \times 100$ , точность решения  $\varepsilon = 10^{-11}$

Методы	Количество итераций	Норма погрешности	Количество машинного времени	Сходимость
Разработанный вычислительный алгоритм	5000	0,0000000001	5,18 сек	сходится
Метод верхней релаксации	5000	0,0004882813	6,40 сек	сходится
Метод нижней релаксации	5000	0,0000000154	6,41 сек.	сходится
Метод Зейделя	5000	0,0000000001	7,27 сек.	сходится

Поставленная задача эллиптического типа с сильноменяющимися коэффициентами была решена методом фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам. На рисунках 1-2 представлены соответственно результаты точного и приближенного решения при узлах сетки  $101 \times 101$ . В расчетах использовалась равномерная сетка размерами  $101 \times 101$ ,  $501 \times 501$ ,  $1001 \times 1001$ . Численный эксперимент был проведен на современном персональном компьютере следующими характеристиками Intel(R) Core(TM)i9-10900F CPU@2.80GHz, ОЗУ 32 Гб. Разработанный метод основан на построении вычислительного алгоритма для эллиптического уравнения с сильноменяющимися коэффициентами. Проведен сравнительный анализ численного решения уравнения эллиптического типа с сильноменяющимися коэффициентами различными методами. Разработанный алгоритм равномерно сходится при определенном количестве итерации и получаются результаты с точностью до  $10^{-10}$  (таблица 1). Полученные результаты будут использованы при решении уравнений Навье-Стокса методом фиктивных областей.

Работа выполнена при поддержке проекта грантового финансирования молодых ученых по научным и (или) научно-техническим проектам на 2021-2023 годы Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP09058430).

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Самарский А.А. Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений. – Журнал вычислительной математики и математической физики, Т.4, № 3, 1964, С 580-585.
- 2 Кучеров А.Б., Николаев Е.С. Попеременно-треугольный метод решения сеточных эллиптических уравнений в прямоугольнике. – Журнал вычислительной математики и математической физики, Т.16, № 5, 1976, С 1164-1174.
- 3 Лебедев В.Н. Метод композиции. – М. ОВМ. АН СССР, 1986
- 4 Волков Е.А. О методах решения разностных уравнений для кусочно-однородной среды и с правой частью заданной вдоль кривой. ДАН СССР 283, 1985, №2, с.274-277.
- 5 Бугров А.Н., Коновалов А.Н., Щербак В.А. Метод фиктивных областей в плоских статических задачах теории упругости // Численные методы механики сплошной среды. –Новосибирск, 1974. – Т.5, №1.-С.20-30.
- 6 Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1973.-Т.4, №2.– С.109-115.
- 7 Смагулов Ш.С. Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнения Навье-Стокса // Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, Препринт. – 1979. – №68.– С.68-73.
- 8 Смагулов Ш.С., Орунханов М.К. Приближенный метод решения уравнений гидродинамики в многосвязных областях // ДАН СССР. – 1981. – Т.260, №5. – С.1078-1082.
- 9 Смагулов Ш.С., Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М. Моделирование краевых условий для давления и полного напора в задач гидродинамики с помощью метода фиктивных областей // Доклады Академии Наук России. – 2000. –Т.374, №3. – С. 333-335.
- 10 Danaev, N.T., Smagulov, S., Temirbekov, N.M. Numerical solution of Navier-Stokes equations for an incompressible liquid in channels with a porous insert. J Appl Mech Tech Phys 36, 658-665 (1995).
- 11 Орунханов М.К., Смагулов Ш.С. Метод фиктивных областей для уравнения Навье-Стокса в терминах функции тока и вихря скоростей с неоднородными граничными условиями // Вычислительные технологии. –Новосибирск: СО РАН, 2000. – Т.5, №3. – С.46-53.
- 12 Temirbekov A.N., Malgazhdarov Ye.A., Kassenov S.Ye., Urmashv B.A. Parallel Cuda implementation of the algorithm for solving the Navier-Stokes equations using the fictitious domain

method. Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия «математика, механика, информатика».- 2021. №1(109). - С. 63-75.

13 Temirbekov A., Baigereyev D., Temirbekov A., Baigereyev D., Temirbekov N., Urmashev B., Amantayeva A. Parallel CUDA implementation of a numerical algorithm for solving the Navier-Stokes equations using the pressure uniqueness condition. AIP Conference Proceedings Volume 2325, Article number 020063. - 2021. DOI: 10.1063/5.0041039.

14 Temirbekov A., Malgazhdarov Y., Tleulessova A., Temirbekova L. Fictitious domain method for the Navier-Stokes equations//Известия НАН РК, серия «физико-математическая». – 2021. №3(337). С.128-137.

15 Temirbekov A., Zhaksylykova Z., Malgazhdarov Y., Kasenov S. Application of the fictitious domain method for Navier-Stokes equations. Computers, Materials & Continua.-Vol. 73, Issue 1, p. 2035–2055. - 2022. DOI: 10.32604/cmc.2022.027830.

16 Temirbekov A., Altybay A., Temirbekova L., Kasenov S. Development of parallel implementation for the Navier-Stokes equation in doubly connected areas using the fictitious domain method. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.-Vol. 2, Issue 4 (116), p. 38–46.-2022. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.254261.

17 Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Of fluids. 1965.– vol.8, #12. – P.2182-2189.

18 Белоцерковский О.М., Гушин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости //ЖВМ и МФ. –1975.– Т.15, №1.– С.197-207.

19 Temirbekov A.N., Waldemar Wójcik. Numerical Implementation of the Fictitious Domain Method for Elliptic Equations// International Journal of Electronics and Telecommunications.– 2014.– Vol.60, № 3.– P. 219-223.

20 Temirbekov A.N. Numerical implementation of the method of fictitious domains for elliptic equations. AIP Conference Proceedings. Volume 1759, Article number 020053. – 2016.

## REFERENCES

1 Samarskii A.A. On one economical algorithm for the numerical solution of systems of differential and algebraic equations. // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, V.4, No. 3, 1964, pp. 580-585.

2 Kucherov A.B., Nikolaev E.S. Alternating triangular method for solving grid elliptic equations in a rectangle. - Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, V.16, No. 5, 1976, pp. 1164-1174.

3 Lebedev V.N. Composition method. –М. DCM. AS SSR, 1986

4 Volkov E.A. On methods for solving difference equations for a piecewise-homogeneous medium and with the right side given along the curve. DAS USSR 283, 1985, No. 2, pp. 274-277.

5 Bugrov A.N., Konovalov A.N., Sherbak V.A. Method of fictitious domains in plane static problems of the theory of elasticity // Numerical methods of continuum mechanics. -Novosibirsk, 1974. -V.5, No.1, pp.20-30.

6 Konovalov A.N. Method of fictitious domains in problems of torsion // Numerical methods of continuum mechanics. - Novosibirsk, 1973.-V.4, No. 2, pp.109-115.

7 Smagulov Sh.S. Method of fictitious domains for the boundary value problem of the Navier-Stokes equation // Novosibirsk: Izd. Computing Center of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, Preprint.-1979. – No. 68, pp.68-73.

8 Smagulov Sh.S., Orunkhanov M.K. Approximate method for solving hydrodynamic equations in multiply connected domains // DAS USSR. - 1981. - V.260, No. 5, pp.1078-1082.

9 Smagulov Sh.S., Danaev N.T., Temirbekov N.M. Modeling of boundary conditions for pressure and total head in problems of hydrodynamics using the method of fictitious regions // Doklady Akademii Nauk Rossii. - 2000. -V.374, No. 3, pp. 333-335.



10 Danaev, N.T., Smagulov, S., Temirbekov, N.M. Numerical solution of Navier-Stokes equations for an incompressible liquid in channels with a porous insert. J Appl Mech Tech Phys 36, 658-665 (1995).

11 Orunkhanov M.K., Smagulov Sh.S. The method of fictitious domains for the Navier-Stokes equation in terms of the stream function and the velocity vortex with inhomogeneous boundary conditions // Computational technologies. -Novosibirsk: SB RAN, 2000. -V.5, No.3, pp.46-53.

12 Temirbekov A.N., Malgazhdarov Ye.A., Kassenov S.Ye., Urmashov B.A. Parallel Cuda implementation of the algorithm for solving the Navier-Stokes equations using the fictitious domain method. Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия «математика, механика, информатика».-2021. №1(109). -С. 63-75.

13 Temirbekov A., Baigereyev D., Temirbekov A., Baigereyev D., Temirbekov N., Urmashov B., Amantayeva A. Parallel CUDA implementation of a numerical algorithm for solving the Navier-Stokes equations using the pressure uniqueness condition. AIP Conference Proceedings Volume 2325, Article number 020063. -2021. DOI: 10.1063/5.0041039.

14 Temirbekov A., Malgazhdarov Y., Tleulessova A., Temirbekova L. Fictitious domain method for the Navier-Stokes equations//Известия НАН РК, серия «физико-математическая». – 2021. №3(337). С.128-137.

15 Temirbekov A., Zhaksylykova Z., Malgazhdarov Y., Kasenov S. Application of the fictitious domain method for Navier-Stokes equations. Computers, Materials & Continua.-Vol. 73, Issue 1, p. 2035–2055. - 2022. DOI: 10.32604/cmc.2022.027830.

16 Temirbekov A., Altybay A., Temirbekova L., Kasenov S. Development of parallel implementation for the Navier-Stokes equation in doubly connected areas using the fictitious domain method. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.-Vol. 2, Issue 4 (116), p. 38–46.-2022. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.254261.

17 Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Of fluids. 1965.– vol.8, #12. – P.2182-2189.

18 Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости //ЖВМ и МФ. -1975.-Т.15, №1.- С.197-207.

19 Temirbekov A.N., Waldemar Wójcik. Numerical Implementation of the Fictitious Domain Method for Elliptic Equations// International Journal of Electronics and Telecommunications.-2014.- Vol.60, № 3.-P. 219-223.

20 Temirbekov A.N. Numerical implementation of the method of fictitious domains for elliptic equations. AIP Conference Proceedings. Volume 1759, Article number 020053. – 2016.

### ***A. Н. ТЕМИРБЕКОВ, С. Е. КАСЕНОВ***

*Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы, Қазақстан*

### **ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ЖАЛҒАН АЙМАҚТАР ӘДІСІН САНДЫҚ ЖҮЗЕГЕ АСЫРУ**

*Жұмыста жылдам өзгеретін коэффициенттері бар эллиптикалық типтегі теңдеу қарастырылады. Бұл есеп АР09058430 грантын ҚР БҒМ қаржыландыратын жоба бойынша орындалатын зерттеулер аясында зерттеледі. Мұндай теңдеулерді зерттеуге деген қызығушылық осы типтегі теңдеулер жалған аймақтар әдісін қолдану арқылы алынатындығымен байланысты. Бұл типтегі теңдеулер көптеген қолданбалы есептерді, соның ішінде гидродинамик, көп*

фазалы сүзу теориясы және тағы басқа есептерді шешу кезінде пайда болады. Бұл жұмыста жылдам өзгеретін коэффициенттері бар эллиптикалық теңдеуді сандық шешудің арнайы әдісі ұсынылады. Өзірленген итерациялық үрдістің жинақталу жылдамдығын бағалау үшін теорема дәлелденді. Ұсынылған әдістің тиімділігін көрсету үшін есептеу алгоритмі жасалып, сандық есептеулер жүргізілді.

**Түйін сөздер:** жалған аймақтар әдісі, эллиптикалық теңдеу, Дирихле есебі, жылдам өзгеретін коэффициенттері бар теңдеулер, есептеу алгоритмі, итерация үрдісі, шекаралық шарттар.

**A. N. TEMIRBEKOV, S. E. KASENOV**

*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

### **NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE FICTITIOUS DOMAIN METHOD FOR AN ELLIPTIC TYPE EQUATION**

*The paper considers an elliptic type equation with strongly varying coefficients. This problem is being studied within the framework of research carried out under a project funded by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant AP09058430. Interest in the study of such equations is caused by the fact that equations of this type are obtained using the method of fictitious domains. Equations of this type arise when solving many applied problems, including problems of hydrodynamics, the theory of multiphase filtration and many others. In this paper, a special method is proposed for the numerical solution of an elliptic equation with strongly varying coefficients. A theorem for estimating the convergence rate of the developed iterative process is proved. A computational algorithm has been developed and numerical calculations have been performed to illustrate the effectiveness of the proposed method.*

**Key words:** *fictitious domain method, elliptic equation, Dirichlet problem, equations with rapidly changing coefficients, computational algorithm, iterative process, boundary conditions.*

**Х. ХОМЫШ***Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,**Алматы, Қазақстан**Konat\_k@mail.ru***БІРТЕКТІ ЕМЕС НЬЮТОНДЫҚ ЕМЕС СҰЙЫҚТАРДЫҢ СЫЗЫҚТЫ  
ЕМЕС ТЕҢДЕУІНЕН ҚЫСЫМДЫ АНЫҚТАУ**

*Бұл мақалада біртекті емес (тығыздығы белгісіз әрі тұрақты емес) сығылмайтын тұтқыр серпімді ньютондық емес сұйығының қозғалысын сипаттайтын бейсызықты  $p$ -лапласианды диффузиялы және сызықты емес дәрежелі мүшелі теңдеулер жүйесі үшін қойылған бастапқы-шеттік есебі қарастырылады. Әдетте, сығылмайтын сұйықтар үшін гидродинамика теңдеулерінің жалпылама әлсіз шешімі сығылмайтындық (үзіліссіздік) теңдеуіне байланысты соленоидальды кеңістікте қарастырылатындықтан, сұйық қысымы жалпылама әлсіз шешім анықтамасында қарастырылмайды. Классикалық гидродинамика теңдеулері үшін сұйықтың қысымы оның жылдамдығы мен тығыздығы анықтағаннан кейін көпжағдайларды  $L^2(\Omega)$  кеңістігінің ортогонал екі ішкі кеңістіктің тіке қосындыға жіктелу теоремасы арқылы анықталады. Ал  $p$ -лапласианды және де сызықты емес демпирлеуші мүшелер арқылы жаңартылған теңдеулер кезінде қысымды анықтау жаңаша әдістерді талап етеді. Есептің берілгендері сәйкес қажетті шарттарды қанағаттандырған кезде, жоғарыдағы аталған біртекті емес (тығыздығы белгісіз әрі тұрақты емес) сығылмайтын тұтқыр серпімді ньютондық емес сұйығының қозғалысын сипаттайтын бейсызықты  $p$ -лапласианды диффузиялы және сызықты емес дәрежелі мүшелі теңдеулер жүйесі үшін қойылған бастапқы-шеттік есептен сұйықтың қысымы бірмәнді анықталуы дәлелденді. Негізгі қолданылған кеңістіктер мен қажетті тұжырымдар енгізілді. Жалпылама әлсіз шешім кеңістігі анықталынды. Қысымды бірмәнді анықтау белгілі де-Рам леммасын қолдану арқылы орнатылды.*

***Түйін сөздер:** Кельвин-Фойгт, біртекті емес сұйықтар, қысымды табу,  $p$ -Лапласиан, де-Раам леммасы.*

**Кіріспе.** Бұл мақалада біртекті емес (тығыздығы белгісіз әрі тұрақты емес) сығылмайтын тұтқыр серпімді ньютондық емес сұйығының қозғалысын сипаттайтын бейсызықты  $p$ -лапласианды диффузиялы және сызықты емес дәрежелі мүшелі теңдеулер жүйесі үшін қойылған бастапқы-шеттік есебінен сұйықтың қысымын бірмәнді анықтау мәселесі қарастырылады.

**Есептің қойылымы.** Айталық  $\Omega - R^d$ ,  $d \geq 2$  евклидтік кеңістігіндегі шенелген, шекарасы  $\partial\Omega$  жеткілікті жатық облыс болсын. Бекітілген ақырлы  $T > 0$  саны үшін  $Q_T := \Omega \times (0, T)$  арқылы шенелген цилиндрлік облысын, ал  $\Gamma_T := \partial\Omega \times (0, T)$  арқылы оның бүйір бетін белгілейік. Осы  $Q_T$  цилиндрінде біртекті емес (тығыздығы белгісіз әрі тұрақты емес) сығылмайтын тұтқыр серпімді Кельвин-Фойгт сұйығының қозғалысын сипаттайтын [1-3] келесі сызықты емес,  $p$ -лапласианды диффузиялы және сызықты емес дәрежелі мүшелі

$$\rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = \rho\mathbf{f} - \nabla\pi + \operatorname{div}(\mu|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^{p-2}\mathbf{D}(\mathbf{v}) + \kappa\mathbf{D}(\mathbf{v}_t)) + \gamma|\mathbf{v}|^{m-2}\mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (2)$$

$$\rho_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (3)$$

теңдеулер жүйесін,

$$\mathbf{v}\rho = \mathbf{v}_0\rho_0, \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0, \mathbf{x} \in \Omega, t = 0 \quad (4)$$

бастапқы шарттарын және

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (5)$$

шекаралық шарттарын қанағаттандыратын  $(\mathbf{v}, \nabla \pi, \rho)$  функцияларын анықтау есебін қарастырайық. Мұндағы  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  - векормәнді функция сұйықтың жылдамдығын, ал скаляр мәнді  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  және  $\pi = \pi(\mathbf{x}, t)$  функциялары сәйкес сұйықтың тығыздығы мен қысымын белгілейді. Сонымен қатар бастапқы жылдамдық  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ , сыртқы күштердің тығыздығы  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  және бастапқы тығыздық  $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{x})$  берілген функциялар болса, тұтқырлықтың кинематикалық және релаксациялық коэффициенттері болатын  $\mu, \kappa > 0$  және көрсеткіштер  $p > 1$  және  $m > 1$  сандары берілген оң белгілі тұрақтылар. Теңдеудегі  $\gamma$  коэффициенті оң да теріс те болуы мүмкін және ол оң болса онда  $\gamma |\mathbf{v}|^{m-2} \mathbf{v}$  мүшесі сызықты емес сыртқы күш, ал теріс болса абсорбциялық әсер

етеді [1]. Сонымен қатар,  $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ ,  $\nabla \mathbf{v} = \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]$ , жылдамдықтың дефор-

мация тензоры.

Жалпы біртекті емес сұйықтар үшін гидродинамика теңдеулеріне, оның ішінде ньютондық сұйықтар, атап айтқанда Навье-стокс теңдеулері үшін қойылған әртүрлі қойылымдағы бастапқы-шеттік есептер көптеген жұмыстарда зерттелініп келеді. Олардың негізгі және алғашқылары ретінде [4] -[7] жұмыстарды айтуға болады.

Соңғы жылдары ғылым мен техниканың қарқынды әрі жан жақты зерттеулеріне байланысты сұйықтың серпімділік, релаксациялық және т.б. біршама қасиеттері ескерілуінен туындаған жаңартылған сызықты емес гидродинамика теңдеулері зерттеліне бастады. Мұндай сұйықтарға ньютондық сұйықтардан өзгеше, «ньютондық емес» деп аталатын сұйықтар жатады. Мұндай ньютондық емес сұйықтардың теңдеуінің қарапайым бір түрі Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі және тығыздығы тұрақты болған кездегі қойылған әртүрлі тура есептер көбінде Осколковтың [8]-[10] жұмыстарында көптеп зерттелінді. Ал біртекті емес сұйықтар үшін р-лапласиан және демпирлеуші мүшелер арқылы модификацияланған сызықты емес Кельвин-Фойгт теңдеулері үшін қойылған тура есептер автордың [11]-[12] жұмыстарында қарастырылды. Атап айтқанда, жоғарыдағы (1)-(5) жүйенің  $p = 2$  және  $\gamma = 2$  болған кездегі бірімәнді шешімділігі, шешімнің регулярлығы автордың [12] бірлескен мақаласында жарық көрген. Ал [11] бірлескен мақалада (1)-(5) жүйенің жалпылама әлсіз шешімінің және  $\gamma$  коэффициентінің таңбасына байланысты локальды және глобальды бар болуы орнатылған. Алайда, гидродинамика теңдеулерінің жалпылама әлсіз шешімі (2) теңдеу бойынша соленоидальды кеңістікте қарастырылатындықтан, қысым шешім ретінде қарастырылмайды. Әдетте, қысым сұйықтың жылдамдығы мен тығыздығы анықтағаннан кейін классикалық жағдайда  $\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) \otimes \mathbf{G}(\Omega)$

кеңістігінің тіке ортогонал кеңістікке жіктелу теоремасы арқылы анықталады. Ал р-лапласианды және де сызықты емес демпирлеуші мүшелердің болған кезде бұл классикалық әдіс қолданыныс таппайды. Жоғарыдағы [11] жұмыста қысымды анықтау мәселесі ашық сұрақ ретінде қалды. Міне бұл жұмыста осы сұраққа жауап берілетін болады, сұйықтар механикасының математикалық теориясында жиі қолданылатын [13-14] төмендегі кеңістіктер мен олардың белгілеулері қолданылады:

Есептегі берілген сыртқы күштердің тығыздығы

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(Q_T) \tag{6}$$

кеңістігінде болсын деп қабылдайық.

**Анықтама 1.** Айталық  $d \geq 2$  және  $1 < p, m < \infty$  болсын, бұларға қоса (1.4) шарты орындалсын.  $(\mathbf{v}, \rho)$  жұбы (1)-(4) бастапқы шеттік есебінің жалпылама әлсіз шешімі деп аталады, егер бұл функциялар келесі шарттар орындалса:

- $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}(\Omega)) \cap L^p(0, T; \mathbf{V}_p(\Omega)) \cap \mathbf{L}^m(Q_T);$

- $\rho > 0$  б.д.  $Q_T, \rho \in C([0, T]; L^\lambda(\Omega)) \forall \lambda \in [1, \infty)$  және  $\rho|\mathbf{v}|^2 \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega));$

- $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \rho(0) = \rho_0, \rho_0 \geq 0$  б.д.  $\Omega$  облысында;

4. Кез келген  $\phi \in V$  тест функциясы және барлық дерлік (б.д.)  $t \in [0, T]$  үшін

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho(t) \mathbf{v}(t) \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{x} + 2\kappa \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) : \nabla \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{x} \right) + \\ & 2\mu \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{v}(t))|^{p-2} \mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) : \nabla \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \rho(t) \mathbf{v}(t) \otimes \mathbf{v}(t) : \nabla \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{x} = \tag{7} \\ & \int_{\Omega} \rho(t) \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} |\mathbf{v}(t)|^{m-2} \mathbf{v}(t) \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{x}; \end{aligned}$$

және кез келген  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  функциясы және барлық дерлік (б.д.)  $t \in [0, T]$  үшін

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(t) \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \rho(t) \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x} = 0. \tag{8}$$

**Қосымша қажетті мәліметтер.**

Бұған дейінгі жарық көрген автордың мақаласында жоғардағы (1)-(4) есебінің жалпылама әлсіз шешімінің бар болуы дәлелдеген, яғни келесі теоремалар алынған:

**Теорема 1** ([11]). Айталық есептің бастапқы берілгендері (7) және келесі шарттарды қанағаттандырсын:

$$\exists M_1, M_2, M_1 \leq M_2: 0 < M_1 := \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \rho_0(\mathbf{x}) \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \rho_0(\mathbf{x}) =: M_2 < \infty, \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \tag{9}$$

$$\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{V}_p(\Omega) \cap \mathbf{L}^m(\Omega). \tag{10}$$

Бұларға қоса,  $\gamma \leq 0$  кезде келесі шарттардың бірі орындалсын:

$$2 \leq d \leq 4 \text{ және } p > 1, \tag{11}$$

$$d \geq 4 \text{ және } p \geq \frac{d}{2}, \tag{12}$$

$$d \leq m \text{ және } \gamma \neq 0, \tag{13}$$

Егер,

$$\max\{2, p\} > \frac{4d}{d+4} \tag{14}$$

болса, онда (1)-(5) есебінің ең болмағанда бір  $(\mathbf{v}, \rho)$  шешімі табылады және ол үшін келесі бағалаулар орынды болады

$$0 < M_1 \leq \rho(\mathbf{x}, t) \leq M_2 < \infty \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \tag{15}$$

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|\mathbf{v}(t)\|_{2, \Omega}^2 + \|\nabla \mathbf{v}(t)\|_{2, \Omega}^2) + \|\nabla \mathbf{v}\|_{p, Q_T}^p + \|\mathbf{v}\|_{m, Q_T}^m \leq C_1, \tag{16}$$

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|\nabla \mathbf{v}(t)\|_{p, \Omega}^p + \|\mathbf{v}(t)\|_{m, \Omega}^m) + \|\mathbf{v}_t\|_{2, Q_T}^2 + \|\nabla \mathbf{v}_t\|_{2, Q_T}^2 \leq C_2 \tag{17}$$

мұндағы  $C_1$  және  $C_2$  есептің берілгендерінен ғана тәуелді оң тұрақты сандар.

**Теорема 2** ([11]). Айталық,  $\gamma > 0$  болсын. Бұл кезде де жоғарыдағы (6), (9)-(10) және (14) ұйғарымдарына қоса (11)-(13) шарттарының бірі орындалсын. Егер бұлармен қатар

$$m \leq 2 \text{ және } 2(m - 1) \leq p^* \tag{18}$$

немесе

$$2 < m < p, \tag{19}$$

шарттарының бірі орындалса, онда (1)-(5) есебінің ең болмағанда бір  $(\mathbf{v}, \rho)$  шешімі табылады және ол үшін (15)-(17) бағалаулары орынды болады.

Қысымды анықтау келесі де-Раам леммасын қолдану арқылы дәлелденеді және бұл лемманың дәлелдеуін Боговскийдің [15], Пилескастың [16] және Галдидің [17] (мәселен, Theorems III.3.1 and III.5.3) жұмыстарынан табуға болады.

**Лемма 1 (де-Раам)** Айталық  $1 < \eta < \infty$  және  $\boldsymbol{\varphi}^* \in (\mathbf{W}_0^{1, \eta}(\Omega))' = \mathbf{W}^{-1, \eta'}(\Omega)$  болсын. Егер кез келген  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^\eta$  үшін

$$\langle \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathbf{W}^{-1, \eta'}(\Omega) \times \mathbf{W}_0^{1, \eta}(\Omega)} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^\eta, \tag{20}$$

теңдігі орындалса, мұндағы  $\mathbf{V}^\eta := \overline{\mathbf{W}^{1, \eta}(\Omega)}$   $\mathcal{V}$  кеңістігінің  $\mathbf{W}^{1, \eta}(\Omega)$  кеңістігіндегі тұйықтауы. Онда  $\int_{\Omega} u dx = 0$  шарты орындалатындай бір  $u \in L^1(\Omega)$ , функциясы табылып, келесі теңдік орынды болады

$$\langle \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathbf{W}^{-1, \eta'}(\Omega) \times \mathbf{W}_0^{1, \eta}(\Omega)} = \int_{\Omega} u \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} dx \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_0^{1, \eta}(\Omega).$$

және ол үшін келесі бағалау орынды



$$\| u \|_{L^{\eta}(\Omega)} \leq C \| \boldsymbol{\varphi}^* \|_{\mathbf{W}^{-1,\eta'}(\Omega)}.$$

**Негізгі нәтиже.** Бұл бөлімде (1)-(5) есебінің қойылымынан, яғни (7) теңдіктен  $\pi$  қысымды бірмәнді анықтау зерттелінеді.

**Теорема 3.** Айталық  $\Omega - R^d, d \geq 2$ , кеңістігіндегі шенелген және  $\partial\Omega$  шекарасы Липицц-үзіліссіз болатын облыс, ал  $(\mathbf{v}, \rho)$  жұбы (1)-(5) есебінің Теорема 1 және 2 дәлелденген жалпылама әлсіз шешімі болсын. Онда, барлық  $t \in [0, T]$  үшін қандай да бір  $r$  саны (төменде (25) формуласымен анықталған) саны және  $\int_{\Omega} \pi(t) dx = 0$  теңдігі орындалатындай бір ғана  $\pi \in C_w([0, T]; L^{r'}(\Omega))$  функциясы табылып

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} [\rho(t)\mathbf{v}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} + 2\kappa \mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) : \nabla \boldsymbol{\varphi}] dx +$$

$$\int_{\Omega} [2\mu |\mathbf{D}\mathbf{v}|^{p-2} \mathbf{D}\mathbf{v} - \rho(t)\mathbf{v}(t) \otimes \mathbf{v}(t)] : \nabla \boldsymbol{\varphi} dx - \tag{21}$$

$$\int_{\Omega} [\rho(t)\mathbf{f}(t) + \gamma |\mathbf{v}(t)|^{m-2} \mathbf{v}(t)] \cdot \boldsymbol{\varphi} dx = \int_{\Omega} \pi(t) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} dx, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_0^{1,r}(\Omega)$$

тепе-теңдігін  $[0, T]$  аралығында үлестіру (әлсіз) мағынасында қанағаттандырады. Сонымен қоса,  $C = C(M_2, d, p, r, m, \kappa, \mu, \Omega, T)$  оң саны табылып, келесі бағалау орынды болады

$$\| \pi \|_{L^{\infty}(0,T;L^{r'}(\Omega))} \leq C \left( \| \mathbf{v}_0 \|_{\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)} + \| \mathbf{v} \|_{L^{\infty}(0,T;\mathbf{W}^{1,2}(\Omega))} + \| \nabla \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}^{p-1}(Q_T)} + |\gamma| \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}^{m-1}(Q_T)} + \| \mathbf{f} \|_{\mathbf{L}^2(Q_T)} \right). \tag{22}$$

*Дәлелдеуі.* Жоғарыдағы (7) теңдігін  $\xi \in C_0^{\infty}(0, T)$  функциясына көбейтіп нәтижесін  $[0, T]$  аралығында интегралдасак

$$- \int_0^T \alpha \xi' dt = \int_0^T \beta \xi dt,$$

аламыз, мұндағы  $\xi' - \xi$  функциясының туындысы және

$$\alpha(t) := \int_{\Omega} \rho(t)\mathbf{v}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} dx + 2\kappa \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) : \nabla \boldsymbol{\varphi} dx, \tag{23}$$

$$\beta(t) := - \int_{\Omega} \mathbf{Q}(t) : \nabla \boldsymbol{\varphi} dx, \tag{24}$$

$$\mathbf{Q}(t) := 2\mu |\mathbf{D}(\mathbf{v}(t))|^{p-2} \mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) - \rho(t)\mathbf{v}(t) \otimes \mathbf{v}(t) + \mathbf{F}(t), \quad t \in [0, T],$$

мұндағы  $\mathbf{F}(t)$  келесідей екінші ретті тензор мәнді функция

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(t) = \rho(t)\mathbf{f}(t) + \gamma |\mathbf{v}(t)|^{m-2} \mathbf{v}(t), \quad t \in [0, T].$$

Біз алда

$$\mathbf{Q} \in \mathbf{L}^{r'}(Q_T), \quad r \geq \max\{2, p, r_1, r_2\} \quad \text{егер } d > 2, \quad (25)$$

орындалатынын талап етеміз, яғни көрсетеміз, мұндағы

$$2r_1 = \min \left\{ \frac{pd}{pd-2(d-2)}, \frac{m}{m-2} \right\} \quad \text{if } \gamma \neq 0 \quad \text{және } m > 2,$$

немесе

$$r_1 = \frac{pd}{pd-2(d-2)} \quad \text{егер } \gamma = 0 \quad \text{немесе } m \leq 2;$$

немесе

$$r_2 = \min \left\{ \frac{pd}{pd-(m-1)(d-2)}, m \right\} \quad \text{егер } \gamma \neq 0,$$

$$r_2 = 1 \quad \text{егер } \gamma = 0$$

Егер  $d = 2$  болса, онда (25) енгізуі барлық  $r \geq \max\{2, p\}$  үшін орындалады.

Бұл (25) енгізуін көрсету үшін параболалық интерполяциядан шығатын

$$L^\infty(0, T; \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)) \cap L^p(0, T; \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow \mathbf{L}^\lambda(Q_T), \quad \lambda = \frac{pd}{d-2}, \quad d > 2. \quad (26)$$

үзіліссіз енгізуінің орындалатынын ескереміз. Бұл (25) енгізуі  $d = 2$  жағдайда кез келген  $\lambda \geq$  үшін орынды болады. Енді (26) және (15) мәліметтерін ескере отырып, Гельдер теңсіздігі арқылы келесі теңсіздіктерді аламыз

$$\| |\mathbf{Dv}|^{p-2} \mathbf{Dv} \|_{\mathbf{L}^{r'}(Q_T)} \leq \| \mathbf{Dv} \|_{\mathbf{L}^{(p-1)r'}(Q_T)}^{p-1} \leq C_1 \| \mathbf{Dv} \|_{\mathbf{L}^p(Q_T)}^{p-1}, \quad r \geq p, \quad (27)$$

$$\| \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}^{r'}(Q_T)} \leq M_2 \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}^{2r'}(Q_T)}^2 \leq \begin{cases} C_2 \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}^\rho(Q_T)}^2, & r \geq \frac{pd}{pd-2(d-2)}, \quad \text{немесе} \\ C_2, \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}^m(Q_T)}^2, & r \geq \frac{m}{m-2}, \quad m > 2, \end{cases} \quad (28)$$

$$\| \rho \mathbf{f} \|_{\mathbf{L}^{r'}(Q_T)} \leq M_2 \| \mathbf{f} \|_{\mathbf{L}^{r'}(Q_T)} \leq C_3 \| \mathbf{f} \|_{\mathbf{L}^2(Q_T)}, \quad r \geq 2, \quad (29)$$

$$\| |\mathbf{v}|^{m-2} \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}^{r'}(Q_T)} \leq \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}^{(m-1)r'}(Q_T)}^{m-1} \leq \begin{cases} C_4 \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}^\rho(Q_T)}^{m-1}, & r \geq \frac{pd}{pd-(m-1)(d-2)}, \\ C_4, \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}^m(Q_T)}^{m-1}, & r \geq m, \end{cases} \quad (30)$$

мұндағы  $C_1 = C(p, r, \Omega, T)$ ,  $C_2 = C(M_2, d, p, r, \Omega, T)$ ,  $C_2' = C(M_2, r, m, \Omega, T)$ ,  $C_3 = C(M_2, r, \Omega, T)$ ,  $C_4 = C(d, p, r, \Omega, T)$  және  $C_4' = C(r, m, \Omega, T)$  тұрақтылары оң және есептің берілгендерінен ғана тәуелді сандар. Екіншіден, (26), (15)-(17) бойынша (1)-

(5) есебінің кез келген  $\mathbf{v}$  әлсіз шешімі  $\gamma = 0$  болса  $\mathbf{L}^\lambda(Q_T)$  кеңістігінде, ал  $\gamma \neq 0$  болғанда  $\mathbf{L}^{\lambda^*}(Q_T)$   $\lambda^* = \max\{\lambda, m\}$ , кеңістігінде шенелген болады.

Сондай ақ, Соболевтің енгізуін (29) және (30) теңсіздіктерімен біріктіріп,  $\mathbf{F}$  функциясының  $\mathbf{L}^{r'}(Q_T)$ -де шенелгенін көруге болады. Бұдан жоғарыдағы (25) талабымыз орындалғаны шығады және де  $\beta \in L^{r'}(0, T)$ . Демек,  $\alpha \in W^{1,r'}(0, T)$  және  $\alpha' = \beta$ . Дербес жағдайында,  $\alpha$ - Соболевтің ену теоремасы бойынша қайтадан  $\alpha$  арқылы белгіленген үзіліссіз функциямен өрнектеуге болады, яғни  $\alpha' = \beta$  теңдігін интегралдасак

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \beta(s) ds \quad \forall t \in (0, T) \tag{31}$$

аламыз. Келесі функцияны қарастырайық

$$\mathbf{R}(t) := \int_0^t \mathbf{Q}(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Кез келген таңдап алынған  $t$  үшін бұл функцияны (23)-(24) бірге қолданып, (31) қайта жазатын болсақ, онда

$$\int_{\Omega} [\rho(t)\mathbf{v}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} + 2\kappa\mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) : \nabla\boldsymbol{\varphi} - (\rho(0)\mathbf{v}(0) \cdot \boldsymbol{\varphi} + 2\kappa\mathbf{D}(\mathbf{v}(0)) : \nabla\boldsymbol{\varphi}) + \mathbf{R}(t) : \nabla\boldsymbol{\varphi}] dx = 0.$$

теңдігіне келеміз. Бұған  $\eta = r'$ , мұнда  $r$  жоғарыда (25) формуламен анықталған сан, және

$\boldsymbol{\varphi}^* := \rho(t)\mathbf{v}(t) - \rho(0)\mathbf{v}(0) - 2\kappa\text{div}(\mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) - \mathbf{D}(\mathbf{v}(0))) - \text{div}(\mathbf{R}(t))$ , үшін де-Раам леммасын қолдансақ, онда Лемма 1 тұжырымы бойынша  $\int_{\Omega} \pi(t) dx = 0$  және

$$\int_{\Omega} [\rho(t)\mathbf{v}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} + 2\kappa\mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) : \nabla\boldsymbol{\varphi} - (\rho(0)\mathbf{v}(0) \cdot \boldsymbol{\varphi} + 2\kappa\mathbf{D}(\mathbf{v}(0)) : \nabla\boldsymbol{\varphi}) + \mathbf{R}(t) : \nabla\boldsymbol{\varphi}] dx = \int_{\Omega} \pi \text{div}\boldsymbol{\varphi} dx \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_0^{1,r'}(\Omega). \tag{32}$$

теңдігі орындалатындай бір ғана  $\pi(t) \in L^{r'}(\Omega)$  функциясы табылады. Сонымен қатар ол үшін

$$\|\pi(t)\|_{L^{r'}(\Omega)} \leq C(\|\rho(t)\mathbf{v}(t) - \rho(0)\mathbf{v}(0)\|_{L^{r'}(\Omega)} + \|\mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) - \mathbf{D}(\mathbf{v}(0))\|_{L^{r'}(\Omega)} + \|\mathbf{R}(t)\|_{L^{r'}(\Omega)}). \tag{33}$$

Бағалауы орынадалады.

**Ескерту.** Жалпы сұйық механиканың негізгі қолданыстары үшін (1) теңдеуіндегі  $\gamma = 0$  жағдайы маңыздырақ болып келеді. Бұл жағдайда Теорема 3 тұжырымы  $d >$

2 болғанда  $r \geq \max\left\{2, p, \frac{pd}{pd - 2(d - 2)}\right\}$ , ал  $d = 2$  болғанда  $r \geq \max\{2, p\}$  саны үшін

орынды болып қалады.

Бұл жұмыс ҚР БҒМ ҒК номері AP08052425 гранттық жобасы аясында қаржыландырылып, орындалды.

### ӘДЕБИЕТ

1 Павловский В.А. К теоретическому описанию слабых водных растворов полимеров // Докл. Акад. АН СССР, – № 200(4), – 1971, – С.: 809–812.

2 Осколков А.П. Единственность и разрешимость в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Зап. Наук. Сем. ЛОМИ, – №38, – 1973. – С.: 98–136.

3 Zvyagin V.G and Turbin M.V., Investigation of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids, J. Math. Sci., –№168(2), – 2010. – С.: 57–308.

4 Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / Наука, Новосибирск, – 1983.

5 Jacques Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure // SIAM J. Math. Anal. – V. 21(5), – P.: 1093–1117.

6 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Ч. 8, Зап. научн. Сем. ЛОМИ, – №52, – 1975, – С.: 52-109.

7 Lemoine J. On non-homogeneous viscous incompressible fluids. Existence of regular solutions // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, – №38(4), – 1997, – С.: 697-715.

8 Осколков А.П. Некоторые модельные нестационарные системы в теории неньютоновских жидкостей // Тр. Мат. Инст. Стеклова. – №127, – 1975. – С.: 32–57.

9 Oskolkov A.P. On the theory of unsteady flows of Kelvin–Voigt fluids // J. Math. Sci. – №28(5) – 1985, – P.: 751–758.

10 Oskolkov A.P. Nonlocal problems of motion for equations of the Kelvin–Voigt fluids // J. Math. Sci. – №75(6), – 1995. – P.: 2058 – 2078.

11 Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. Generalized Kelvin-Voigt equations for non-homogeneous and incompressible fluids // Comm. Math. Sci. – №17(7), – 2019, – P.: 1915-1948.

12 Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. The classical Kelvin-Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: Existence, uniqueness and regularity // Nonlinearity, –№34(5), – 2021, – P.: 3083–3111.

13 Ladyzhenskaya O.A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, – 2nd ed., Nauka, Moscow, -1970.

14 Lions J.-L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires / Dunod, Paris, – 1969.

15 Боговский М.Е. Решения некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad. Теория кубатурных формул и применение функционального анализа к задачам математической физики // Тр. сем. С. Л. Соболева, – №1, – 1980, – С.: 128-140.

16 Pileckas K. On spaces of solenoidal vectors // Trudy Mat. Inst. Steklov. – №159, – 1983), – P.: 137–149.

17 Galdi G.P. An introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady-State Problems / Springer, New York, – 2011.

### REFERENCES

1 Pavlovskiy V.A. K teoreticheskomu opisaniyu slabykh vodnykh rastvorov polimerov // Dokl. Akad. AN SSSR, – № 200(4), – 1971, – S.: 809–812.

2 Oskolkov A.P. Yedinstvennost' i razreshimost' v tselom krayevykh zadach dlya uravneniy dvizheniya vodnykh rastvorov polimerov // Zap. Nauk. Sem. LOMI, – №38, – 1973. – S.: 98–136.

3 Zvyagin V.G and Turbin M.V., Investigation of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids, J. Math. Sci., –№168(2), – 2010. – C.: 57–308.

4 Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. Krayevyye zadachi mekhaniki neodnorodnykh zhidkostey / Nauka, Novosibirsk, – 1983.

5 Jacques Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure // SIAM J. Math. Anal. – V. 21(5), – P.: 1093–1117.

6 Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ob odnoznachnoy razreshimosti nachal'no-krayevoy zadachi dlya vyzkikh neszhimayemykh neodnorodnykh zhidkostey // Krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki i smezhnyye voprosy teorii funktsiy. CH. 8, Zap. nauchn. Sem. LOMI, – №52, – 1975, – S.: 52-109.

7 Lemoine J. On non-homogeneous viscous incompressible fluids. Existence of regular solutions // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, – №38(4), – 1997, – C.: 697-715.

8 Oskolkov A.P. Nekotoryye model'nyye nestatsionarnyye sistemy v teorii nen'yutonovskikh zhidkostey // Tr. Mat. Inst. Steklova. – №127, – 1975. – S.: 32–57.

9 Oskolkov A.P. On the theory of unsteady flows of Kelvin–Voigt fluids // J. Math. Sci. – №28(5) – 1985, – P.: 751–758.

10 Oskolkov A.P. Nonlocal problems of motion for equations of the Kelvin–Voigt fluids // J. Math. Sci. – №75(6), – 1995. – P.: 2058 – 2078.

11 Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids // Comm. Math. Sci. – №17(7), – 2019, – P.: 1915-1948.

12 Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. The classical Kelvin-Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: Existence, uniqueness and regularity // Nonlinearity, –№34(5), – 2021, – P.: 3083–3111.

13 Ladyzhenskaya O.A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, – 2nd ed., Nauka, Moscow, -1970.

14 Lions J.-L. Quelques m'ethodes de r'esolution des probl'emes aux limites non lin'caires / Dunod, Paris, – 1969.

15 Bogovskiy M.Ye. Resheniya nekotorykh zadach vektornogo analiza, svyazannykh s operatorami div i grad. Teoriya kubaturnykh formul i primeneniye funktsional'nogo analiza k zadacham matematicheskoy fiziki // Tr. sem. S. L. Soboleva, – №1, – 1980, – S.: 128-140.

16 Pileckas K. On spaces of solenoidal vectors // Trudy Mat. Inst. Steklov. – №159, – 1983), – P.: 137–149.

17 Galdi G.P. An introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady-State Problems / Springer, New York, – 2011.

## **X. ХОМПЫШ**

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан*

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ**

*Рассматривается начально-краевая задача для системы нелинейных модифицированных с  $p$ -лапласиан диффузией и нелинейным демпфирующим членом уравнений, описывающие движение*

ние неоднородной (с неизвестной и непостоянной плотностью) несжимаемой вязкоупругой не-ньютоновской жидкости. Обычно при определении слабых обобщенных решений уравнений гидродинамики для несжимаемой жидкости давление не включается в определение, поскольку слабые решения рассматриваются в соленоидальном пространстве в силу уравнения несжимаемости (неразрывности). В классических уравнениях гидродинамики после определения скорости и плотности давление определяется, используя теорему о представлении пространства  $L^2(\Omega)$  на прямую сумму двух ортогональных подпространств. Однако восстановление давления из нелинейных уравнений гидродинамики, модифицированные  $p$ -лапласианом и нелинейным демпфирующим членом, требует новых подходов. Здесь, при подходящих условиях, на данные задачи давление однозначно определено из начально-краевой задачи для системы нелинейных модифицированных уравнений, описывающие движение неоднородной (с неизвестной и непостоянной плотностью) несжимаемой вязкоупругой не-ньютоновской жидкости. Описаны основные функциональные пространства и необходимые вспомогательные утверждения. Определено пространство слабых обобщенных решений. С помощью известной леммы де-Рама давление однозначно восстановлено.

**Ключевые слова:** Кельвин-Фойгт, неоднородные жидкости, определение давления,  $p$ -лапласиан, лемма де Рама.

### КН. КНОМПУШ

*Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Kazakhstan*

## DETERMINATION OF PRESSURE FROM NONLINEAR EQUATIONS OF NONHOMOGENEOUS NON-NEWTONIAN FLUIDS

*In this paper, the initial-boundary problem for a system of nonlinear equations modified by  $p$ -laplacian diffusion and nonlinear damping term, in which describe the motion of a non-homogeneous (with unknown and non constant density) incompressible viscoelastic non-Newtonian fluids is considered. Usually, a pressure does not include in the definition of weak generalized solution to equations of hydrodynamics for incompressible fluids, because weak solutions consider in the solenoidal space due to the incompressibility (continuity) equation. In the classical hydrodynamic equations, after determining a velocity and a density, a pressure can be determined by using the theorem of a representation of the space  $L^2(\Omega)$  into the direct sum of two orthogonal subspaces. The recovering of a pressure from the nonlinear equations of hydrodynamics modified by  $p$ -laplacian and nonlinear damping term requires a new approaches. Here, under a suitable conditions on the data of the problem, a pressure has been uniquely determined from the initial-boundary value problem for the system of nonlinear modified equations describing the motion of nonhomogeneous (with unknown and non constant density) incompressible viscoelastic non-Newtonian fluids. The main functional spaces and necessary auxiliary conclusions are introduced. A space of generalized weak solutions is identified. The pressure uniquely recovered by using the known de-Ram lemma.*

**Key words:** Kelvin-Voigt, nonhomogeneous fluids, pressure,  $p$ -Laplacian, de Raam's lemma.



УДК 589.385

<https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.190>

**С. ЖУНИСБЕКОВ\*, С. Ж. ЖАШЕН, Д. К. ДЖАКИЯЕВ, Б. Д. ДЖАКИЯЕВ**

*Таразский региональный университет им. М.Х. Дулати*

### **ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ТРЕНИРОВКИ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ МЕТАЛЛОВ**

*Экспериментально установлено влияние тренировки образцов сталей 45 при циклическом нагружении ниже предела выносливости на циклические долговечности при некоторых сложных режимах нагружения, причем предложен способ учета такой тренировки в энергетическом уравнении поврежденных, для которого построен соответствующий функциональный параметр.*

**Ключевые слова:** *циклическое нагружение, долговечность, сложное циклическое напряженное состояние, энергетическая модель многоциклового усталости.*

Тренировкой называется повышение сопротивления усталости в результате предварительного циклического нагружения ниже предела выносливости. Исследованию влияния тренировки посвящен целый ряд работ [1–4] и др. Результаты большинства из них указывают на то, что предварительное циклическое нагружение ниже предела выносливости увеличивает циклическую долговечность многих сталей на более высоких уровнях напряжений. В работе [3] указывается, что существует критическое напряжение недогрузки, отделяющее область напряжений, совершенно не влияющих на сопротивление усталости, от напряжений, при которых недогрузки повышают предел выносливости. На диаграмме, представленной на рисунке 1, имеется две области, первая из которых не оказывает влияние на сопротивление усталости, а вторая упрочняет материал.

Г.Г. Попов [6] отмечает, что максимальный эффект дает тренировка при напряжениях, близких к пределу выносливости, если напряжения ниже  $(0,8 \div 0,9) \sigma_{-1}$ , то тренировка оказывается безрезультатной. Маринец Т.К. [5] исследовал влияние тренировки в условиях сверхдлительных испытаний. Из его опытов следует, что с увеличением числа циклов предварительного нагружения эффект тренировки увеличивается, пока это число не достигнет 25 млн. Для сталей 20 и 25 25 млн циклов обеспечивает максимальную величину сопротивления усталости, а дальнейшее повышение этого числа до 1500 млн циклов оказались безрезультативными. В работе [1] имеются данные (табл. 1) для образцов стали с содержанием 0,015% С, с пределом прочности  $\sigma_{\text{пч}} = 310$  МПа

---

\* E-mail корреспондирующего автора: tar-ti@mail.ru

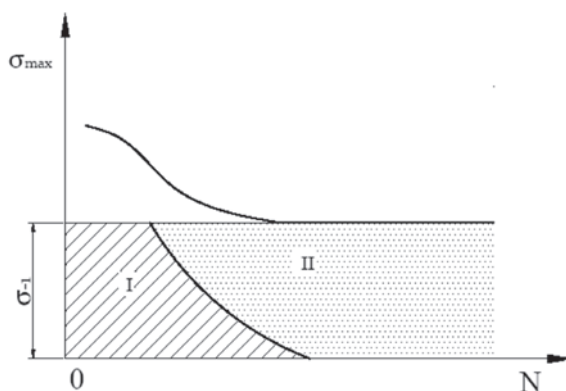


Рисунок 1 – Области упрочнения на диаграмме выносливости

и выносливости  $\sigma_{-1} = 183$  МПа), а также свидетельствующие об увеличении предела выносливости в зависимости от числа циклов предварительного нагружения.

Таблица 1

Число циклов повторения недогрузки при напряжении 140 МПа	$0,5 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^7$	$6 \cdot 10^7$
Увеличение предела выносливости в %	6,1	6,1	6,9	8,0	19,0	23

Нужно отметить, что вышеупомянутые испытания проводились в условиях линейного напряженного состояния. С целью определения эффекта тренировки в испытуемых сталях в условиях сложного напряженного состояния и при напряжениях, составляющих  $(0,8 \div 0,9) \sigma_{-1}$ , нами проводились испытания на установке, описанной в работе [7], а опыты при линейном напряженном состоянии проводились на пульсаторе фирмы Лозенгаузен. При проведении опытов использовались трубчатые и цилиндрические образцы. Экспериментальные кривые усталости и диаграммы предельных амплитуд для  $R = -1$  и  $R = -0,1$ , отвечающие образцам, прошедшим предварительную тренировку, представлены на рисунке 2 и приведены в работе [8]. Для сравнения на том же рисунке нанесены кривые усталости для того же материала без тренировки. Результаты опытов свидетельствуют, что тренировка в течение  $10 \cdot 10^6$  циклов увеличивала число циклов до разрушения примерно на  $20 \div 30$  % по сравнению с образцами, не прошедшими такой тренировки.

Для учета эффекта «тренировки металлов» в энергетическом уравнении поврежденный, разработанном в Санкт-Петербургском политехническом университете (СПбПУ) Петра Великого [8], с использованием кривых усталостей и диаграмм предельных амплитуд, может быть построена серия усталостных кривых для разных коэффициентов  $R$  с учетом тренировки. Для определения функции удельной необратимой работы деформирования  $\varphi(k, R)$  находили параметр

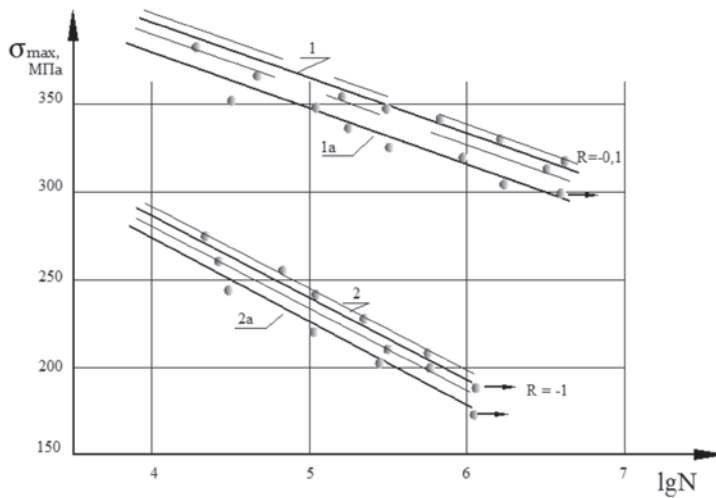


Рисунок 2 – Кривые усталости для стали 45

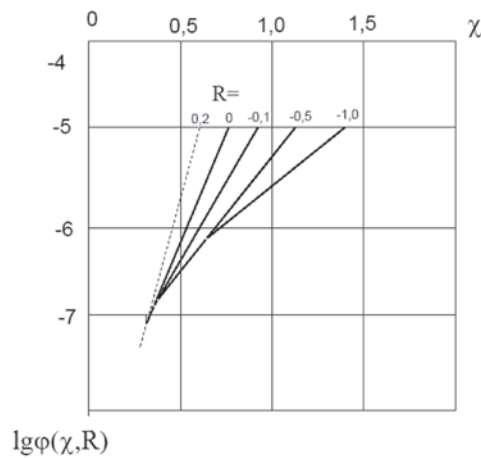


Рисунок 3 – Функция удельной работы деформирования для стали 45

$$k_k = 2 \left( \frac{\sigma_a^{(k)}}{C_2} - 1 \right). \quad (1)$$

Величина  $C_2$  в этой зависимости является экспериментальной постоянной материала, соответствующей его предполагаемому абсолютному пределу выносливости. Эта величина принята равной 90 МПа для стали 10 и 135 МПа для стали 45. Функция  $\varphi(k, R)$  определяется по формуле [8]

$$\varphi(k, R) = \left( 1 - \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_p} \right) \frac{1}{N_p} \quad (1)$$

где  $\sigma_p$  – истинное сопротивление разрыву (680 МПа для стали 10 и 1430 МПа для стали 45). Значения  $\sigma_{\max}$  и  $N_p$  снимались с соответствующих усталостных кривых (рис. 2). На графике (рис. 3) отложены по вертикали в логарифмическом масштабе значения  $\varphi(k, R)$  и по оси абсцисс – значения величин  $N_k$ .

Таким образом, использование графиков функции  $\varphi(k, R)$ , построенные с учетом тренировки при  $\sigma_{\max} = (0,8 \div 0,9)\sigma_{-1}$  позволяет существенно улучшить прогноз разрушающего числа циклов при нестационарном режиме нагружения, включающем такие ступени, на которых максимальное за период цикла напряжение составило  $(0,6 \div 0,9)\sigma_{-1}$ . (т.е. была несколько ниже или того же порядка, что и  $C_2$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1 Расчеты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев и др. ; Под ред. С.Д. Пономарева. – М.: Машгиз, 1959, т. 3. – 1118 с .

2 Ужик Г.В. Методы испытаний металлов и деталей машин на выносливость. –М., Изд-во АН СССР, 1948, – 264 с., ил.

3 Шашин М.Я. Влияние циклических перегрузок и недогрузок на усталость металлов. – Журнал технической физики, 1951, т. XXI, вып. 10, с. 1184-1193.

4 Гольцев Д.И. О приближенной оценке предела выносливости циклически тренированных материалов. – В кн. : Вопросы динамики и динамической прочности. Рига. : Изд-во АН Латвийской ССР, вып.3, 1955.

5 Маринец Т.К. Тренировка в условиях сверхдлительных испытаний. – Тр. Ленингр. Политехн. Ин-та, 1955, № 182, с.141-145.

6 Попов Г.Г. Испытание стали на выносливость с предварительными циклическими перегрузками. В кн. : Вопросы прочности материалов и конструкции, М., изв. АН СССР, 1959, с. 14-35.

7 Павлов П.А., Шерстнев В.А., Касымов У.Т., Жашенов С.Д., Гидропульсационная машина двухстороннего действия. - Информ. листок, ЛенЦНТИ, Л., 1982, № 708-82

8 Жашен С. Ж., Джакияев Д.К., Жунисбеков С., Исследование многоциклового усталости элементов оборудования и машин при сложном напряженном состоянии и нестационарном нагружении. Международный научно-технический журнал. Вестник НИА РК №3( 77), Алматы, 2020. – с. 11-17

## REFERENCES

1 Raschety na prochnost v mashinostroyenii / S.D. Ponomarev. V.L. Biderman. K.K. Likharev i dr. ; Pod red. S.D. Ponomareva. – M.: Mashgiz. 1959. t. 3. – 1118 s .

2 Uzhik G.V. Metody ispytaniy metallov i detaley mashin na vynoslivost. – M.. Izd-vo AN SSSR. 1948. – 264 s.. il.

3 Shashin M.Ya. Vliyaniye tsiklicheskiykh peregruzok i nedogruzok na ustalost metallov. – Zhurnal tekhnicheskoy fiziki. 1951. t. XXI. vyp. 10. s. 1184-1193.

4 Goltsev D.I. O priblizhennoy otsenke predela vynoslivosti tsiklicheski trenirovannykh materialov. – V kn. : Voprosy dinamiki i dinamicheskoy prochnosti. Riga. : Izd-vo AN Latviyskoy SSR. vyp.3. 1955.

5 Marinets T.K. Trenirovka v usloviyakh sverkhdlitelnykh ispytaniy. – Tr. Leningr. Politekhn. In-ta. 1955. № 182. s.141-145.

6 Popov G.G. Ispytaniye stali na vynoslivost s predvaritelnyimi tsiklicheskiymi peregruzkami. V kn.: Voprosy prochnosti materialov i konstruktsii. M... izv. AN SSSR. 1959. s. 14-35.

7 Pavlov P.A., Sherstnev V.A., Kasymov U.T., Zhashenov S.D. Gidropulsatsionnaya mashina dvukhstoronnego deystviya. - Inform. listok. LenTsNTI. L.. 1982. № 708-82

8 Zhashen S. Zh., Dzhakiyayev D.K., Zhunisbekov S. Issledovaniye mnogotsiklovoy ustalosti elementov oborudovaniya i mashin pri slozhnom napryazhennom sostoyanii i nestatsionarnom nagruzhении. Mezhdunarodnyy nauchno-tekhnicheskii zhurnal. Vestnik NIA RK №3( 77). Almaty. 2020. – s. 11-17

**С. ЖҮНИСБЕКОВ, С. Ж. ЖАШЕН, Д. Қ. ЖАҚИЯЕВ, Б. Д. ЖАҚИЯЕВ**

*М. Х. Дулати атындағы Тараз аймақтық университеті*

### **МЕТАЛДАРДЫҢ ШАРШАУҒА ТӨЗІМДІЛІГІНЕ АЛДЫН АЛА ЖАТТЫҒУДЫҢ ӘСЕРІ**

*Болат үлгілерінің күрделі жүктеме режимдерінде алдын-ала төзімділік шегінен төмен циклдік жүктемелеу арқылы циклдік қажу беріктігінің жоғарылауы эксперименталды түрде анықталды және тиісті функционалды параметр тұрғызылып, осындай «алдын-ала жаттықтыруды» зақымданудың энергетикалық теңдеуінде есепке алу әдісі ұсынылды.*

*Түйін сөздер:* циклды жүктеме, төзімділік, күрделі циклды кернеулі күй, көп циклды қажу қирауының энергетикалық моделі.

**S. ZHUNISBEKOV, S. ZH. ZHASHEN, D. K. DZHAKIYAEV, B. D. DZHAKIYAEV**

*M.H.Dulati Taraz Regional University*

### **THE EFFECT OF PRE-TRAINING ON METAL FATIGUE RESISTANCE**

*The influence of training of samples of steel 45 under cyclic loading below the endurance limit on cyclic durability under some complex loading conditions was experimentally established, and a method was proposed for taking into account such training in the energy damage equation, for which the corresponding functional parameter was constructed.*

*Key words:* cyclic loading, durability, complex cyclic stress state, energy model of high-cycle fatigue.

---

---

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. Абдираман А. С. – Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Astana IT университет, г. Нур-Султан, Казахстан
2. Айтимова У. Ж. – к. ф.-м.н., и.о. доцента кафедры «Информационные системы» Казахского агротехнического университета им. С. Сейфуллина, г. Нур-Султан, Казахстан;
3. Акманбетов Е. Б. – руководитель отдела геоинформационных систем Управления цифровизации и информационной безопасности РГП «Госградкадастр», г. Нур-Султан, Казахстан
4. Алдашева Л. С. – Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Astana IT университет, г. Нур-Султан, Казахстан
5. Алпар С. Д. – д.ф.-м.наук, PhD, Международный университет информационных технологий, г. Алматы, Казахстан
6. Асетбеков А. Б. – Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан
7. Ахмедиярова А. Т. – PhD, Учреждение «Центр научных и научно-технических исследований National Security»
8. Байтемирова Н. Б. – магистр, старший преподаватель, заведующий кафедрой «Программная инженерия», Атырауский университет им. Х.Досмухамедова, г. Атырау, Казахстан
9. Барахнин В. Б. – г.н.с., Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия
10. Бейсенби М. А. – д.т.н., профессор, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан
11. Демеубаева Ж. Е. – PhD докторант Восточно-Казахстанский технический университет имени Д.Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан



12. Джакияев Д. К. – Таразский региональный университет им. М.Х.Дулати, г. Тараз, Казахстан
13. Джакияев Б. Д. – Таразский региональный университет им. М.Х.Дулати, г. Тараз, Казахстан
14. Джумамухамбетов Н. Г. – член-корреспондент НИА РК, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Электроснабжение», НАО Казахский агротехнический университет имени С.Сейфуллина, г. Нур-Султан, Казахстан
15. Ергалиева Б. Б. – докторант 1-го курса по специальности «Информационная безопасность», ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан
16. Жакебаев Д. Б. – Национальная инженерная академия Республики Казахстан, г. Алматы, Казахстан
17. Жашен С. Ж. – Таразский региональный университет им. М.Х.Дулати, г. Тараз, Казахстан
18. Жумали А. С. – Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
19. Жунисбеков С. – Таразский региональный университет им. М.Х.Дулати, г. Тараз, Казахстан
20. Задагали А. М. – докторант кафедры «Общая биология и геномика» Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан
21. Исмаилова А. – Абжаппаровна PhD, ассоциированный профессор кафедры «Информационные системы» Казахского агротехнического университета им. С. Сейфуллина, г. Нур-Султан, Казахстан
22. Ихсанов С. Ш. – докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
23. Кабанихин С. И. – член-корреспондент РАН, профессор, д. ф.-м.н., гнс Лаборатории обратных задач естествознания, НГУ, г. Новосибирск, Россия
24. Какимжанов Е. Х. – и.о. доцента кафедры картографии и геоинформатики, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

- 
25. Касенов С. Е. – Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
26. Кожобекова А. Е. – магистр информатики, старший преподаватель кафедры «Информатика» Южно-Казахстанского университета им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан
27. Кульжанов Д. У. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Электроснабжение» НАО «Атырауский Университет нефти и газа им. С. Утебаева», г. Атырау, Казахстан
28. Куракбаева С. Д. – к.т.н., ассоциированный профессор кафедры «Информационные системы» Южно-Казахстанского университета им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан
29. Криворотько О. И. – Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия
30. Кубегенова А. Д. – НАО «Западно-Казахстанский аграрно-технический университет имени Жангир хана», г. Уральск, Казахстан
31. Маймұрынова А. А. – магистр технических наук, ст. преподаватель, докторан ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан
32. Мансурова М. Е. – заведующая кафедрой «Искусственный интеллект и Big Data», доцент, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
33. Махатова А. Х. – магистр естествознания, старший преподаватель кафедры «Информатика» Южно-Казахстанского университета им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан
34. Мусабаев Т. Т. – доктор технических наук, академик НИА РК, профессор ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Заслуженный работник науки, Почетный строитель и Почетный архитектор Казахстана, Генеральный директор РГП «Госградкадастр», г. Нур-Султан, Казахстан
35. Мусабеков А. А. – к.т.н., ассоциированный профессор, заведующий кафедрой «Автоматизация, телекоммуникация и управление» Южно-Казахстанского университета им. М.Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан

36. Молдашева Р. Н. – докторант кафедры «Информационные системы» Казахского агротехнического университета им. С. Сейфуллина, г. Нур-Султан, Казахстан
37. Назарова К. Ж. – кандидат физ.-матем. наук, доцент, Международный казахско-турецкий университет, г. Туркестан, Казахстан
38. Ниеттесова А. Р. – ведущий специалист отдела геоинформационных систем Управления цифровизации и информационной безопасности РГП «Госградкадастр», г. Нур-Султан, Казахстан
39. Нурушева А. М. – Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилев, Astana IT университет, г. Нур-Султан, Казахстан
40. Нурушева Ж. Т. – ГКП на ПВХ «Областной центр по профилактике и борьбе со СПИД» Управления здравоохранения акимата Западно-Казахстанской области, г. Уральск, Казахстан
41. Нысанов Е. А. – д.ф.-м.н., профессор кафедры «Информатика» Южно-Казахстанского университета им. М.Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан
42. Оспан А. Г. – преподаватель кафедры «Искусственный интеллект и Big Data», PhD, студент 3 курса, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
43. Оспанов Р. М. – заместитель декана факультета информационных технологий ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан
44. Раджабов Н. – д.ф.-м.н., профессор, Таджикский национальный университет, г. Душанбе, Таджикистан
45. Рысбайұлы Б. – д.ф.-м.н., профессор, PhD, Международный университет информационных технологий, г. Алматы, Казахстан
46. Сейткулов Е. Н. – к.ф.-м.н., профессор кафедры «Информационная безопасность», директор НИИ информационной безопасности и криптологии ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан

- 
47. Сарсенов Н. М. – магистр энергетики, старший преподаватель кафедры «Электроснабжение» НАО «Атырауский Университет нефти и газа им. С. Утебаева», г. Атырау, Казахстан
48. Тасмамбетов Ж. Н. – д.ф.-м.н., профессор, Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, г. Актобе, Казахстан
49. Такуадина А. И. – НАО «Медицинский Университет Караганды», г. Караганда, Казахстан
50. Темирбеков А. Н. – Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
51. Темирбеков Н. М. – доктор физико-математических наук, профессор, вице-президент НИА РК, г. Алматы, Казахстан
52. Темирбекова Л. Н. – PhD, старший преподаватель кафедры информатики и информатизации образования КазНПУ им.Абая, Алматы, Казахстан;
53. Убаева Ж. К. – Phd докторант, Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, г. Актобе, Казахстан
54. Усманов К. И. – кандидат физ.-матем. наук., доцент, Международный казахско-турецкий университет, г. Туркестан, Казахстан
55. Шадибеков К. – магистр, Международный казахско-турецкий университет, г. Туркестан, Казахстан
56. Хомпыш Х. – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики Казахского национального университета имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
57. Эльдарова Э. Э. – PhD докторант, Евразийский национальный университет имени Л.Ю.Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан
58. Яшков В. А. – к. т. н., профессор кафедры «Электроснабжение» НАО «Атырауский Университет нефти и газа им. С. Утебаева», г. Атырау, Казахстан

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Б. Т. Жумагулов. Хорошая воля – развитию и консолидации .....</i>	5
--	---

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

<i>А.С. Абдираман, А. М. Нурушева, Л. С. Алдашева. Анализ методов оценки уровня информационной безопасности объектов информационно-коммуникационной инфраструктуры .....</i>	8
--	---

<i>А. Б. Асетбеков. Возможности прогрессивных веб-приложений стать альтернативой мобильным приложениям .....</i>	17
--	----

<i>А. Д. Кубегенова, А. И. Такуадина, О. И. Криворотько, Ж. Т. Нурушева. Технология интеллектуального анализа в прогнозировании эпидемиологической ситуации по ВИЧ-инфекции в Западно-Казахстанской области .....</i>	28
---	----

<i>Р. Н. Молдашева, А. А. Исмаилова, А. М. Задагали. Признаки стабильности водных экосистем в математических моделях .....</i>	43
--	----

<i>Т. Т. Мусабаев, Е. Б. Ақманбетов, А. Р. Ниеттесова. Мониторинг состояния инженерных коммуникаций беспилотными летательными аппаратами .....</i>	49
--	----

<i>Е. А. Нысанов, С. Д. Куракбаева, А. Х. Махатова, А. Е. Кожобекова, А.А. Мусабеков. Компьютерное моделирование и описание распада альфа-частиц и разделения изотопов .....</i>	59
--	----

<i>А. Г. Оспан, М. Е. Мансурова, Е. Х. Какимжанов, С. Ш. Иксанов, В.Б. Баракнин. Разработка программы интеграции социально-экономических показателей с пространственными данными для анализа уровня жизни населения Казахстана .....</i>	67
--	----

<i>Е. Н. Сейткулов, Р. М. Оспанов, Б. Б. Ергалиева, А. Т. Ахмедиярова. Алгебраические методы генерации оптимальных s-блоков .....</i>	79
---	----

<i>Э. Э. Эльдарова, Н. Б. Байтемиров. Повышение визуального качества размытых цифровых изображений .....</i>	89
--	----

### ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>М. А. Бейсенби, А. А. Маймурынова. Решение задачи синтеза основного контура системы адаптивного управления неустойчивыми и детерминированными хаотическими процессами с m-входами и n-выходами в классе катастроф «гиперболическая омбилика» .....</i>	99
---	----

<i>Н. Г. Джумамухамбетов, В. А. Яшков Д. У. Кульжанов, Н. М. Сарсенов. Живучесть систем электропередач в условиях резкоконтинентального климата атырауского региона Республики Казахстан .....</i>	110
--	-----

<i>Д. Б. Жакебаев, А. С. Жумали.</i> Моделирование разделения четырехкомпонентных смесей методами фазового поля и LB .....	119
<i>К. Ж. Назарова, К. Ш. Усманов, К. М. Шадибеков.</i> Критерий однозначной разрешимости многоточечной краевой задачи для систем интегродифференциальных уравнений с инволюцией .....	128
<i>Н. Раджабов, Ж. Н. Тасмамбетов, Ж. К. Убаева.</i> Особенности решения систем типа Клаузена .....	137
<i>Б. Рысбайұлы, С. Д. Алпар.</i> Нелинейная обратная задача нахождения теплофизических характеристики .....	148
<i>Н. М. Темирбеков, С. И. Кабанихин, Л. Н. Темирбекова, Ж. Е. Демеубаева.</i> Интегральное уравнение Гельфанда-Левитана для решения коэффициентной обратной задачи .....	158
<i>А. Н. Темирбеков, С. Е. Касенов.</i> Численная реализация метода фиктивных областей для уравнения эллиптического типа .....	168
<i>Х. Хомпыш.</i> Определение давления из нелинейных уравнений неоднородных неньютоновских жидкостей .....	182
<b>ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ</b>	
<i>Д. К. Джакияев, С. Жунисбеков, С. Ж. Жашен, Б. Д. Джакияев.</i> Влияние предварительной тренировки на сопротивление усталости металлов .....	192
<b>СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ</b> .....	197



## CONTENTS

<i>B. T. Zhumagulov.</i> Goodwill – development and consolidation .....	5
---	---

### INFORMATION TECHNOLOGY

<i>A. S. Abdiraman, A. M. Nurusheva, L. S. Aldasheva.</i> Analysis of methods for information security level assessment of information and communication infrastructure objects .....	8
---	---

<i>A. B. Assetbekov.</i> Progressive web applications capabilities to become an alternative to mobile applications. ....	17
--	----

<i>A. D. Kubegenova, A. I. Takuadina, O. I. Krivorotko, Zh. T. Nurusheva.</i> The technology of intelligent analysis in predicting the epidemiological situation of HIV infection in the West Kazakhstan region .....	28
---	----

<i>R. Moldasheva, A. Ismailova, A. Zadagali.</i> Signs of stability of aquatic ecosystems in mathematical models .....	43
--	----

<i>T. T. Mussabayev, E. B. Akmanbetov, A. R. Niettesova.</i> Monitoring of the state of engineering communications by unmanned aerial vehicles .....	49
--	----

<i>E. A. Nysanov, S. D. Kurakbayeva, A. Kh. Makhatova, A. E. Kozhabekova, A. A. Musabekov.</i> Computer simulation and description of alpha particle decay and isotope separation .....	59
---	----

<i>A. G. Ospan, M.E. Mansurova, Ye. Kh. Kakimzhanov, S. Sh. Ixanov, V. B. Barakhnin.</i> Development of a program for the integration of socio-economic indicators with spatial data to analyze the standard of living of the population of Kazakhstan .....	67
--	----

<i>Y. Seitkulov, Ruslan Ospanov, B. Yergaliyeva, A. Akhmediyarova.</i> Algebraic methods for generating optimal S-blocks .....	79
--	----

<i>E. E. Eldarova, N. B. Baytemirova.</i> Improving visual quality of blurred digital images .....	89
--	----

### APPLIED MATHEMATICS

<i>M. A. Beysenbi, A. A. Maimuryanova.</i> Solution of the problem of synthesis of the main contour of the adaptive control system for unstable and deterministic chaotic processes with m-inputs and n-outputs in the «hyperbolic umbilic» catastrophe class .....	99
---	----

<i>N. G. Dzhumamukhambetov, V. A. Yashkov, D. U. Kulzhanov, N. M. Sarsyenov.</i> Survivability of power transmission systems in the conditions of the sharply continental climate of the Atyrau region of the Republic of Kazakhstan .....	110
--	-----

<i>D. B. Zhakebayev, A. S. Zhumali</i> . Simulation of four-component mixtures separation by phase field and LB methods .....	119
<i>E. A. Nysanov, S. D. Kurakbayeva, A. Kh. Makhatova, A. E. Kozhabekova, A. A. Musabekov</i> . Computer simulation and description of alpha particle decay and isotope separation .....	128
<i>N. Rajabov, Zh. N. Tasmambetov, Zh. K. Ubayeva</i> . Features of constructing a solution clausen-type systems .....	137
<i>B. Rysbaiuly, S. D. Alpar</i> . Nonlinear inverse problem of finding thermophysical characteristics .....	148
<i>A. N. Temirbekov, S. E. Kasenov</i> . Numerical implementation of the fictitious domain method for an elliptic type equation .....	158
<i>K. Zh. Nazarova, K. I. Usmanov, K. M. Shadibekov</i> . A criterion for unique solvability of a multipoint boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution .....	168
<i>Kh. Khompysh</i> . Determination of pressure from nonlinear equations of non-homogeneous non-newtonian fluids .....	182
<b>TECHNICAL SCIENCE</b>	
<i>S. Zhunisbekov, S. Zh. Zhashen, D. K. Dzhakiyaev, B. D. Dzhakiyaev</i> . The effect of pre-training on metal fatigue resistance .....	192
<b>THE INFORMATION ABOUT AUTHORS</b> .....	197

Редактор *М. Ахметова*  
Верстка на компьютере *Е.В. Огурцовой*

Адрес редакции:  
Национальная инженерная академия РК  
050010, г. Алматы, ул. Богенбай батыра, 80  
Тел. 8(727)-2915290

Подписано в печать 15.09.2022 г.  
Гарнитура Таймс. Формат 70x100 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Уч.-изд. л. 10,8. Тираж 1000 экз.

*Отпечатано в типографии ТОО «Luxe Media Publishing»*